

### §3. Евклидова плоскость = комплексная прямая

Этот параграф посвящён метрической геометрии плоскости. Мы будем обсуждать длины и углы — величины, по природе своей являющиеся действительными числами и характеризующиеся специфическими для поля  $\mathbb{R}$  понятиями *неравенства* и *близости-удалённости*. Поэтому почти всюду в этом параграфе мы по умолчанию считаем, что основное поле  $\mathbb{k} = \mathbb{R}$ . Исключения составляют н° 3.5, где обсуждаются комплексные числа, и н° 3.7, значительная часть которого имеет смысл над любым полем.

#### ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3.1

Скалярным произведением (или евклидовой структурой) на векторном пространстве  $V$  над полем  $\mathbb{R}$  называется симметричная билинейная положительная функция  $V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ , сопоставляющая каждой паре векторов  $u, w \in V$  число  $(v, w) \in \mathbb{R}$ . При этом симметричность означает, что  $(u, w) = (w, u)$  для всех  $u, w \in V$ , билинейность — что

$$(\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2, \mu_1 w_1 + \mu_2 w_2) = \lambda_1 \mu_1 (u_1, w_1) + \lambda_1 \mu_2 (u_1, w_2) + \lambda_2 \mu_1 (u_2, w_1) + \lambda_2 \mu_2 (u_2, w_2),$$

а положительность — что  $(v, v) > 0$  для всех ненулевых векторов  $v \in V$ .

#### ПРИМЕР 3.1 (СТАНДАРТНАЯ ЕВКЛИДОВА СТРУКТУРА НА $\mathbb{R}^n$ )

Скалярное произведение векторов  $u = (x_1, x_2, \dots, x_n)$  и  $w = (y_1, y_2, \dots, y_n)$  координатного пространства  $\mathbb{R}^n$ , заданное формулой

$$(u, w) \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{i=1}^n x_i y_i = x_1 y_1 + x_2 y_2 + \dots + x_n y_n,$$

называется стандартным.

УПРАЖНЕНИЕ 3.1. Убедитесь, что стандартное скалярное произведение на  $\mathbb{R}^n$  билинейно, симметрично и положительно.

**3.1. Расстояния и перпендикулярность.** Неотрицательное число  $|v| \stackrel{\text{def}}{=} \sqrt{(v, v)}$  называется длиной вектора  $v$  евклидова пространства  $V$ . Все ненулевые векторы имеют строго положительную длину и

$$\forall \lambda \in \mathbb{R} \quad |\lambda v| = |\lambda| \cdot |v|.$$

Скалярное произведение  $V \times V \rightarrow \mathbb{R}$  однозначно восстанавливается по функции длины  $V \rightarrow \mathbb{R}, v \mapsto |v|$ , как

$$(u, w) = \frac{1}{2} (|u + w|^2 - |u|^2 - |w|^2). \quad (3-1)$$

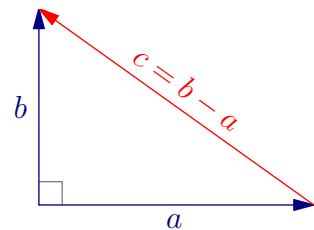


Рис. 3◊1. К теореме Пифагора.

Для пары точек  $p, q$  аффинной плоскости, ассоциированной с евклидовым пространством<sup>1</sup>, длина вектора  $\overline{pq} = q - p$  называется расстоянием между  $p$  и  $q$ . Мы обозначаем длину одним из двух способов:  $|q - p| = |p, q| \stackrel{\text{def}}{=} |\overline{pq}|$ . Обратите внимание, что  $|p - q| = |q - p|$ .

<sup>1</sup>Мы будем называть такие плоскости *евклидовыми*.

Векторы  $a$  и  $b$  называются *ортогональными* или *перпендикулярными*, если  $(a, b) = 0$ . Для перпендикулярных векторов  $a, b$  квадрат длины вектора  $c = b - a$ , соединяющего их концы, выражается через квадраты длин векторов  $a$  и  $b$  по *теореме Пифагора* (см. рис. 3◊1):

$$|c|^2 = (c, c) = (b - a, b - a) = (a, a) + (b, b) = |a|^2 + |b|^2. \quad (3-2)$$

#### Предложение 3.1

Во всяком евклидовом пространстве для любого ненулевого вектора  $a$  и произвольного вектора  $b$  существует единственная пара таких векторов  $b_a$  и  $b_{a^\perp}$ , что  $b_a$  пропорционален  $a$ ,  $b_{a^\perp}$  перпендикулярен  $a$ , и  $b = b_a + b_{a^\perp}$  (см. рис. 3◊2). Эти векторы выражаются через  $a$  и  $b$  как

$$b_a = \frac{(a, b)}{(a, a)} a \quad \text{и} \quad b_{a^\perp} = b - \frac{(a, b)}{(a, a)} a, \quad (3-3)$$

причём  $b_{a^\perp} = 0$ , если и только если  $a$  и  $b$  пропорциональны, а  $b_a = 0$ , если и только если  $b$  перпендикулярен  $a$ .

Доказательство. Мы ищем такие векторы  $b_a = \lambda a$  и  $b_{a^\perp} = b - \lambda a$ , что

$$(a, b_{a^\perp}) = (a, b - \lambda a) = (a, b) - \lambda(a, a) = 0.$$

Поскольку  $(a, a) \neq 0$ , это равенство выполняется при единственном  $\lambda = (a, b)/(a, a)$ , и условие  $b_{a^\perp} = 0$  при таком  $\lambda$  означает, что  $(a, a) \cdot b = (a, b) \cdot a$ , тогда как  $b_a = 0$ , если и только если  $(a, b) = 0$ .  $\square$

#### Определение 3.2

Векторы  $b_a$  и  $b_{a^\perp}$  из предл. 3.1, называются соответственно *ортогональной проекцией* вектора  $b$  на одномерное подпространство  $\mathbb{R} \cdot a$ , порождённое вектором  $a$ , и *нормальной составляющей* вектора  $b$  относительно  $a$ .

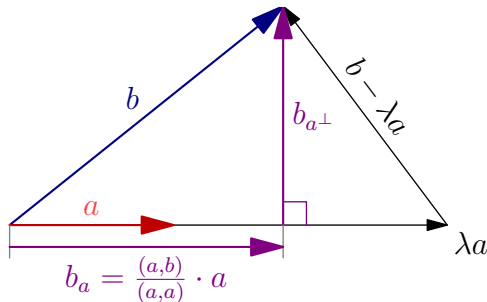


Рис. 3◊2. Ортогональная проекция  $b$  на  $a$ .

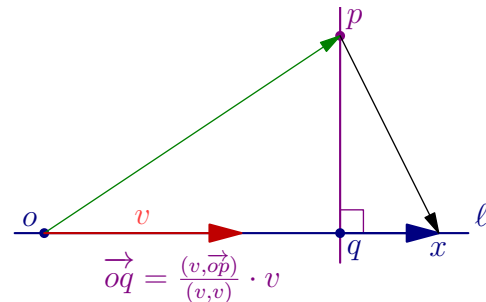


Рис. 3◊3. Перпендикуляр к прямой.

Упражнение 3.2. Убедитесь, что векторы  $b_a$  и  $b_{a^\perp}$  не меняются при замене вектора  $a$  на пропорциональный вектор  $\lambda a$  с  $\lambda \neq 0$ .

#### Следствие 3.1

Для любой прямой  $\ell$  и точки  $p \notin \ell$  следующие условия на точку  $q \in \ell$  равносильны друг другу:

- 1)  $|x - p| > |q - p|$  для любой точки  $x \in \ell$ , отличной от точки  $q$

2) прямая  $(p, q)$  перпендикулярна прямой  $\ell$ .

Точка  $q \in \ell$  с такими свойствами существует и единственна.

Доказательство. Пусть прямая  $\ell$  задаётся параметрическим уравнением  $o + tv$ , где  $o \in \ell$  — произвольная точка, а  $v$  — вектор скорости прямой  $\ell$ . Каждое из условий (1), (2) определяет на прямой  $\ell$  единственную точку, и эти точки совпадают друг с другом. В самом деле, точка удовлетворяющая (1) очевидно единственна, если существует. Точка  $q \in \ell$ , такая что  $\overrightarrow{q\bar{p}}$  перпендикулярен  $v$ , существует и единственна по предл. 3.1, применённому к векторам  $a = v$  и  $b = \overrightarrow{o\bar{p}}$ , см. рис. 3◊3. При этом для любой отличной от  $q$  точки  $x \in \ell$  по теореме Пифагора  $|\overrightarrow{p\bar{x}}|^2 = |\overrightarrow{p\bar{q}}|^2 + |\overrightarrow{q\bar{x}}|^2 > |\overrightarrow{p\bar{q}}|^2$ , откуда  $|x - p| > |q - p|$ .  $\square$

Упражнение 3.3. Покажите, что на евклидовой плоскости через любую точку проходит единственная прямая, перпендикулярная произвольно заданной прямой.

Следствие 3.2 (неравенство Коши – Буняковского – Шварца)

Для любых двух векторов  $a, b$  евклидова пространства выполняется неравенство

$$|(a, b)| \leq |a| \cdot |b|, \quad (3-4)$$

которое обращается в равенство, если и только если векторы  $a$  и  $b$  пропорциональны.

Доказательство. Если оба вектора нулевые, обе части неравенства обращаются в нуль. Если  $a \neq 0$ , то длина нормальной составляющей вектора  $b$  относительно вектора  $a$  неотрицательна  $(b_{a^\perp}, b_{a^\perp}) = (b, b) - (a, b)^2 / (a, a) \geq 0$  и обращается в нуль, если и только если  $b$  пропорционален  $a$ . Домножая на  $(a, a)$ , получаем  $(b, b)(a, a) \geq (a, b)^2$ . Извлекая из обеих частей неотрицательный квадратный корень, приходим к (3-4).  $\square$

Следствие 3.3 (неравенство треугольника)

Для любых двух векторов  $a, b$  евклидова пространства выполняется *неравенство треугольника*<sup>1</sup>  $|a + b| \leq |a| + |b|$ , см. рис. 3◊4. Оно обращается в равенство, если и только если векторы  $a$  и  $b$  пропорциональны и *сонаправлены*<sup>2</sup>.

Доказательство. Возводя обе части неравенства  $|a + b| \leq |a| + |b|$  в квадрат, получаем эквивалентное неравенство  $(a + b, a + b) \leq (a, a) + 2|a| \cdot |b| + (b, b)$ , которое после раскрытия скобок в левой части и очевидных сокращений превращается в неравенство  $(a, b) \leq |a| \cdot |b|$ , отличающееся от неравенства Коши – Буняковского – Шварца отсутствием модуля в левой части. При  $(a, b) < 0$  оно заведомо выполняется в строгой форме. При  $(a, b) \geq 0$  оно выполняется по сл. 3.2 и превращается в равенство тогда и только тогда, когда  $b = \lambda a$ , причём  $(a, b) \geq 0 \Rightarrow \lambda > 0$ .  $\square$

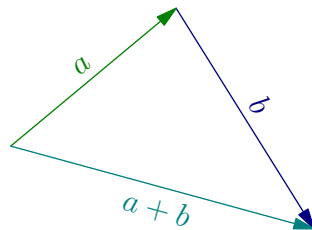


Рис. 3◊4. Неравенство треугольника.

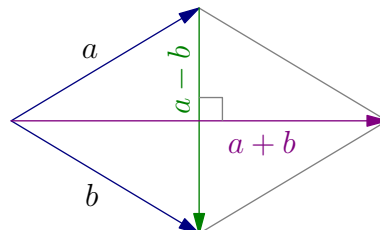


Рис. 3◊5. Диагонали ромба.

<sup>1</sup>Чем, собственно, и оправдывается термин «длина».

<sup>2</sup>Т.е. один получается из другого умножением на *положительное* число.

УПРАЖНЕНИЕ 3.4. Проверьте, что диагонали ромба перпендикулярны, т. е.  $(a + b, a - b) = 0$  для любых двух векторов  $a, b$  одинаковой длины  $|a| = |b|$ , см. рис. 3◊5.

