

Аффинные и евклидовы коники

Терминология. Рассмотрим евклидову плоскость \mathbb{R}^2 с прямоугольными координатами (x_1, x_2) как множество вещественных точек стандартной аффинной карты U_0 комплексной проективной плоскости $\mathbb{P}_2 = \mathbb{P}(\mathbb{C}^3)$ с однородными координатами $(x_0 : x_1 : x_2)$. Прямая $x_0 = 0$ называется *бесконечностью* и обозначается ℓ_∞ , коника $x_0^2 + x_1^2 + x_2^2 = 0$ называется *изотропной* и обозначается I , точки пересечения $\ell_\infty \cap I$ называется *изотропными направлениями* и обозначается $I_\pm = (0 : 1 : \pm i)$. Коника на \mathbb{P}_2 называется *вещественной*, если её уравнение в фиксированных выше координатах имеет вещественные коэффициенты. Гладкая вещественная коника называется соответственно *параболой*, *гиперболой* или *эллипсом*, если она касается ℓ_∞ или пересекает ℓ_∞ по двум вещественным или двум комплексно сопряжённым точкам. Точка F называется *фокусом* (гладкой) коники C , если прямые (FI_\pm) касаются C (см. рис. 1 на обороте). Поляры фокусов называются *директрисами*. Полус бесконечности называется *центром* коники. Прямые, проходящие через центр, называются *диаметрами*. Диаметры, проходящие через бесконечные точки коники, называются *асимптотами*. Коники с конечным центром (гиперболы и эллипсы) называются *центральнойми*. На пучке диаметров (гладкой) центральной коники есть две инволюции: *сопряжение* (неподвижные точки — асимптоты) и *перпендикулярность* (неподвижные точки — изотропные направления). Два одновременно сопряжённых и перпендикулярных друг другу диаметра называются *главными осями* (гладкой) центральной коники.

G11◊1. Покажите, что диаметр центральной коники делит пополам все хорды, параллельные сопряжённому диаметру.

G11◊2. Покажите, что две вещественные прямые пересекаются под прямым углом, если и только если их направления гармоничны изотропным направлениям.

G11◊3*. Выразите угол между двумя вещественными прямыми через двойное отношение их направлений с изотропными направлениями.

G11◊4. Покажите, что главные оси существуют и перпендикулярны, и напишите уравнение центральной коники в главных осях.

G11◊5 (окружности). Пусть на гладкой вещественной конике C есть конечная вещественная точка. Докажите, что следующие свойства C эквивалентны друг другу: а) C проходит через I_\pm
 б) C центральна и имеет более одной пары перпендикулярных сопряжённых диаметров
 в) C центральна и любые два её сопряжённых диаметра перпендикулярны.

G11◊6. Покажите, что отличная от окружности гладкая центральная вещественная коника имеет ровно 4 фокуса, два из которых вещественны и лежат на одной главной оси, а два других — невещественны, комплексно сопряжены и лежат на другой главной оси.

G11◊7. Как устроены директрисы центральной коники?

G11◊8. Как устроены фокусы и директрисы у параболы? Дайте определение оси параболы и покажите, что в конечной точке она пересекает параболу под прямым углом.

G11◊9. Покажите, что касательные к параболе, восстановленные в концах фокальной хорды, пересекаются под прямым углом на директрисе.

G11◊10. Лежат ли на директрисе параболы все точки, симметричные её фокусу относительно всевозможных касательных?

G11◊11. Покажите, что фокус любой параболы, касающейся прямых (AB) , (BC) и (CA) , лежит на описанной около $\triangle ABC$ окружности.

G11◊12. Сформулируйте и докажите *фокальные свойства* параболы, эллипса и гиперболы¹.

G11◊13. Покажите, что все хорды гладкой коники C , видимые из данной точки $p \in C$ под прямым углом, пересекаются в одной точке q , причём прямая (pq) перпендикулярна касательной $T_p C$.

G11◊14. Может ли парабола на евклидовой плоскости \mathbb{R}^2 пересекать:

¹ последнее, к примеру, звучит так: лучи света от точечного источника в вещественном фокусе гиперболы видны удалённому наблюдателю так, словно источник находится в другом вещественном фокусе

- а) ровно в 3 точках окружность с центром не на оси этой параболы?
 б) ровно в 2 точках окружность с центром на оси этой параболы?

Г11◊15* (директор коники). Покажите, что ГМТ, из которых данная центральная коника C видна под прямым углом, это концентричная C окружность (т. н. *директор коники C*).

Г11◊16* (гипербола Аполлония). Опишите ГМТ пересечений вращающегося диаметра данной коники с перпендикуляром, опущенным из данной точки на сопряжённый диаметр.

