

А. Л. Городенцев*

ГЕОМЕТРИЯ

Это интенсивный годовой курс геометрии для студентов-математиков. Все встречающиеся в тексте упражнения существенны для его понимания и обычно используются в дальнейшем. К некоторым из них есть комментарии в конце книги.

Москва
2016/17 уч. год

* ВШЭ, НМУ, ИТЭФ, e-mail: gorod@itep.ru, <http://gorod.bogomolov-lab.ru/>

Оглавление

Оглавление	2
Неформальное введение	5
§1 Аффинная плоскость	8
1.1 Векторные пространства	8
1.2 Двумерное векторное пространство	10
1.3 Площадь ориентированного параллелограмма	12
1.4 Аффинные пространства	14
1.5 Прямые	16
1.6 Треугольники	18
§2 Аффинная группа	24
2.1 Аффинные отображения	24
2.2 Аффинные автоморфизмы	25
2.3 Сравнение аффинной и линейной групп	26
2.4 Запись линейных и аффинных преобразований в координатах	28
2.5 Преобразования, переводящие прямые в прямые	29
§3 Евклидова плоскость = комплексная прямая	33
3.1 Расстояния и перпендикулярность	33
3.2 Ортонормальные базисы	36
3.3 Углы и тригонометрия	38
3.4 Движения	40
3.5 Комплексные числа	44
3.6 Преобразования подобия	46
3.7 Проективная прямая и круговые преобразования	47
§4 Многомерие	55
4.1 Базисы и размерность	55
4.2 Линейные отображения	57
4.3 Подпространства	60
4.4 Двойственность	62
4.5 Аффинные пространства	65
4.6 Фактор пространства	67
4.7 Двойственные линейные отображения	69
§5 Объёмы и определители	71
5.1 Объём n -мерного ориентированного параллелепипеда	71
5.2 Определители	74
5.3 Комбинаторное отступление: длина и знак перестановки	76
5.4 Правила Крамера	77
5.5 Объём и барицентрические координаты	82
5.6 Алгебраическое отступление: грасмановы многочлены	84
§6 Евклидова геометрия	90
6.1 Евклидовы пространства	90

6.2	Матрицы Грама	93
6.3	Евклидова двойственность	95
6.4	Ортогональное проектирование	96
6.5	Сферы	100
§7	Группы ортогональных преобразований	106
7.1	Линейная ортогональная группа	106
7.2	Группы отражений	111
7.3	Системы корней и камеры Вейля	118
7.4	Графы Кокстера	122
§8	Топологии, метрики, нормы и выпуклость	128
8.1	Топологические пространства	128
8.2	Метрические пространства	134
8.3	Нормы	138
8.4	Выпуклость	140
§9	Выпуклые многогранники и многогранные конусы	147
9.1	Выпуклые многогранники	147
9.2	Выпуклые многогранные конусы	150
9.3	Линейная оптимизация и двойственность Гейла	158
9.4	Симплекс-метод	161
§10	Проективное пространство	171
10.1	Проективное пространство	171
10.2	Задание фигур полиномиальными уравнениями	175
10.3	Дополнительные подпространства и проекции	179
10.4	Линейные проективные изоморфизмы	181
10.5	Гомографии	182
10.6	Двойное отношение	185
§11	Проективные квадрики	189
11.1	Квадрики и их уравнения	189
11.2	Полярные преобразования	193
11.3	Коники	195
11.4	Внутренняя геометрия гладкой коники	200
11.5	Квадратичные поверхности	205
11.6	Подпространства, лежащие на квадриках	207
§12	Пространства со скалярным произведением	209
12.1	Скалярные произведения	209
12.2	Изотропные и анизотропные подпространства	210
12.3	Изометрии	212
12.4	Вещественные квадратичные формы	216
12.5	Аффинные квадрики	218
12.6	Линейные операторы на пространстве со скалярным произведением	226
§13	Дальнейшие вариации на темы квадрик	230
13.1	Квадрика Плюккера	230
13.2	Пучки квадрик	236

13.3 Евклидовы коники	243
§14 Вещественные неевклидовы геометрии	252
14.1 Проективизация пространства со скалярным произведением	252
14.2 Эллиптическая геометрия	257
14.3 Сферическая форма объёма	264
14.4 Гиперболическая геометрия	267
14.5 Гиперболическая форма объёма	275
14.6 Конформные модели гиперболического пространства	278
Ответы и указания к некоторым упражнениям	282

Ответы и указания к некоторым упражнениям