ПРИМЕР 3.2 (ОТРЕЗОК)

Множество положительных барицентрических комбинаций двух точек  $a, b$  на вещественной плоскости обозначается  $[a, b] \stackrel{\text{def}}{=} \{\alpha a + \beta b \mid \alpha, \beta \geq 0 \text{ и } \alpha + \beta = 1\}$  и называется *отрезком* с концами в точках  $a, b$ . В евклидовом пространстве отрезок также характеризуется как ГМТ  $x$ , таких что  $|a - x| + |x - b| = |a - b|$ , поскольку в силу неравенства треугольника это соотношение имеет место тогда и только тогда, когда векторы  $\overline{ax}$ ,  $\overline{xb}$  и  $\overline{ab}$  сонаправлены, т. е.  $\overline{ax} = \alpha \overline{ab}$  с  $0 \leq \alpha = |x - a| / |b - a| \leq 1$ .

**3.2. Ортонормальные базисы.** Векторы длины 1 называются *единичными*. Базис пространства  $\mathbb{R}^2$ , образованный двумя перпендикулярными единичными векторами, называется *ортонормальным* базисом. Если векторы  $a$  и  $b$  не пропорциональны друг другу, то векторы  $e_1 = a / |a|$  и  $e_2 = b_{a^\perp} / |b_{a^\perp}|$ , где  $b_{a^\perp} = b - a \cdot (a, b) / (a, a)$  — ортогональная проекция  $b$  на  $a$ , составляют ортонормальный базис.

УПРАЖНЕНИЕ 3.5. Покажите что каждый единичный вектор  $e$  включается ровно в два ортонормальных базиса  $(e, f)$  и  $(e, -f)$  различной ориентации.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3.2

Координаты вектора  $u = x_1 e_1 + x_2 e_2$  в ортонормальном базисе  $e_1, e_2$  равны его скалярным произведениям с базисными векторами:  $x_1 = (u, e_1)$ ,  $x_2 = (u, e_2)$ , а скалярное произведение векторов  $u = x_1 e_1 + x_2 e_2$  и  $w = y_1 e_1 + y_2 e_2$  имеет стандартный вид из прим. 3.1 на стр. 33:  $(u, w) = x_1 y_1 + x_2 y_2$ .

Доказательство. Первое утверждение доказывается скалярным умножением обеих частей равенства<sup>1</sup>  $u = x_1 e_1 + x_2 e_2$  на векторы  $e_1$  и  $e_2$ , второе — бесхитрым раскрытием скобок в  $(x_1 e_1 + x_2 e_2, y_1 e_1 + y_2 e_2)$ .  $\square$

ПРИМЕР 3.3 (УРАВНЕНИЕ ПРЯМОЙ)

В координатах  $(x_1, x_2)$  относительно ортонормального базиса линейное неоднородное уравнение

$$\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 = c \quad (3-5)$$

Задаёт прямую, перпендикулярную вектору

$$n = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{pmatrix}$$

и расположенную на расстоянии  $|c| / |n|$  от начала координат с той же стороны, что вектор  $n$ , при  $c > 0$  и с противоположной стороны — если  $c < 0$ . В самом деле,

уравнение (3-5) гласит, что переменный вектор  $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$  имеет фиксированное скалярное произведение  $(n, x) = c$  с вектором  $n$ . Это означает, что прямая (3-5) задается концами всех векторов  $x$ , которые ортогонально проектируются на вектор  $n$  в один и тот же вектор

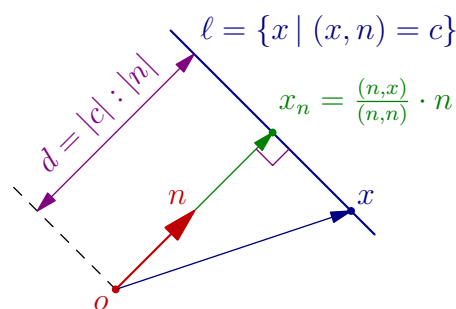


Рис. 3◊6. Прямая  $(n, x) = c$ .

<sup>1</sup>Ср. с доказательством лем. 1.2 на стр. 11.

$x_n = n \cdot (x, n) / (n, n) = n \cdot c / |n|^2$  (см. рис. 3◊6). Длина этой проекции равна  $\sqrt{(x_n, x_n)} = |c|/|n|$ , а направление определяется знаком константы  $c$ : проекция сонаправлена с  $n$  при  $c > 0$  и противоположно направлена при  $c < 0$ . При  $c = 0$  прямая (3-5) проходит через начало координат.

В частности, *срединный перпендикуляр* к отрезку  $[a, b]$ , т. е. прямая перпендикулярная вектору  $a - b$  и проходящая через точку  $(a + b)/2$ , задаётся уравнением

$$(a - b, x) = (a - b, a + b)/2 = \frac{1}{2} (|a|^2 - |b|^2) \quad (3-6)$$

Две прямые, перпендикулярные одному и тому же вектору  $n$  и заданные уравнениями

$$(n, x) = c_1 \quad \text{и} \quad (n, x) = c_2$$

находятся друг от друга на расстоянии  $|c_1 - c_2|/|n|$ . Поэтому расстояние от точки  $a$  до прямой  $(n, x) = c$ , равное расстоянию от этой прямой до параллельной ей проходящей через  $a$  прямой  $(n, x) = (n, a)$ , можно вычислять как  $|c - (n, a)|/|n|$ .

**УПРАЖНЕНИЕ 3.6.** Покажите, что биссектрисы углов, возникающих при пересечении прямых  $(n_1, x) = c_1$  и  $(n_2, x) = c_2$ , задаются уравнениями  $|n_2| \cdot (c_1 - (n_1, x)) = \pm |n_1| \cdot (c_2 - (n_2, x))$  и перпендикулярны друг другу.

**Предложение 3.3 (определитель Грама)**

Если  $e_1, e_2$  образуют ортонормальный базис, и  $u = x_1 e_1 + x_2 e_2$ ,  $w = y_1 e_1 + y_2 e_2$ , то

$$\frac{s^2(u, w)}{s^2(e_1, e_2)} = \det \begin{pmatrix} (u, u) & (u, w) \\ (w, u) & (w, w) \end{pmatrix}$$

(определитель в правой части называется *определителем Грама* векторов  $u, w$ ).

**Доказательство.** По сл. 1.2 на стр. 14  $s(u, w)/s(u, w) = \det(u, w) = x_1 y_2 - x_2 y_1$ . С другой стороны  $(u, u) \cdot (w, w) - (u, w)^2 = (x_1^2 + x_2^2)(y_1^2 + y_2^2) - (x_1 y_1 + x_2 y_2)^2 = (x_1 y_2)^2 + (x_2 y_1)^2 - 2 x_1 y_1 x_2 y_2 = (x_1 y_2 - x_2 y_1)^2$ .  $\square$

**УПРАЖНЕНИЕ 3.7.** Выведите из предл. 3.3 другое доказательство неравенства Коши – Буняковского – Шварца (3-4).

**Следствие 3.4**

Все ортонормальные базисы имеют равные по абсолютной величине площади.

**Доказательство.** Если векторы  $u, w$  образуют ортонормальный базис, то

$$\det \begin{pmatrix} (u, u) & (u, w) \\ (w, u) & (w, w) \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = 1$$

откуда по предл. 3.3  $s(u, w) = \pm s(e_1, e_2)$ .  $\square$

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3.3**

Функция площади на евклидовой плоскости называется *евклидовой*, если площадь всех положительно ориентированных ортонормальных базисов<sup>1</sup> равна единице. Всяду далее обозначения  $s(u, v)$  и  $s(ABC)$  по умолчанию подразумевают евклидову площадь параллелограмма и треугольника соответственно.

<sup>1</sup>Второй вектор которых расположен в левой полуплоскости от первой координатной прямой, если смотреть вдоль первого базисного вектора.

УПРАЖНЕНИЕ 3.8. Покажите, что абсолютная величина евклидовой площади параллелограмма равна произведению длины основания на длину опущенной на него высоты, т. е.

$$|\det(a, b)| = |a| \cdot |b_{a^\perp}|.$$

**3.3. Углы и тригонометрия.** Коэффициенты  $x, y$  разложения  $f = x \cdot e + y \cdot e^\perp$  единичного вектора  $f$  по положительно ориентированному ортонормальному базису  $e, e^\perp$  называются, соответственно, *косинусом* и *синусом* ориентированного угла<sup>1</sup>  $\angle(e, f)$ , так что

$$f = e \cdot \cos \angle(e, f) + e^\perp \cdot \sin \angle(e, f) \quad (3-7)$$

(см. рис. 3◊7). Согласно лем. 1.2 на стр. 11 и предл. 3.2

$$\cos \angle(e, f) = (e, f) = s(f, e^\perp) \quad \text{и} \quad \sin \angle(e, f) = s(e, f) = (e^\perp, f). \quad (3-8)$$

УПРАЖНЕНИЕ 3.9. Пусть вектор  $f^\perp$  образует положительный ортонормальный базис с вектором  $f$ . Покажите, что

$$f^\perp = -e \cdot \sin \angle(e, f) + e^\perp \cdot \cos \angle(e, f). \quad (3-9)$$

и  $\cos \angle(f, e^\perp) = \sin \angle(e, f)$ ,  $\sin \angle(f, e^\perp) = \cos \angle(e, f)$ .

Из равенства  $1 = (f, f) = x^2 + y^2$  вытекает основное тригонометрическое тождество  $\cos^2 \angle(e, f) + \sin^2 \angle(e, f) = 1$  и неравенства  $-1 \leq \cos \angle(e, f) \leq 1$ ,  $-1 \leq \sin \angle(e, f) \leq 1$ . Подставляя (3-7) и (3-9) в разложение произвольного единичного вектора  $g = f \cdot \cos(\angle(f, g)) + f^\perp \cdot \sin(\angle(f, g))$  по ортонормальному базису  $f, f^\perp$ , получаем<sup>2</sup>

$$\begin{aligned} (e, e^\perp) \cdot \begin{pmatrix} \cos \angle(e, g) \\ \sin \angle(e, g) \end{pmatrix} &= g = (f, f^\perp) \cdot \begin{pmatrix} \cos \angle(f, g) \\ \sin \angle(f, g) \end{pmatrix} = \\ &= (e, e^\perp) \cdot \begin{pmatrix} \cos \angle(e, f) & -\sin \angle(e, f) \\ \sin \angle(e, f) & \cos \angle(e, f) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \cos \angle(f, g) \\ \sin \angle(f, g) \end{pmatrix} = \\ &= (e, e^\perp) \cdot \begin{pmatrix} \cos \angle(e, f) \cdot \cos \angle(f, g) - \sin \angle(e, f) \cdot \sin \angle(f, g) \\ \cos \angle(e, f) \cdot \sin \angle(f, g) + \sin \angle(e, f) \cdot \cos \angle(f, g) \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

т. е. для любой тройки единичных векторов  $e, f, g$  справедливы формулы сложения углов:

$$\begin{aligned} \cos \angle(e, g) &= \cos \angle(e, f) \cdot \cos \angle(f, g) - \sin \angle(e, f) \cdot \sin \angle(f, g) \\ \sin \angle(e, g) &= \cos \angle(e, f) \cdot \sin \angle(f, g) + \sin \angle(e, f) \cdot \cos \angle(f, g). \end{aligned} \quad (3-10)$$

Ориентированный угол  $\angle(a, b)$  между произвольными векторами  $a$  и  $b$  равен углу между сонаправленными с ними единичными векторами  $a/|a|$  и  $b/|b|$ . Поэтому

$$\cos \angle(a, b) = \frac{(a, b)}{|a| \cdot |b|} \quad \text{и} \quad \sin \angle(a, b) = \frac{s(a, b)}{|a| \cdot |b|}. \quad (3-11)$$

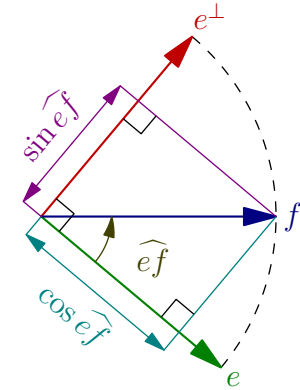


Рис. 3◊7.

<sup>1</sup>Угол считается с плюсом, если он проходится против ЧС, и с минусом — если по ЧС.

<sup>2</sup>Мы пользуемся матричными обозначениями из н° 2.4 на стр. 28.

В частности, мы получаем ориентированную версию школьной формулы для площади:

$$s(a, b) = |a| \cdot |b| \cdot \sin \sphericalangle(a, b). \quad (3-12)$$

УПРАЖНЕНИЕ 3.10. Убедитесь, что для любых векторов  $u, w \in V$  справедлива евклидова теорема косинусов:  $|u + w|^2 = |u|^2 + |w|^2 + 2 \cdot |u| \cdot |w| \cdot \cos \sphericalangle(u, w)$ .