Г11◊17*. Сколько перпендикуляров можно опустить из данной точки на данную конику?

Г11◊18* (цепочка Клиффорда). Четыре прямых без тройных пересечений образуют 4 треугольника. Их описанные окружности всегда пересекаются в одной точке $c_{4,1}$, и через центры этих окружностей проходит окружность $S_{4,1}$. Пять прямых без тройных пересечений содержат 5 четвёрок прямых. Точки $c_{4,1}$ этих четвёрок всегда лежат на одной окружности $C_{5,1}$, а окружности $S_{4,1}$ пересекаются в одной точке $s_{5,1}$, и через их центры проходит окружность $S_{5,2}$. Шесть прямых без тройных пересечений содержат 6 пятёрок прямых. Их окружности $C_{5,1}$ пересекаются в одной точке $c_{6,1}$, и через их центры проходит окружность $C_{6,2}$; точки $s_{5,1}$ лежат на одной окружности $S_{6,1}$; окружности $S_{5,2}$ пересекаются в одной точке $s_{6,2}$, и через их центры проходит окружность $S_{6,3}$. И так далее... В чём причина?

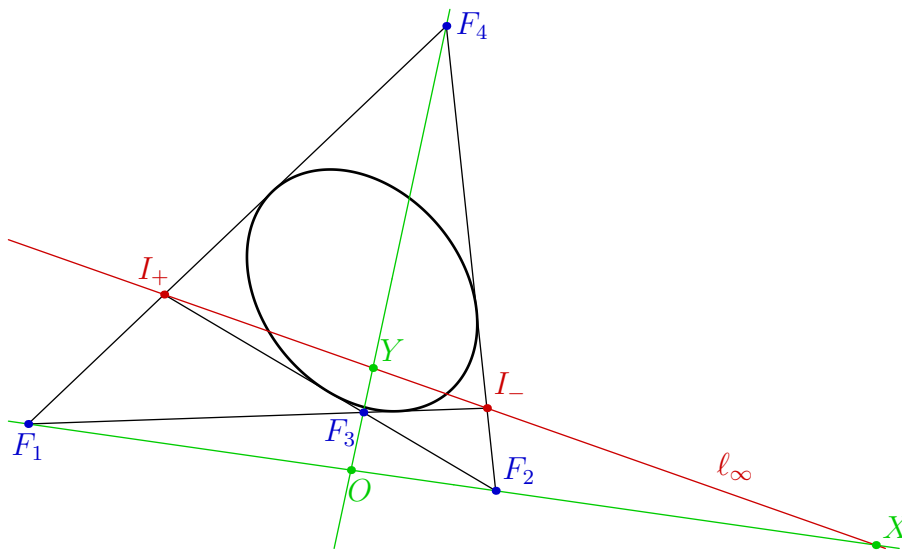


Рис. 1. Фокусы и главные оси центральной коники (эллипса и/или гиперболы).

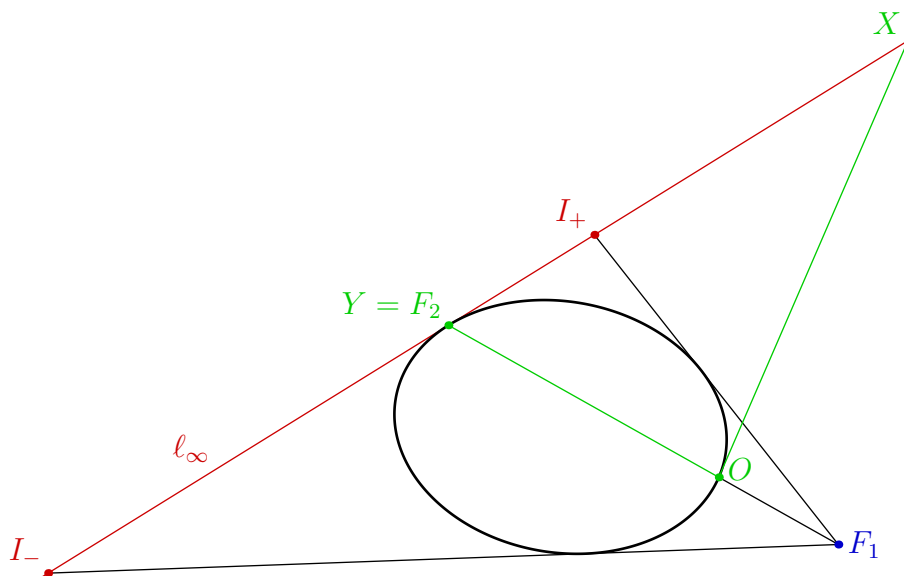


Рис. 2. Фокусы и главные оси параболы.