ПРИМЕР 3.4 (окружности)

ГМТ  $x$ , удалённых от данной точки  $o$  на заданное расстояние  $R$ , называется *окружностью* радиуса  $R$  с центром  $o$  и задаётся уравнением  $(x - o, x - o) = R^2$ . Поместим начало отсчёта в точку  $o$  и отложим от неё векторы  $\pm r$  длины  $R$  как на рис. 3◊8. Равенство

$$(b + r, b - r) = |b|^2 - |r|^2$$

показывает, что точка  $b$  лежит на окружности, если и только если диаметр  $[-r, r]$  виден из точки  $b$  под прямым углом. С другой стороны, точка  $b$  лежит на окружности, если и только если векторы  $r$  и  $b$  составляют ромб, что равносильно равенству углов  $\sphericalangle(r, b) = 2\sphericalangle(r, r + b)$

(см. рис. 3◊8). Отсюда вытекает, что дуга видна из любой не лежащей на ней точки окружности под вдвое меньшим углом, чем из центра:

$$\sphericalangle(a, b) = \sphericalangle(a, r) - \sphericalangle(b, r) = 2(\sphericalangle(a + r, r) - \sphericalangle(b + r, r)) = 2\sphericalangle(a + r, b + r).$$

В частности, окружность, последовательно проходящая через точки  $a, b, c, d$  существует тогда и только тогда, когда сумма противоположных углов четырёхугольника  $abcd$  равна полуокружности  $\pi$ .

УПРАЖНЕНИЕ 3.11. Убедитесь прямым вычислением, что следующие три равенства равносильны друг другу: а)  $|a| = |b|$  б)  $(a - b) \perp (a + b)$  в)  $\cos \sphericalangle(a, b) = 2 \cos^2 \sphericalangle(a, a + b) - 1$  (правая часть (в) равна косинусу двойного угла  $\sphericalangle(a, a + b)$ ).

ПРИМЕР 3.5 (двойное отношение и углы)

Формула (3-12) позволяет переписать двойное отношение четырёх прямых  $(pa), (pb), (pc), (pd)$  как

$$[(pa), (pb), (pc), (pd)] = \frac{s(\overrightarrow{pa}, \overrightarrow{pc})}{s(\overrightarrow{pb}, \overrightarrow{pc})} : \frac{s(\overrightarrow{pa}, \overrightarrow{pd})}{s(\overrightarrow{pb}, \overrightarrow{pd})} = \frac{\sin \sphericalangle apc}{\sin \sphericalangle cpb} : \frac{\sin \sphericalangle apd}{\sin \sphericalangle dpb},$$

что лишний раз подтверждает его независимость от выбора точек  $a, b, c, d$  на прямых. Если же точки  $a, b, c, d$  и  $p$  лежат на одной окружности с центром в точке  $o$ , как на рис. 3◊9, то в силу предыдущего прим. 3.4 двойное отношение

$$[(pa), (pc), (pb), (pd)] = \frac{\sin \sphericalangle apb} \cdot \sin \sphericalangle dpb}{\sin \sphericalangle apd} \cdot \sin \sphericalangle cpb}$$

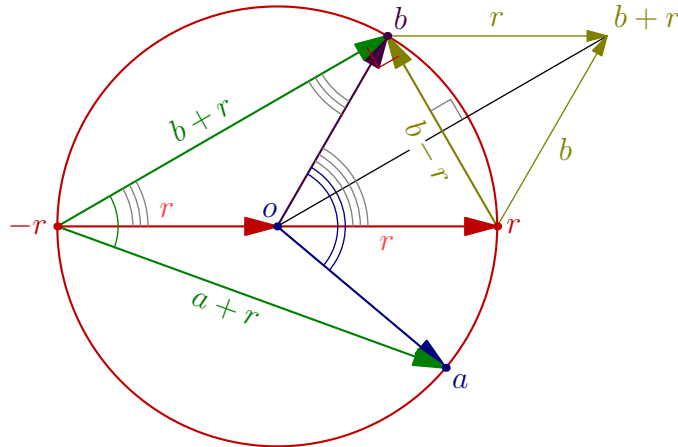


Рис. 3◊8. Окружность и углы.

не зависит от выбора точки  $p$ . Оно называется *двойным отношением четырёх точек окружности* и обозначается  $[a, c, b, d]$ . Если пары точек  $a, c$  и  $b, d$  диаметрально противоположны, как на рис. 3◊10, и  $\varphi = \frac{1}{2}\sphericalangle aob = \sphericalangle arp = \sphericalangle cpd$ , то

$$[a, c, b, d] = -\frac{\sin^2 \varphi}{\cos^2 \varphi} = -\operatorname{tg}^2 \frac{1}{2} \sphericalangle aob. \quad (3-13)$$

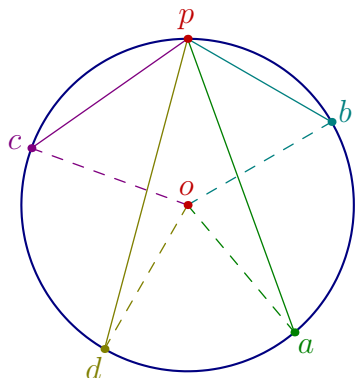


Рис. 3◊9. Двойное отношение на окружности.

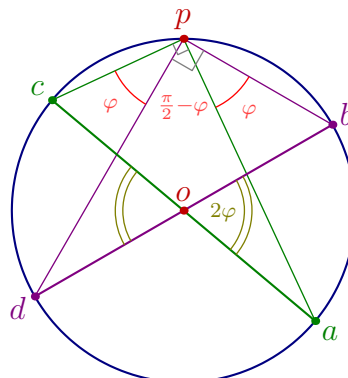


Рис. 3◊10.  $[a, c, b, d] = -\operatorname{tg}^2 \varphi$ .

**3.4. Движения.** Отображение  $F : \mathbb{A}^2 \rightarrow \mathbb{A}^2$  называется *движением* или *изометрией*, если оно сохраняет расстояние, т. е.  $|p - q| = |F(p) - F(q)|$  для любых двух точек  $p, q \in \mathbb{A}^2$ . Поскольку каждый отрезок  $[a, b]$  является ГМТ  $x$ , таких что<sup>1</sup>  $|a - x| + |x - b| = |a - b|$ , каждое движение биективно переводит любой отрезок  $[a, b]$  в отрезок  $[F(a), F(b)]$  той же длины. Поэтому все движения биективны и переводят прямые в прямые. По сл. 2.2 на стр. 32 движения являются аффинными преобразованиями. В частности, каждое движение  $F$  однозначно определяется своим действием на любой треугольник.

**УПРАЖНЕНИЕ 3.12.** Докажите школьные признаки конгруэнтности треугольников по трём сторонам, по стороне и двум прилежащим к ней углам и по двум сторонам и углу между ними, т. е. покажите, что в этих трёх случаях единственное аффинное преобразование, переводящее вершины одного треугольника в соответствующие вершины другого, является движением.

Движения образуют в аффинной группе  $\operatorname{Aff}(V)$  подгруппу, которая называется *группой движений* или *группой изометрий* евклидова аффинного пространства  $A(V)$  и обозначается  $\operatorname{Isom}(V) \subset \operatorname{Aff}(A)$ . Группа параллельных переносов  $T$ , очевидно, содержится в  $\operatorname{Isom}(V)$ .

**3.4.1. Линейные ортогональные преобразования.** Если произвольным образом зафиксировать начальную точку  $O \in A(V)$ , по предл. 2.5 разложить движение  $F : A(V) \rightarrow A(V)$  в композицию  $F = \tau_v \circ \varphi_O$  параллельного переноса на вектор  $v = \overline{OF(O)}$  и оставляющего точку  $O$  на месте отображения  $\varphi_O : X \mapsto O + \varphi(\overline{OX})$ , построенного по линейному преобразованию  $\varphi = DF : V \rightarrow V$  векторного пространства  $V$ , то преобразование  $\varphi_O = \tau_{-v} \circ F$  тоже будет движением. Поэтому линейный автоморфизм  $\varphi \in \operatorname{GL}(V)$  сохраняет длины векторов, а значит<sup>2</sup>, и скалярные произведения:

$$(\varphi(u), \varphi(w)) = (|\varphi(u+w)|^2 - |\varphi(u)|^2 - |\varphi(w)|^2)/2 = (|u+w|^2 - |u|^2 - |w|^2)/2 = (v, w)$$

<sup>1</sup>См. прим. 3.2 на стр. 36.

<sup>2</sup>См. 3-1 на стр. 33.



для всех  $u, w \in V$ . Такие линейные преобразования евклидова пространства  $V$  называются *ортогональными* или *изометрическими*. Поскольку ортогональное преобразование переводит ортонормальный базис в ортонормальный, оно с точностью до знака сохраняет евклидову площадь, а значит имеет определитель<sup>1</sup>  $\pm 1$ . Ортогональные преобразования определителя  $+1$  сохраняют ориентацию и называются *собственными* или *специальными*, а преобразования определителя  $-1$  меняют ориентацию и называются *несобственными*.

**Пример 3.6 (отражения)**

Всякий ненулевой вектор  $n \in V$  задаёт несобственное ортогональное преобразование, которое называется *отражением*<sup>2</sup> относительно проходящей через начальную точку  $O$  перпендикулярно вектору  $n$  прямой  $\ell = n^\perp$ , задаваемой уравнением  $(n, x) = 0$ . Мы будем обозначать это отражение через  $\sigma_\ell$  или же  $\sigma_n$ , где вектор  $n$  нормален к прямой<sup>3</sup>. Отражение  $\sigma_\ell$  переводит вектор  $v \in V$  в такой вектор  $\sigma_\ell(v)$ , ортогональная составляющая которого относительно вектора  $n$  та же, что и у  $v$ , а ортогональная проекция на  $n$  имеет противоположный знак (см. рис. 3◊11), т. е.  $\sigma_\ell(v)_{n^\perp} = v_{n^\perp}$ , а  $\sigma_\ell(v)_n = -v_n$ , или, что то же самое,

$$\sigma_n(v) = v - 2 \frac{(n, v)}{(n, n)} \cdot n. \quad (3-14)$$

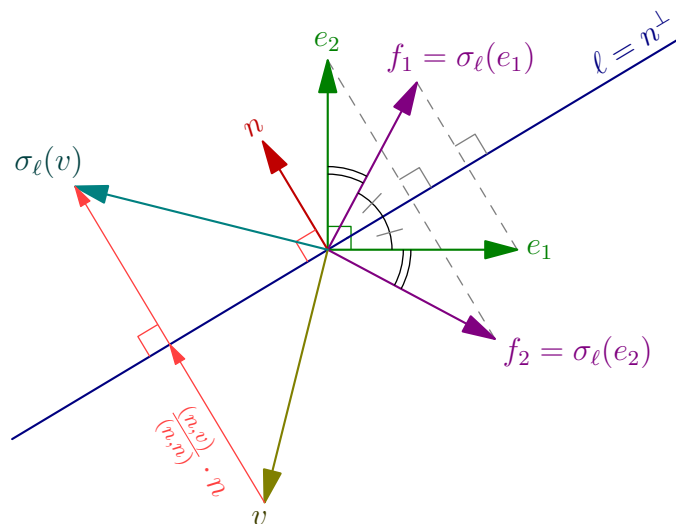


Рис. 3◊11. Отражение  $\sigma_\ell$ .

**Упражнение 3.13.** Проверьте прямым вычислением, что  $\sigma_\ell$  сохраняет скалярные произведения, и что для пропорциональных векторов  $m = \lambda n$  формула (3-14) задаёт одно и то же преобразование  $\sigma_m = \sigma_n = \sigma_\ell$ , где  $\ell = m^\perp = n^\perp$ .

<sup>1</sup>См. упр. 2.4 на стр. 29.

<sup>2</sup>В школьном курсе его также называют *осевой симметрией*.

<sup>3</sup>Если, как в этом примере, отражение понимается как линейное преобразование *векторного* пространства  $V$ , то второе обозначение  $\sigma_n$  обычно удобнее, хотя и не вполне корректно: пользуясь им, следует помнить, что  $\sigma_n = \sigma_m$ , когда  $m$  и  $n$  пропорциональны. Если отражение рассматривается на *аффинной* евклидовой плоскости, то удобнее первое обозначение  $\sigma_\ell$ , поскольку аффинная прямая не задаётся однозначно своим вектором нормали.

Каждое несобственное ортогональное преобразование  $\varphi$  является отражением: если  $\varphi$  переводит единичный вектор  $e_1$  в вектор  $f_1$ , то  $\varphi$  переводит вектор  $e_2$ , дополняющий  $e_1$  до положительно ориентированного ортонормального базиса, в вектор  $f_2$ , дополняющий  $f_1$  до отрицательно ориентированного базиса, как на рис. 3◊11. Отражение  $\sigma_{f_1-e_1}$  относительно той диагонали ромба, натянутого на векторы  $e_1$  и  $f_1$ , что перпендикулярна<sup>1</sup> диагонали  $f_1 - e_1$ , соединяющей их концы, переводит  $e_1$  в  $f_1$ , а  $e_2$  — в вектор, образующий с  $f_1$  отрицательно ориентированный ортонормальный базис, то есть — по упр. 3.5 — в  $f_2$ . Поэтому  $\sigma_{f_1-e_1} = \varphi$ . Из сказанного также вытекает, что любые два вектора  $e, f$  одинаковой длины переводятся друг в друга отражением (см. рис. 3◊11), матрица которого в положительно ориентированном базисе  $(e_1, e_2)$  с сонаправленным  $e$  вектором  $e_1$  имеет вид

$$\begin{pmatrix} \cos \vartheta & \sin \vartheta \\ \sin \vartheta & -\cos \vartheta \end{pmatrix}, \quad \text{где } \vartheta = \sphericalangle(e_1, f_1). \quad (3-15)$$

ПРИМЕР 3.7 (поворот)

Каждое собственное линейное ортогональное преобразование  $\varphi : V \rightarrow V$  является поворотом: если  $\varphi$  переводит единичный вектор  $e_1$  в  $f_1$ , то вектор  $e_2$ , дополняющий  $e_1$  до положительно ориентированного ортонормального базиса, перейдёт в вектор  $f_2$ , дополняющий  $f_1$  тоже до положительно ориентированного базиса, как на рис. 3◊12, и именно так действует на  $e_1$  и  $e_2$  поворот на ориентированный угол  $\vartheta = \sphericalangle(e_1, f_1)$ . Матрица такого поворота в базисе  $e_1, e_2$  имеет вид

$$\begin{pmatrix} \cos \vartheta & -\sin \vartheta \\ \sin \vartheta & \cos \vartheta \end{pmatrix}, \quad \text{где } \vartheta = \sphericalangle(e_1, f_1) \quad (3-16)$$

Мы будем обозначать поворот на угол  $\vartheta$  против ЧС через  $\rho_\vartheta$  или через  $\rho_{O,\vartheta}$ , если важно указать неподвижную точку поворота.

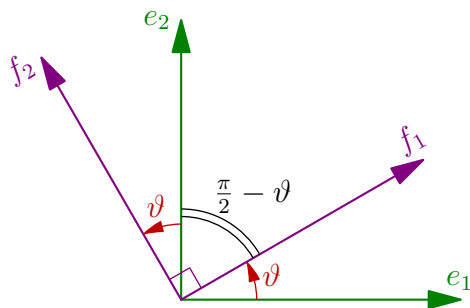


Рис. 3◊12. Поворот.

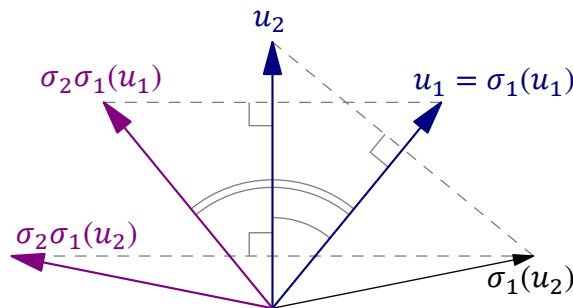


Рис. 3◊13. Композиция отражений.

УПРАЖНЕНИЕ 3.14. Убедитесь прямым вычислением, что любая вещественная матрица размера  $2 \times 2$ , столбцы которой образуют ортонормальный базис в  $\mathbb{R}^2$  относительно стандартной евклидовой структуры<sup>2</sup>, имеет либо вид (3-15), либо вид (3-16).

ПРИМЕР 3.8 (композиция отражений)

Из рис. 3◊13 видно, что последовательное выполнение отражений  $\sigma_1, \sigma_2$  — сначала относительно прямой с вектором скорости  $u_1$ , а затем — относительно прямой с вектором скорости

<sup>1</sup>См. упр. 3.4 на стр. 36.

<sup>2</sup>См. прим. 3.1 на стр. 33.

$u_2$  — приводит к повороту в направлении от  $u_1$  к  $u_2$  на удвоенный угол между этими векторами: если выбрать в качестве базиса в  $V$  векторы  $u_1$  и  $u_2$ , то каждый из них повернётся на указанный угол, а поскольку и поворот, и композиция отражений являются *линейными* преобразованиями пространства  $V$ , из того, что они одинаково действуют на базис, вытекает, что они одинаково действуют и на любой другой вектор<sup>1</sup>.

**3.4.2. Движения аффинной евклидовой плоскости.** Согласно предыдущему, всякое собственное движение  $G$  аффинной евклидовой плоскости является композицией  $G = \tau_u \circ \varrho_{O,\vartheta}$  поворота вокруг некоторой точки  $O$  со сдвигом на некий вектор  $u$ , а всякое несобственное движение  $F$  — композицией  $F = \tau_w \circ \sigma_\ell$  отражения относительно некой прямой  $\ell$  со сдвигом на некоторый вектор  $w$ .

В первом случае, если поворот  $\varrho_{O,\vartheta}$  происходит на ненулевой угол  $\vartheta$ , движение  $G$  имеет неподвижную точку  $C$  — конец вектора  $u$ , отложенного на плоскости так, чтобы он был виден из точки  $O$  под нормальным углом<sup>2</sup>  $-\vartheta$ , см.

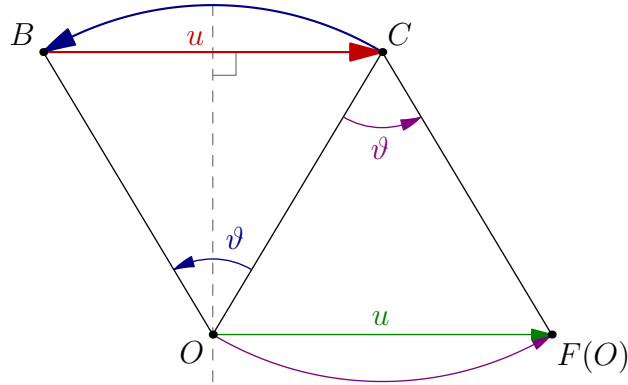


Рис. 3◊14.  $G = \tau_u \circ \varrho_{O,\vartheta} = \varrho_{C,\vartheta}$ .

рис. 3◊14. Стало быть,  $G = \varrho_{C,\vartheta}$  является поворотом на угол  $\vartheta$  вокруг  $C$ , ибо и  $G$  и  $\varrho_{C,\vartheta}$  оставляют  $C$  на месте, одинаково действуют на  $O$  и являются собственными.

Упражнение 3.15. Найдите координаты точки  $C$  относительно положительно ориентированного ортонормального репера  $(O, u_1, u_2)$ , в котором  $u_1$  сонаправлен  $u$ .

Во втором случае, движение  $F = \tau_w \circ \sigma_\ell$  является композицией  $F = \tau_{w_\ell} \circ \sigma_{\tau_{w/2}(\ell)}$  отражения относительно сдвинутой на половину вектора  $w$  прямой  $\tau_{w/2}(\ell)$  и коммутирующего с обоими отражениями сдвига на ортогональную проекцию  $w_\ell$  вектора  $w$  на прямую  $\ell$ , ибо обе композиции одинаково действуют на аффинный репер  $(O, v, n)$ , в котором  $O \in \ell$  — любая точка, а  $v, n \in V$  — единичные векторы скорости и нормали к прямой  $\ell$ , см. рис. 3◊15. Движение вида  $\lambda_{v,\ell} \stackrel{\text{def}}{=} \tau_v \circ \sigma_\ell = \sigma_\ell \circ \tau_v$ , где  $v \parallel \ell$ , называется *скользящей симметрией*. Представление несобственного движения скользящей симметрией предпочтительнее тем, что отражение и сдвиг в нём перестановочны друг с другом, а само представление единственно: прямая  $\ell$  однозначно определяется преобразованием  $F$  как геометрическое место середин отрезков  $[X, F(X)]$ , а значит, и сдвиг  $\tau_v = F \circ \sigma_\ell = \sigma_\ell \circ F$  тоже однозначно определяется по  $F$ . Суммируя сказанное, мы получаем следующее классическое описание движений плоскости.

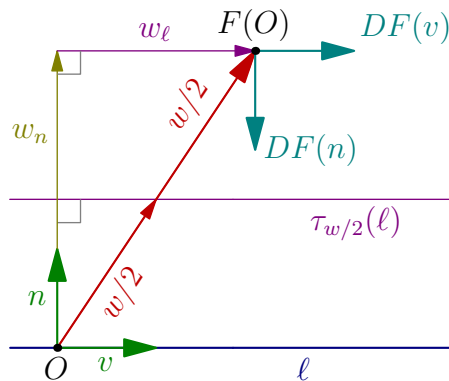


Рис. 3◊15.  $F = \tau_w \circ \sigma_\ell = \tau_{w_\ell} \circ \sigma_{\tau_{w/2}(\ell)}$ . значит, и сдвиг  $\tau_v = F \circ \sigma_\ell = \sigma_\ell \circ F$  тоже однозначно определяется по  $F$ . Суммируя сказанное, мы получаем следующее классическое описание движений плоскости.

**ТЕОРЕМА 3.1 (ТЕОРЕМА ШАЛЯ<sup>3</sup>)**

Всякое собственное движение плоскости является сдвигом или поворотом, а всякое несобствен-

<sup>1</sup>См. н° 2.4 на стр. 28.

<sup>2</sup>Т.е. в виде диагонали  $u = \overline{BC}$  ромба с вершиной в  $O$  и ориентированным углом  $\sphericalangle(b, c) = -\vartheta$ , где  $\overline{OB}, c = \overline{OC}$ .

ное — скользящей симметрией. □

УПРАЖНЕНИЕ 3.16. Покажите, что композиция отражения относительно прямой  $\ell_1$  с последующим отражением относительно параллельной ей прямой  $\ell_2$  является сдвигом на удвоенное расстояние между этими прямыми вдоль вектора их общей нормали, направленного от  $\ell_1$  к  $\ell_2$ .

Следствие 3.5

Любое собственное движение может быть (многими способами) разложено в композицию двух отражений, а несобственное — трёх. □

**3.5. Комплексные числа.** На евклидовой плоскости с фиксированным ортонормальным репером имеется структура поля. Это поле обозначается  $\mathbb{C}$  и называется *полем комплексных чисел*. Начало координат является нулём поля  $\mathbb{C}$  и обозначается через  $0$ . Базисные векторы принято обозначать  $1$  и  $i$ , первый из них является единицей поля  $\mathbb{C}$ . Точки  $z \in \mathbb{C}$  отождествляются с их *радиус-векторами*  $\vec{z} = \vec{OZ}$ , и в разложении такого вектора по базису  $1, i$  единицу обычно не пишут. Таким образом, запись

$$z = x + yi = |z| \cdot (\cos \alpha + i \sin \alpha) \stackrel{\text{def}}{=} x \cdot 1 + y \cdot i$$

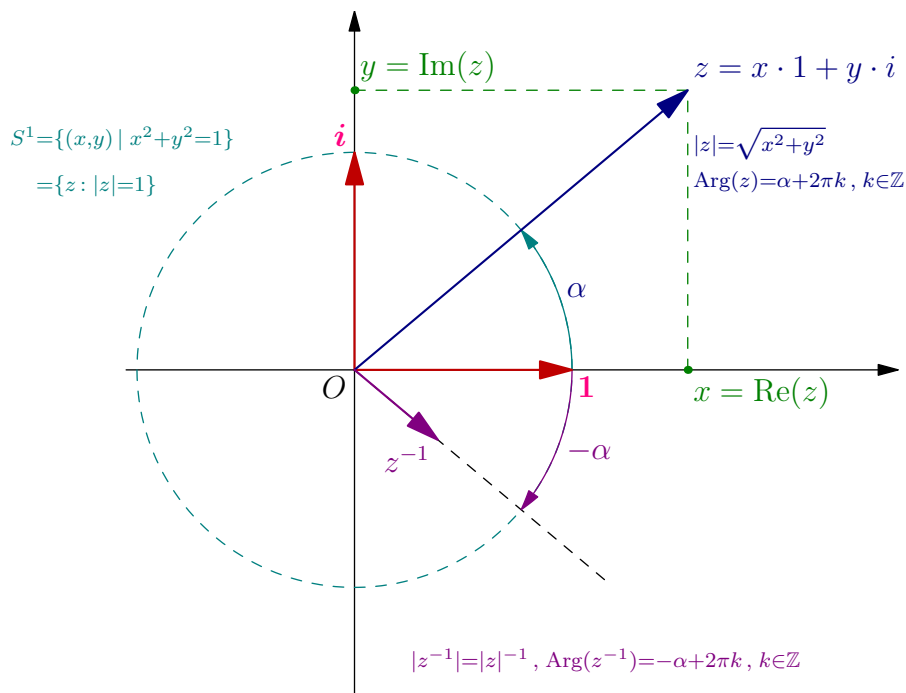


Рис. 3◊16. Комплексное число  $z = x + iy$ .

означает комплексное число  $z \in \mathbb{C}$  с координатами  $(x, y)$  относительно раз и навсегда зафиксированного ортонормального репера  $(0, \vec{1}, \vec{i})$ . Это число находится на расстоянии  $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$  от начала координат и образует ориентированный угол  $\alpha = \sphericalangle(1, z)$  с первым базисным вектором  $1$ , см. рис. 3◊16. Длина  $|z|$  называется *модулем*, а ориентированный угол  $\alpha$  — *аргументом*

<sup>3</sup>Michel Floréal Chasles (15.XI.1793 – 18.XII.1880) — выдающийся французский геометр.

числа  $z$ . Аргумент также обозначают  $\text{Arg}(z) \stackrel{\text{def}}{=} \{\alpha + 2\pi k \mid k \in \mathbb{Z}\}$ , имея при этом в виду ориентированную длину дуги единичной окружности — вещественное число, определённое с точностью до целого числа оборотов. Координаты  $x$  и  $y$  называют *действительной* и *мнимой* частями числа  $z \in \mathbb{C}$  и обозначают через  $\text{Re}(z) = x$ ,  $\text{Im}(z) = y$ .

Сложение комплексных чисел определяется как сложение радиус-векторов:  $z_1 + z_2$  есть точка, радиус вектор которой равен сумме радиус-векторов точек  $z_1$  и  $z_2$ . В координатах это описывается формулой  $(x_1 + y_1 i) + (x_2 + y_2 i) = (x_1 + x_2) + (y_1 + y_2) \cdot i$ . Произведение комплексных чисел  $z_1$  и  $z_2$  определяется как число, модуль которого равен произведению модулей, а аргумент — сумме аргументов сомножителей:

$$|z_1 z_2| \stackrel{\text{def}}{=} |z_1| \cdot |z_2|$$

$$\text{Arg}(z_1 z_2) \stackrel{\text{def}}{=} \text{Arg}(z_1) + \text{Arg}(z_2) = \{\vartheta_1 + \vartheta_2 \mid \vartheta_1 \in \text{Arg}(z_1), \vartheta_2 \in \text{Arg}(z_2)\}$$

По сложению комплексные числа образуют абелеву группу, изоморфную группе векторов евклидовой плоскости. Ненулевые комплексные числа образуют абелеву группу по умножению. Нейтральным элементом является первый базисный вектор 1. Обратным к ненулевому  $z \in \mathbb{C}$  является число с обратным модулем и противоположным аргументом:  $|z^{-1}| = |z|^{-1}$ ,  $\text{Arg}(z^{-1}) = -\text{Arg}(z)$ , см. рис. 3◊16. Чтобы убедиться в том, что  $\mathbb{C}$  поле, остаётся проверить дистрибутивность, т. е. что  $a(b + c) = ab + ac$  для всех  $a, b, c \in \mathbb{C}$ . На геометрическом языке это означает, что отображение умножения  $\lambda_a : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ ,  $z \mapsto az$ , на фиксированное число  $a \in \mathbb{C}$  аддитивно, т. е.  $\lambda_a(b + c) = \lambda_a(b) + \lambda_a(c)$ . Но это отображение — *поворотная гомотетия*, т. е. композиция поворота на угол  $\text{Arg}(a)$  вокруг точки 0 и умножения всех векторов евклидовой плоскости на вещественное число  $|a|$ . Поскольку и поворот, и гомотетия линейны, линейно и отображение  $\lambda_a$ . Мы получаем

Предложение 3.4

Комплексные числа образуют поле. □

**3.5.1. Алгебраическое представление комплексных чисел.** Порождённая первым базисным вектором координатная прямая  $\mathbb{R} \cdot 1 \subset \mathbb{C}$  составляет подполе, изоморфное полю вещественных чисел: при ограничении на эту прямую правило умножения комплексных чисел превращается в обычное правило умножения вещественных чисел<sup>1</sup>. Разложение  $z = x \cdot 1 + y \cdot i = x + yi$  вектора  $z \in \mathbb{C}$  по базису превращается в равенство в поле  $\mathbb{C}$ , если понимать в нём числа  $x, y \in \mathbb{R}$  как точки координатной прямой  $\mathbb{R} \cdot 1 \subset \mathbb{C}$ , а сложение и умножение — как сложение и умножение комплексных чисел. Из определения умножения вытекает, что второй базисный вектор  $i$  удовлетворяет соотношению  $i^2 = -1$ . Пользуясь этим соотношением и дистрибутивностью, можно описать произведение комплексных чисел  $z_1 = x_1 + iy_1$  и  $z_2 = x_2 + iy_2$  алгебраической формулой

$$z_1 z_2 = (x_1 + iy_1)(x_2 + iy_2) = (x_1 x_2 - y_1 y_2) + i(x_1 y_2 + x_2 y_1). \quad (3-17)$$

Обратное к числу  $z = x + iy$  число  $z^{-1}$  так же легко выражается через  $x$  и  $y$ :

$$z^{-1} = \frac{1}{x + iy} = \frac{x - iy}{(x + iy)(x - iy)} = \frac{x - iy}{x^2 + y^2} = \frac{x}{|z|^2} - \frac{iy}{|z|^2}, \quad (3-18)$$

откуда  $\text{Re}(z^{-1}) = \text{Re}(z)/|z|^2$  и  $\text{Im}(z^{-1}) = -\text{Im}(z)/|z|^2$ . Число  $\bar{z} \stackrel{\text{def}}{=} x - iy$  называется *комплексно сопряжённым* к числу  $z = x + iy$ . В терминах комплексного сопряжения формулу для обратного

<sup>1</sup>Т. е. в «минус на минус даёт плюс» и т. п.

числа можно записать в виде  $z^{-1} = \bar{z}/|z|^2$ . Геометрически, комплексное сопряжение  $z \mapsto \bar{z}$  представляет собою симметрию комплексной плоскости относительно вещественной оси  $OX$ . С алгебраической точки зрения сопряжение является *инволютивным автоморфизмом* поля  $\mathbb{C}$ , т. е.  $\overline{\bar{z}} = z$  и  $\overline{z_1 + z_2} = \bar{z}_1 + \bar{z}_2$ ,  $\overline{z_1 z_2} = \bar{z}_1 \bar{z}_2$  для всех  $z, z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ .

УПРАЖНЕНИЕ 3.17. Покажите, что следующие свойства автоморфизма  $\varphi : \mathbb{C} \simeq \mathbb{C}$  эквивалентны: а)  $\varphi(\mathbb{R}) \subset \mathbb{R}$  б)  $\varphi$  является линейным преобразованием двумерного векторного пространства  $\mathbb{C}$  над полем  $\mathbb{R}$  в)  $\varphi$  либо тождественен, либо является комплексным сопряжением.

**3.6. Преобразования подобия.** Отображение  $\varphi : \mathbb{A}^2 \rightarrow \mathbb{A}^2$  евклидовой аффинной плоскости в себя называется *преобразованием подобия* или просто *подобием*, если оно изменяет все длины в фиксированное число раз, т. е. когда существует такая положительная вещественная константа  $\gamma = \gamma(\varphi)$ , зависящая только от  $\varphi$  и называемая *коэффициентом подобия*  $\varphi$ , что  $|\varphi(p) - \varphi(q)| = \gamma|p - q|$  для всех точек  $p, q \in \mathbb{A}^2$ . Подобия образуют группу, которая называется *группой подобий*. Все движения являются подобиями с коэффициентом 1. Те же аргументы, что и для движений<sup>1</sup>, показывают, что подобия переводят прямые в прямые и, стало быть являются аффинными преобразованиями.

УПРАЖНЕНИЕ 3.18. Убедитесь в этом, а также в том, что подобия переводят окружности в окружности.

Подобия, сохраняющие ориентацию, называются *собственными*, а оборачивающие ориентацию — *несобственными*.

ЛЕММА 3.1

Собственные подобия сохраняют ориентированные углы, а несобственные изменяют знак ориентированных углов.

Доказательство. Беря композицию подобия  $\varphi$  с параллельным переносом, мы можем и будем считать, что оно сохраняет начало координат, т. е. является линейным преобразованием подлежащего векторного пространства. Тогда для любых двух векторов  $u, w$

$$\begin{aligned} 4(\varphi(u), \varphi(w)) &= |\varphi(u) + \varphi(w)|^2 - |\varphi(u) - \varphi(w)|^2 = \\ &= |\varphi(u + w)|^2 - |\varphi(u - w)|^2 = \gamma^2(|u + w|^2 - |u - w|^2) = 4\gamma^2(u, w), \end{aligned} \quad (3-19)$$

откуда  $\cos \angle(\varphi(u), \varphi(w)) = (\varphi(u), \varphi(w)) : (|\varphi(u)| \cdot |\varphi(w)|) = (u, w) : (|u| \cdot |w|) = \cos \angle(u, w)$ , т. е.  $\angle(\varphi(u), \varphi(w)) = \pm \angle(u, w)$ .  $\square$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3.5

Каждое собственное подобие вещественной плоскости  $\mathbb{C}$  является аффинным преобразованием комплексной аффинной прямой  $\mathbb{A}^1(\mathbb{C})$ , т. е. имеет вид  $z \mapsto az + b$  для некоторых  $a, b \in \mathbb{C}$ . Каждое несобственное подобие является полуаффинным преобразованием вида  $z \mapsto a\bar{z} + b$ . Наоборот, все такие преобразования являются подобиями. В частности, группа собственных подобий вещественной евклидовой плоскости изоморфна аффинной группе комплексной прямой.

<sup>1</sup>См. п.° 3.4 на стр. 40.

**Доказательство.** Пусть  $\varphi$  — собственное подобие. Беря композицию  $\varphi$  со сдвигом, мы можем и будем считать, что  $\varphi$  оставляет нуль на месте. Поскольку преобразование  $\varphi$  сохраняет ориентированные углы и умножает длины векторов на фиксированное положительное число  $\gamma$ , оно является поворотной гомотетией, т. е. умножением на некоторое комплексное число, что доказывает первое утверждение. Если  $\varphi$  — несобственное подобие, то композиция  $\varphi$  с отражением относительно действительной оси, т. е. преобразование  $z \mapsto \varphi(\bar{z})$  является собственным подобием и по доказанному имеет вид  $z \mapsto az + b$ . Поэтому  $\varphi(z) = a\bar{z} + b$ .  $\square$

**Следствие 3.6**

Для любых двух пар различных точек  $a \neq b$  и  $c \neq d$  имеется единственное собственное подобие переводящее  $a$  в  $c$  и  $b$  в  $d$ .

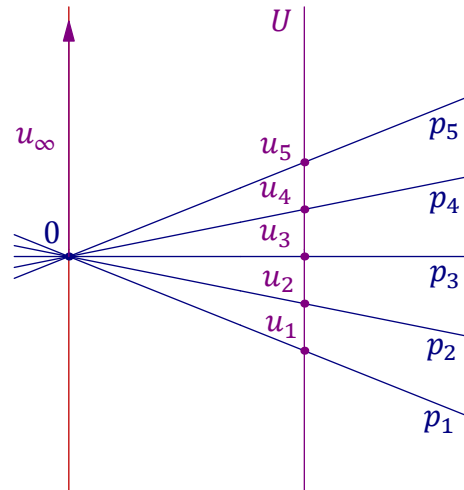
**Доказательство.** Система уравнений  $c = za + w$ ,  $d = zb + w$  имеет в поле  $\mathbb{C}$  единственное решение  $z = \frac{c-d}{a-b}$ ,  $w = \frac{ad-bc}{a-b}$ .  $\square$

**Следствие 3.7**

Всякое собственное подобие является либо сдвигом, либо поворотной гомотетией.

**Доказательство.** Аффинное преобразование  $z \mapsto az + b$  с нетождественным дифференциалом  $a \neq 1$  имеет неподвижную точку  $c = b/(1-a)$  и, стало быть, является поворотной гомотетией относительно этой точки.  $\square$

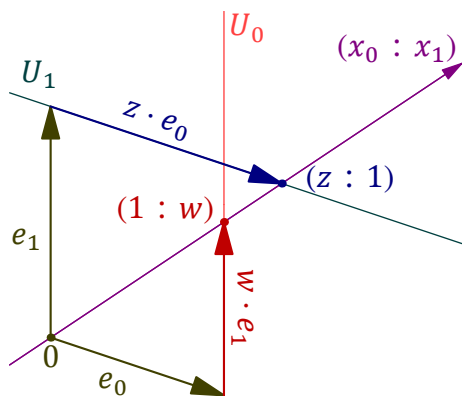
**3.7. Проективная прямая и круговые преобразования.** Рассмотрим двумерное векторное пространство  $V$  над произвольным полем  $\mathbb{k}$ . Множество одномерных векторных подпространств в  $V$  называется *проективной прямой* над полем  $\mathbb{k}$  и обозначается  $\mathbb{P}_1(\mathbb{k})$  или  $\mathbb{P}(V)$ . Таким образом, точками проективной прямой  $\mathbb{P}(V)$  являются ненулевые векторы  $v \in V$ , рассматриваемые с точностью до пропорциональности, или, что то же самое, проходящие через начальную точку  $0$  прямые  $p_v = \{tv \mid t \in \mathbb{k}\}$  на аффинной плоскости  $\mathbb{A}^2 = \mathbb{A}(V)$ . Иначе точки проективной прямой  $\mathbb{P}(V)$  можно воспринимать как *направления* на аффинной плоскости  $\mathbb{A}(V)$ . Чтобы наблюдать их в виде «обычных» точек, внутрь плоскости  $\mathbb{A}^2$  следует поместить экран — какую-нибудь не проходящую через начальную точку  $0$  аффинную прямую  $U \subset \mathbb{A}^2$ , как на рис. 3◊17, и сопоставить проходящей через  $0$  прямой  $p$  точку её пересечения  $u_p = p \cap U$  с этим экраном. Всякий такой экран  $U \subset \mathbb{A}(V)$  называют *аффинной картой* на проективной прямой  $\mathbb{P}(V)$ , а точки  $u_p = p \cap U$  называются *изображениями* точек  $p \in \mathbb{P}_1$  в аффинной карте  $U$ . В любой аффинной карте  $U \subset \mathbb{A}(V)$  изображаются все точки проективной прямой  $\mathbb{P}(V)$  за исключением одной — направления самой прямой  $U$ , т. е. одномерного векторного подпространства в  $V$ , порождённого вектором скорости прямой  $U$ . Эта единственная невидная в карте  $U$  точка обозначается  $u_\infty$  и называется *бесконечно удалённой* точкой аффинной карты  $U$ . Таким образом, как множество, проективная



**Рис. 3◊17.** Изображения  $u_i$  точек  $p_i$  проективной прямой  $\mathbb{P}(V)$  в аффинной карте  $U \subset \mathbb{A}(V)$ .

прямая  $\mathbb{P}_1 = \mathbb{A}^1 \sqcup \infty$  является дизъюнктивным объединением аффинной прямой  $\mathbb{A}^1$  и ещё одной, бесконечно удалённой точки  $\infty$ .

**3.7.1. Однородная и аффинные координаты.** Если фиксировать в векторном пространстве  $V$  какой-нибудь базис  $e_0, e_1$ , то точка проективной прямой, изображающая класс пропорциональности ненулевого вектора  $x = e_0 \cdot x_0 + e_1 \cdot x_1$ , однозначно характеризуется отношением координат  $x_0 : x_1$  вектора  $v$  в этом базисе. Это отношение называется *однородной координатой* точки  $x \in \mathbb{P}_1$ . Оно может принимать любое значение из поля  $\mathbb{k}$ , а также значение  $\infty \stackrel{\text{def}}{=} x_0 : 0$ , где  $x_0 \neq 0$ , отвечающее классу пропорциональности базисного вектора  $e_0$ . Нулевому значению однородной координаты  $0 = 0 : x_1$ , где  $x_1 \neq 0$ , отвечает класс пропорциональности базисного вектора  $e_1$ . Аффинная карта



$$U_1 \stackrel{\text{def}}{=} e_1 + \mathbb{k} \cdot e_0 = \{e_1 + z e_0 \mid z \in \mathbb{k}\},$$

которая проходит через конец вектора  $e_1$  в направлении вектора  $e_0$  и задаётся в  $\mathbb{A}^2$  уравнением  $x_1 = 1$ , называется *аффинной окрестностью нуля*. Каждая точка  $x = e_0 \cdot x_0 + e_1 \cdot x_1$  с конечной однородной координатой  $z = x_0 : x_1 \neq \infty$  видна в этой карте в виде точки  $e_1 + z \cdot e_0$ . Отношение  $z = x_0 : x_1 \in \mathbb{k}$  называется *аффинной координатой* на  $\mathbb{P}_1$  в окрестности нуля. Аффинная карта

Рис. 3◊18. Склейка аффинных карт

$$z \leftrightarrow w = 1/z.$$

$$U_0 \stackrel{\text{def}}{=} e_0 + \mathbb{k} \cdot e_1 = \{e_0 + w e_1 \mid w \in \mathbb{k}\},$$

которая проходит через конец вектора  $e_0$  в направлении вектора  $e_1$  и задаётся в  $\mathbb{A}^2$  уравнением  $x_0 = 1$ , называется *аффинной окрестностью бесконечности*. Каждая точка  $x = e_0 \cdot x_0 + e_1 \cdot x_1$  с ненулевой однородной координатой  $x_0 : x_1 \neq 0$  видна в этой карте в виде точки  $e_0 + w \cdot e_1$ , где  $w = x_1 : x_0 = 1/z \in \mathbb{k}$ . Число  $w$  называется *аффинной координатой* на  $\mathbb{P}_1$  в окрестности бесконечности. состоит из всех точек вида  $e_1 + z \cdot e_0$ . Координата  $z \in \mathbb{k}$  точки такого вида называется *аффинной координатой* в окрестности нуля. Пересечение карт  $U_0 \cap U_1$  состоит из всех  $x \in \mathbb{P}_1$  с конечными ненулевыми однородными координатами  $x_0 : x_1 = z : 1 = 1 : w$ . Аффинные координаты  $z$  и  $w$  таких точек отличны от нуля и обратны друг другу:  $w = 1/z$ , см. рис. 3◊18.

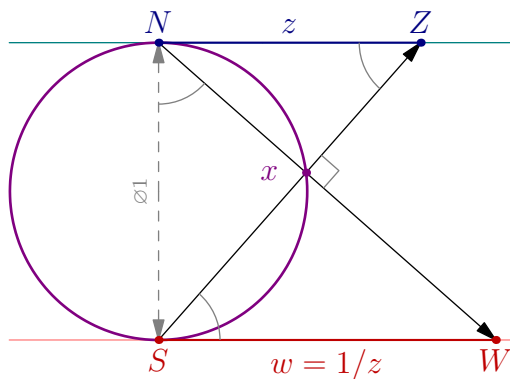


Рис. 3◊19.  $\mathbb{P}_1(\mathbb{R}) \simeq S^1$ .

Таким образом, проективную прямую  $\mathbb{P}_1$  можно воспринимать как результат склейки двух аффинных прямых  $\mathbb{A}^1$ , на которых зафиксированы аффинные координаты  $z$  и  $w$  соответственно. Склейка производится по дополнениям до начал координат и отождествляет точки с координатами  $z$  и  $w = 1/z$ .

**Пример 3.9 (окружность  $\mathbb{P}_1(\mathbb{R})$ )**

Если основное поле  $\mathbb{k} = \mathbb{R}$ , то результат описанной выше склейки можно представлять себе как окружность диаметра 1, склеенную из двух диаметрально противоположных касательных



прямых, каждая из которых проектируется на окружность из точки, диаметрально противоположной к точке своего касания, как на рис. 3◊19. В самом деле, беря точки касания за начала координат на каждой из касательных, из подобия прямоугольных треугольников  $NSW$  и  $ZNS$  на рис. 3◊19 мы заключаем, что точка  $Z$  с координатой  $z$  на верхней касательной и точка  $W$  с координатой  $w$  на нижней проектируются в одну и ту же точку окружности, если и только если  $w = 1/z$ . Такое отождествление пополненной числовой прямой  $\mathbb{P}_1(\mathbb{R}) = \mathbb{R} \sqcup \infty$  с окружностью хорошо согласуется с тем представлением о бесконечности, которое принято в математическом анализе: стремление к бесконечности координаты  $z$  на верхней числовой прямой с рис. 3◊19 означает стремление к нулю координаты  $w = 1/z$  на нижней, и маленькие  $\varepsilon$ -окрестности точки  $S$  на окружности выглядят на верхней числовой прямой в виде дополнений до больших отрезков  $[-1/\varepsilon, 1/\varepsilon]$ , которые используются как «окрестности бесконечности» в анализе.

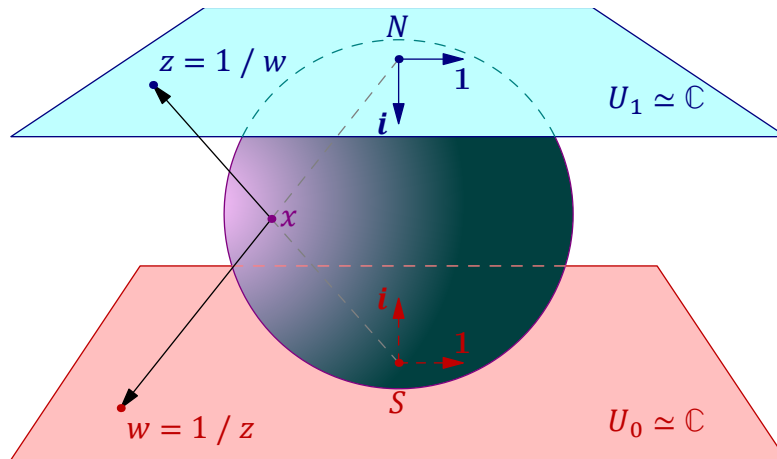


Рис. 3◊20.  $\mathbb{P}_1(\mathbb{C}) \simeq S^2$ .

Пример 3.10 (сфера Римана  $\mathbb{P}_1(\mathbb{C})$ )

При  $\mathbb{k} = \mathbb{C}$  в результате склейки двух аффинных прямых  $A^1 = \mathbb{C}$  вдоль дополнений до нуля по правилу  $z \leftrightarrow 1/z$  получится сфера, поскольку, как и в предыдущем примере, сфера диаметра 1 является результатом склейки друг с другом двух диаметрально противоположных касательных плоскостей, каждая из которых стереографически проектируется на сферу из точки, диаметрально противоположной к точке своего касания со сферой, как на рис. 3◊20. В самом деле, если за начала отсчёта в каждой из плоскостей принять точку касания, а векторы  $1, i \in \mathbb{C}$  направить так<sup>1</sup>, как на рис. 3◊20, то комплексные числа  $z$  и  $w$  из разных плоскостей проектируются в одну и ту же точку сферы, если и только если<sup>2</sup>  $\text{Arg } z = -\text{Arg } w$  и  $|z| = 1/|w|$ , т. е. когда  $w = 1/z$  в  $\mathbb{C}$ . По этой причине комплексную проективную прямую  $\mathbb{P}_1(\mathbb{C})$  часто называют *сферой Римана*, а также *полной комплексной плоскостью*.

**3.7.2. Дробно линейные преобразования.** Группа  $GL(V)$  линейных автоморфизмов пространства  $V$  переводит одномерные векторные подпространства в одномерные подпространства и таким образом действует на проективной прямой  $\mathbb{P}_1 = \mathbb{P}(V)$ . В терминах однородных

<sup>1</sup>Обратите внимание, что ориентации плоскостей при этом согласованы в том смысле, что одну из них можно непрерывным перекатыванием по поверхности сферы совместить с другой так, что ориентации будут одинаковыми.

<sup>2</sup>Первое очевидно из рис. 3◊20, второе — из рассмотрения сечения рис. 3◊20 плоскостью  $NxS$ , которое было представлено на рис. 3◊19 выше.

координат, линейное отображение  $\varphi : V \rightarrow V$ , действующее на базис  $e_0, e_1$  по правилу<sup>1</sup>

$$\varphi : (e_0, e_1) \mapsto (e_0, e_1) \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

переводит точку  $x \in \mathbb{P}_1$  с однородными координатами  $x_0 : x_1$  в точку

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ax_0 + bx_1 \\ cx_0 + dx_1 \end{pmatrix}.$$

В терминах аффинной координаты  $z = x_0 / x_1$  в окрестности нуля, это действие описывается формулой  $z \mapsto (az + b) / (cz + d)$  и называется *дробно линейным преобразованием*. Два линейных отображения  $\varphi, \psi : V \rightarrow V$  задают одно и то же дробно линейное преобразование, если и только если они пропорциональны, т. е. различаются на гомотетию:  $\psi = \gamma\varphi$ , где  $\gamma \in \mathbb{k} \setminus 0$ . Согласно [упр. 2.1](#) любые три различные точки на  $\mathbb{P}_1$  переводятся в любые три различные точки единственным дробно линейным преобразованием. Например, дробно линейное преобразование, переводящее три заданных различных точки  $p, q, r$  в  $\infty, 0, 1$  имеет вид

$$z \mapsto \frac{z - q}{z - p} : \frac{r - q}{r - p}.$$

Образ точки  $s$  при таком преобразовании равен *двойному отношению*<sup>2</sup>

$$\frac{s - q}{s - p} : \frac{r - q}{r - p} = \frac{r - p}{q - r} : \frac{s - p}{q - s} = [p, q, r, s]. \quad (3-20)$$

**Упражнение 3.19.** Не опираясь на [предл. 2.4](#) на стр. 26, докажите, что две упорядоченных четвёрки точек на  $\mathbb{P}_1$  тогда и только тогда переводятся одна в другую дробно линейным преобразованием, когда их двойные отношения одинаковы.

**3.7.3. Группа Мёбиуса.** Дробно линейные преобразования комплексной проективной прямой  $\mathbb{P}_1(\mathbb{C})$ , а также преобразования вида  $z \mapsto (a\bar{z} + b) / (c\bar{z} + d)$ , которые являются композициями дробно линейных преобразований с симметрией  $z \mapsto \bar{z}$  относительно действительной оси, называются, соответственно, *собственными* и *несобственными мёбиусовыми преобразованиями*. По [упр. 3.19](#) каждое собственное мёбиусово преобразование сохраняет двойные отношения четвёрок различных точек

$$[z_1, z_2, z_3, z_4] = \frac{z_1 - z_3}{z_3 - z_2} : \frac{z_1 - z_4}{z_4 - z_2}$$

и однозначно определяется своим действием на любые три различные точки. Несобственные мёбиусовы преобразования комплексно сопрягают двойные отношения.

**Упражнение 3.20.** Покажите, что четыре различных комплексных числа лежат на одной прямой или окружности, если и только если их двойное отношение вещественно.

Поэтому мёбиусовы преобразования переводят прямые и окружности в прямые или окружности.

<sup>1</sup>Т. е. переводящее векторы  $e_0$  и  $e_1$ , соответственно, в векторы  $e_0 \cdot a + e_1 \cdot c$  и  $e_0 \cdot b + e_1 \cdot d$ . Разъяснение матричных обозначений см. в [н° 2.4](#) на стр. 28.

<sup>2</sup>См. [н° 1.6.2](#) на стр. 22.

**3.7.4. Иверсии.** Для произвольной окружности  $C \subset \mathbb{C}$  радиуса  $r$  с центром в точке  $c \in \mathbb{C}$  мёбиусово преобразование  $\sigma_C: \mathbb{P}_1(\mathbb{C}) \rightarrow \mathbb{P}_1(\mathbb{C})$ , действующее по правилу

$$\sigma_C: z \mapsto c + \frac{r^2}{z - c} = c + \frac{r^2}{|z - c|^2} \cdot (z - c), \quad (3-21)$$

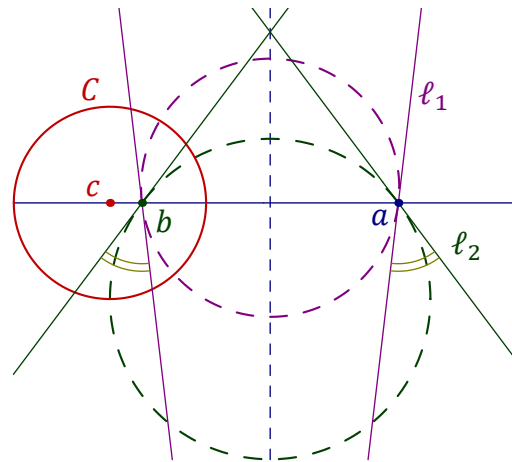
называется *инверсией* относительно окружности  $C$ . Инверсия  $\sigma_C$  оставляет на месте все точки окружности  $C$ , переводит друг в друга центр  $c$  и  $\infty$ , а каждую конечную точку  $z \neq c$  отображает в такую точку  $z'$  луча  $]c, z)$ , что  $|z' - c| \cdot |z - c| = r^2$ . Например, инверсия  $\sigma_S$  относительно единичной окружности с центром в нуле  $S = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$  действует по правилу  $z \mapsto 1/\bar{z}$ , сохраняя аргументы и оборачивая модули. Будучи мёбиусовым преобразованием, любая инверсия переводит прямые и окружности в прямые или окружности.

**УПРАЖНЕНИЕ 3.21.** Убедитесь, что каждая проходящая через  $c$  прямая преобразуется инверсией в себя, не проходящая через  $c$  прямая  $\ell$  — в проходящую через  $c$  окружность с центром на опущенном из  $c$  перпендикуляре к  $\ell$ , а не проходящая через  $c$  окружность  $S$  — в окружность с центром на линии центров  $S$  и  $C$ .

**Предложение 3.6**

Каждая инверсия  $\sigma_C$  сохраняет абсолютные величины углов<sup>1</sup> между прямыми и окружностями, но меняет ориентацию этих углов на противоположную, см. рис. 3◊21.

**Доказательство.** Так как через любые три различные неколлинеарные точки проходит единственная окружность, каждая окружность, проходящая через инверсные относительно заданной окружности  $C$  точки  $z$  и  $z' = \sigma_C(z)$  переводится инверсией  $\sigma_C$  в себя. Для любой проходящей через точку  $z$  прямой  $\ell$  существует единственная проходящая через  $z$  и  $z'$  окружность, касающаяся прямой  $\ell$  в точке  $z$ . Угол между двумя такими окружностями, касающимися прямых  $\ell_1$  и  $\ell_2$  в точке  $z$ , равен углу, под которым эти же окружности пересекаются в точке  $z'$ , причём эти углы имеют противоположную ориентацию, см. рис. 3◊21. Это доказывает предложение для углов с вершиной вне окружности  $C$ . Для углов с вершиной на  $C$  предложение вытекает из того, что инверсия  $\sigma_C$  является композицией инверсии относительно окружности вдвое меньшего радиуса с тем же центром  $c$  и гомотетии с центром в  $c$  и коэффициентом 4. □



**Рис. 3◊21.** Инверсия сохраняет абсолютные величины углов и обращает их ориентацию.

**Следствие 3.8**

Точки  $a$  и  $b$  тогда и только тогда инверсны относительно окружности  $C$ , когда все проходящие через  $a$  и  $b$  окружности, а также прямая  $(ab)$  перпендикулярны окружности  $C$ , см. рис. 3◊22.

<sup>1</sup>Под углом между пересекающимися окружностями (соотв. прямой и окружностью) понимается угол между их касательными (соотв. между прямой и касательной к окружности) в точке их пересечения.

Доказательство. Если точки  $a$  и  $b$  инверсны, то любая проходящая через них окружность  $S$  переводится инверсией  $\sigma_C$  в себя, поскольку через точки  $a, b$  и  $S \cap C$  проходит единственная окружность. Поскольку инверсия  $\sigma_C$  меняет ориентацию окружности  $S$  на противоположную, угол между окружностями  $S$  и  $C$  в каждой из точек пересечения  $C \cap S$  равен смежному с ним углу, т. е. является прямым. Наоборот, пусть прямая  $(ab)$  и какая-нибудь проходящая через точки  $a$  и  $b$  окружность  $S$  перпендикулярны окружности  $C$ . Первое означает, что точки  $a, b, c$  коллинеарны, а второе — что степень<sup>1</sup> центра  $c$  окружности  $C$  относительно этой окружности  $S$  с одной стороны равна квадрату радиуса  $r^2$  окружности  $C$ , а с другой стороны — произведению  $|c, a| \cdot |c, b|$ , откуда  $|c, a| \cdot |c, b| = r^2$ , см. рис. 3◊23.  $\square$

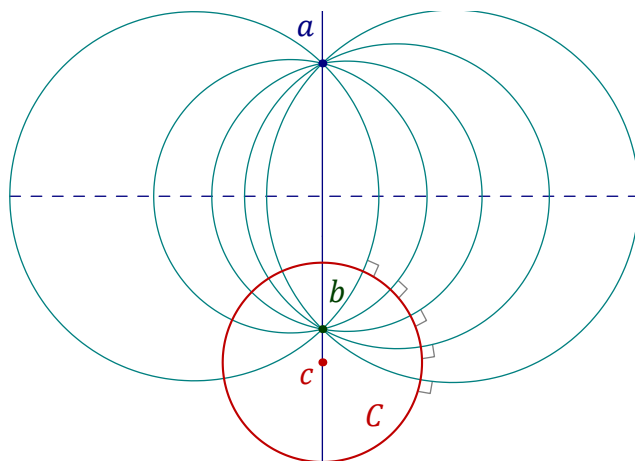


Рис. 3◊22. Отражение относительно окружности.

УПРАЖНЕНИЕ 3.22 (ТЕОРЕМА О СТЕПЕНИ ТОЧКИ ОТНОСИТЕЛЬНО ОКРУЖНОСТИ). Покажите, что для любой проходящей через точку  $c$  прямой, пересекающей окружность радиуса  $\varrho$  с центром в точке  $p$  в точках<sup>2</sup>  $a$  и  $b$ , как на рис. 3◊23, выполняется равенство  $|c, a| \cdot |c, b| = |c, p|^2 - \varrho^2$ .

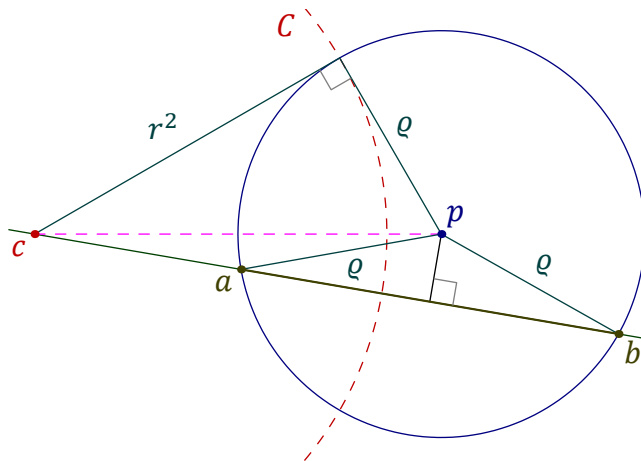


Рис. 3◊23. Степень  $|c, p|^2 - r^2$  точки  $c$  относительно окружности радиуса  $\varrho$  с центром в точке  $p$  равна  $r^2 = |c, a| \cdot |c, b|$ .

<sup>1</sup>Напомним, что степенью точки  $c$  относительно окружности радиуса  $\varrho$  с центром в точке  $p$  называется разность  $|c, p|^2 - r^2$ , см. рис. 3◊23, а также н° 6.5.2 на стр. 101 ниже.

<sup>2</sup>Если прямая касается окружности в точке  $t$ , то мы полагаем  $a = b = t$ .

Замечание 3.1. Предыдущее сл. 3.8 оправдывает другое общепринятое название для инверсии  $\sigma_C$  — «отражение относительно окружности  $C$ », ибо точки  $a$  и  $b$  симметричны относительно прямой  $\ell$ , если и только если все проходящие через  $a$  и  $b$  окружности перпендикулярны  $\ell$ , ср. рис. 3◊22 и рис. 3◊24.

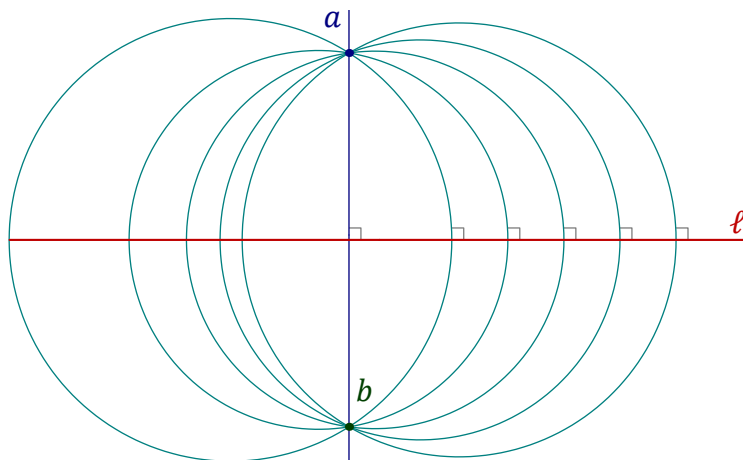


Рис. 3◊24. Отражение относительно прямой.

Упражнение 3.23. Пусть прямая или окружность  $D$  инверсна прямой или окружности  $E$  относительно окружности  $C$ . Покажите, что отражения  $\sigma_C$ ,  $\sigma_D$  и  $\sigma_E$  связаны соотношением

$$\sigma_C \sigma_D \sigma_C = \sigma_E.$$

ТЕОРЕМА 3.2 (ГРУППА КРУГОВЫХ ПРЕОБРАЗОВАНИЙ)

Группа мёбиусовых преобразований комплексной проективной прямой  $\mathbb{P}_1(\mathbb{C})$  порождается<sup>1</sup> отражениями относительно прямых и окружностей. При этом собственные мёбиусовы преобразования сохраняют углы и ориентацию, а несобственные сохраняют абсолютные величины углов и обращают ориентацию.

Доказательство. Формула (3-21) показывает, что инверсии являются несобственными мёбиусовыми преобразованиями.

Упражнение 3.24. Убедитесь, что отражения относительно прямых также являются несобственными мёбиусовыми преобразованиями.

Поэтому группа, порождённая отражениями относительно прямых и окружностей, лежит в мёбиусовой группе. С другой стороны, собственные дробно линейные преобразования суть композиции преобразований вида  $z \mapsto 1/z$ ,  $z \mapsto az$  и  $z \mapsto a + z$ . Первое из них является композицией инверсии с отражением, последнее — композицией двух отражений относительно параллельных прямых. Поворотная гомотетия  $z \mapsto az$  есть композиция поворота, раскладывающегося в композицию двух отражений, и гомотетии, которая является композицией двух инверсий относительно концентрических окружностей.

Упражнение 3.25. Каков радиус окружности, инверсия относительно которой в композиции с последующей инверсией относительно окружности единичного радиуса с тем же центром является гомотетией с коэффициентом  $\gamma$  относительно этого центра?

<sup>1</sup>Т. е. любой элемент этой группы является композицией конечного числа отражений относительно окружностей и прямых

Это доказывает первое утверждение. Второе утверждение следует из того, что собственное мёбиусово преобразование является композицией поворотов, гомотетий, параллельных переносов и преобразования  $z \mapsto 1/z$ , и все эти преобразования сохраняют углы и ориентацию, а несобственное мёбиусово преобразование является композицией отражения относительно действительной оси с последующим собственным мёбиусовым преобразованием.  $\square$

Упражнение 3.26. Напишите какое-нибудь собственное мёбиусово преобразование, переводящее единичный круг  $|z| \leq 1$  в верхнюю полуплоскость  $\operatorname{Re}(z) \geq 0$ .

### Ответы и указания к некоторым упражнениям

Упр. 3.2.  $\frac{(\lambda a, b)}{(\lambda a, \lambda a)} \cdot \lambda a = \frac{(a, b)}{(a, a)} \cdot a$ .

Упр. 3.3. Если заданная точка  $p$  не лежит на заданной прямой  $\ell$ , утверждение вытекает из сл. 3.1.

Если  $p \in \ell$ , выберите  $p$  за начало отсчёта, обозначьте через  $e_1$  вектор скорости прямой  $\ell$ , возьмите любой вектор  $b$ , не пропорциональный  $\ell$  и положите  $e_2 = b_{e_1^\perp}$ . Тогда  $e_2 \neq 0$  и перпендикулярен  $e_1$ . Поэтому прямая  $p + te_2$  перпендикулярна  $\ell$ . Произвольный вектор  $w = xe_1 + ye_2$  перпендикулярен  $e_1$ , если и только если  $x = 0$ . Поэтому такая прямая единственна.

Упр. 3.5. Рассмотрим любой ортонормальный базис  $e, e^\perp$ . Если  $f = xe + ye^\perp$  образует вместе с  $e$  ортонормальный базис, то  $(e, f) = 0$  влечёт  $x = 0$ , после чего  $(f, f) = 1$  влечёт  $y^2 = 1$ , т. е.  $f = \pm e^\perp$ .

Упр. 3.6. Воспользуйтесь тем, что объединение биссектрис это ГМТ, равноудалённых от двух данных прямых.

Упр. 3.7. Неравенство Коши – Буняковского – Шварца равносильно неравенству

$$(u, v)^2 - (u, u) \cdot (v, v) \geq 0,$$

в левой части которого стоит определитель Грама, по предл. 3.3 равный квадрату отношения площадей  $s(u, w)/s(e_1, e_2)$ , положительному, когда  $u$  и  $w$  не пропорциональны, и нулевому — когда пропорциональны.

Упр. 3.8.  $\det^2(a, b) = \det^2(a, b_a + b_{a^\perp}) = \det^2(a, b_{a^\perp}) = (a, a) \cdot (b_{a^\perp}, b_{a^\perp})$ .

Упр. 3.9. Геометрическое решение: на рис. 3◊7 на стр. 38 при повороте на  $90^\circ$  против ЧС вектор  $f$  перейдет в  $f^\perp$ ,  $e \rightarrow e^\perp$ ,  $a e^\perp \rightarrow -e$ , т. е. разложение  $f = e \cdot \cos \angle(e, f) + e^\perp \cdot \sin \angle(e, f)$  повернётся в разложение  $f^\perp = e^\perp \cdot \cos \angle(e, f) - e \cdot \sin \angle(e, f)$ . Алгебраическая проверка: вычислите  $\det(f, *)$  и  $(f, *)$  от  $-e \cdot \sin \angle(e, f) + e^\perp \cdot \cos \angle(e, f)$ .

Упр. 3.14. Условие задачи означает, что элементы матрицы  $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$  удовлетворяют уравнениям  $a^2 + c^2 = b^2 + d^2 = 1$  и  $ab + cd = 0$ . Кроме того, если столбцы матрицы образуют положительный ортонормальный базис, то  $ad - bc = 1$ , а если отрицательный, — то  $ad - bc = -1$ . Из первых двух уравнений вытекает, что можно положить  $a = \cos \vartheta$ ,  $c = \sin \vartheta$ ,  $b = \cos \psi$ ,  $d = \sin \psi$ . Из второго уравнения  $\cos(\vartheta - \psi) = 0$ , и в положительном случае  $\sin(\psi - \vartheta) = 1$ , а в отрицательном —  $\sin(\vartheta - \psi) = 1$ , откуда  $\psi = \vartheta + \pi/2$  и  $\psi = \vartheta - \pi/2$  соответственно.

Упр. 3.15. Ответ:  $\frac{|u|}{2} \cdot (1, \operatorname{ctg}(\vartheta/2))$ .

Упр. 3.16. Подействуйте композицией на аффинный репер  $(O, v, n)$ , где  $O \in \ell_1$ , а  $v, n \in V$  — единичные векторы скорости и нормали (одинаковые для обеих прямых).

Упр. 3.17. Импликации  $(в) \Rightarrow (б) \Rightarrow (а)$  очевидны. В н° 2.5.1 на стр. 30 мы видели, что если отображение  $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  перестановочно со сложением и умножением, то оно тождественно. Поэтому  $(а) \Leftrightarrow (б)$ . Так как соотношение  $\varphi(i)^2 = \varphi(i^2) = \varphi(-1) = -1$  влечёт  $\varphi(i) = \pm i$ , из линейности  $\varphi$  над  $\mathbb{R}$  вытекает, что  $\varphi(x + yi) = x\varphi(1) + y\varphi(i) = x \pm iy$ , т. е.  $(б) \Rightarrow (в)$ .

Упр. 3.19. Пусть  $[p_1, p_2, p_3, p_4] = [q_1, q_2, q_3, q_4]$  и дробно линейные автоморфизмы

$$\varphi_p : \mathbb{P}_1 \xrightarrow{\cong} \mathbb{P}_1 \quad \text{и} \quad \varphi_q : \mathbb{P}_1 \xrightarrow{\cong} \mathbb{P}_1$$

таковы, что прообразами точек  $\infty, 0, 1$  являются, соответственно,  $p_1, p_2, p_3$  и  $q_1, q_2, q_3$ . Тогда  $\varphi_p(p_4) = \varphi_q(q_4)$  и  $\varphi_q^{-1} \circ \varphi_p$  переводит  $p_1, p_2, p_3, p_4$  в  $q_1, q_2, q_3, q_4$ . Наоборот, если  $\varphi_p : \mathbb{P}_1 \xrightarrow{\cong}$

$\mathbb{P}_1$  переводит  $p_1, p_2, p_3$  в  $\infty, 0, 1$ , а  $\varphi_{qp}$  переводит  $p_1, p_2, p_3, p_4$  в  $q_1, q_2, q_3, q_4$ , то  $\varphi_p \circ \varphi_{qp}^{-1}$  переводит  $q_1, q_2, q_3, q_4$ , соответственно, в  $\infty, 0, 1, [p_1, p_2, p_3, p_4]$ , откуда

$$[p_1, p_2, p_3, p_4] = [q_1, q_2, q_3, q_4].$$

Упр. 3.20. Если аргумент  $\text{Arg}[z_1, z_2, z_3, z_4] = \angle z_2 z_3 z_1 - \angle z_2 z_4 z_1$  равен нулю или  $\pi$ , то ориентированные углы  $z_2 z_3 z_1$  и  $z_2 z_4 z_1$  либо нулевые и/или развёрнутые, либо опираются на одну и ту же или на дополнительные дуги одной окружности, см. прим. 3.4 на стр. 39.

Упр. 3.21. Первое следует из определения, второе и третье — из того, что образ ограничен, и значит, не может быть прямой.

Упр. 3.22. Если обозначить через  $h$  и  $\ell$  расстояния от точек  $p$  и  $c$  до середины хорды  $[a, b]$ , а через  $\delta$  — половину длины этой хорды, то

$$|c, p|^2 - \varrho^2 = |c, p|^2 - h^2 - \delta^2 = \ell^2 - \delta^2 = (\ell - \delta)(\ell + \delta) = |c, a| \cdot |c, b|$$

(ср. с предл. 6.5 на стр. 101 и рис. 6◊3 там же).

Упр. 3.23. Соотношение означает, что любые две зеркальные относительно  $D$  точки  $a, b$  переводятся инверсией  $\sigma_C$  в точки, зеркальные относительно  $E$ . Это так, поскольку инверсия относительно  $C$  переводит проходящие через  $a$  и  $b$  окружности и прямую в прямую и окружности, проходящие через  $\sigma_C(a)$  и  $\sigma_C(b)$ , сохраняя все углы, и если первые были перпендикулярны к  $D$ , то вторые будут перпендикулярны к  $E$ .

Упр. 3.24. Отражение относительно проходящей через точку  $a \in \mathbb{C}$  прямой с вектором скорости  $v \in \mathbb{C}$  действует по формуле  $z \mapsto a + (\overline{z - a}) \cdot v / \bar{v}$ .

Упр. 3.25. Ответ:  $\sqrt{1/\gamma}$ .

Упр. 3.26. Годится любое дробно линейное преобразование, переводящее какие-либо три упорядоченные против ЧС точки единичной окружности в точки  $\infty, 0$  и  $1$  соответственно. Например,  $z \mapsto \frac{z-i}{z-1} : \frac{1+i}{2}$ , где три точки суть  $1, i$  и  $-1$ .