

§10. Проективное пространство

10.1. Проективное пространство. С $(n + 1)$ -мерным векторным пространством V над произвольным полем \mathbb{k} помимо $(n + 1)$ -мерного аффинного пространства $\mathbb{A}^{n+1} = \mathbb{A}(V)$ связано n -мерное *проективное пространство* $\mathbb{P}_n = \mathbb{P}(V)$, точками которого по определению являются одномерные векторные подпространства в V или, что то же самое, проходящие через начало координат аффинные прямые в $\mathbb{A}(V)$. Чтобы наблюдать их как «обычные точки», внутрь $\mathbb{A}(V)$ следует поместить экран — не содержащую начала координат аффинную гиперплоскость $U_\xi \subset \mathbb{A}(V)$, задаваемую неоднородным линейным уравнением $\xi(x) = 1$, где $\xi \in V^* \setminus 0$ это ненулевая линейная форма на V (см. рис. 10◊1).

УПРАЖНЕНИЕ 10.1. Убедитесь, что сопоставление

$$\xi \mapsto U_\xi$$

задаёт биекцию между ненулевыми ковекторами $\xi \in V^*$ и не проходящими через начало координат аффинными гиперплоскостями в $\mathbb{A}(V)$.

Такие экраны U_ξ называются *аффинными картами* на $\mathbb{P}(V)$. В карте U_ξ видны все одномерные подпространства, порождённые векторами $v \in V$ с $\xi(v) \neq 0$. Дополнение $\mathbb{P}_n \setminus U_\xi$ состоит из одномерных подпространств, лежащих в n -мерном векторном подпространстве $\text{Ann } \xi \subset V$ параллельном экрану U_ξ . Таким образом, невидимые в карте U_ξ точки n -мерного проективного пространства $\mathbb{P}_n = \mathbb{P}(V)$ образуют $(n - 1)$ -мерное проективное пространство $\mathbb{P}_{n-1} = \mathbb{P}(\text{Ann } \xi)$. Оно называется *бесконечно удалённой гиперплоскостью* карты U_ξ . Точки $\mathbb{P}(\text{Ann } \xi)$ можно воспринимать как *направления* в аффинной карте U_ξ .

Из сказанного вытекает, что n -мерное проективное пространство \mathbb{P}_n разбивается в дизъюнктное объединение аффинных пространств всех размерностей от 0 до n :

$$\mathbb{P}_n = U_\xi \sqcup \mathbb{P}(\text{Ann } \xi) = \mathbb{A}^n \sqcup \mathbb{P}_{n-1} = \mathbb{A}^n \sqcup \mathbb{A}^{n-1} \sqcup \mathbb{P}_{n-2} = \dots = \mathbb{A}^n \sqcup \mathbb{A}^{n-1} \sqcup \dots \sqcup \mathbb{A}^0,$$

где $\mathbb{A}^0 = \mathbb{P}_0$ это одна точка.

УПРАЖНЕНИЕ 10.2. Какое соотношение на q получится, если независимо подсчитать количества точек, из которых состоят левая и правая части этого разбиения над конечным полем из q элементов?

10.1.1. Глобальные однородные координаты. Зафиксируем в V координаты x_0, x_1, \dots, x_n относительно какого-нибудь базиса e_0, e_1, \dots, e_n . Два ненулевых вектора

$$v = (x_0, x_1, \dots, x_n) \quad \text{и} \quad w = (y_0, y_1, \dots, y_n)$$

задают одну и ту же точку $p \in \mathbb{P}_n$, если и только если их координаты пропорциональны. Последнее равносильно равенству отношений¹ $x_\mu : x_\nu = y_\mu : y_\nu$ для всех $0 \leq \mu \neq \nu \leq n$.

¹При этом равенства вида $0 : x = 0 : y$ и $x : 0 = y : 0$, в которых x и y либо одновременно отличны от нуля, либо одновременно нулевые, тоже допускаются и считаются истинными.

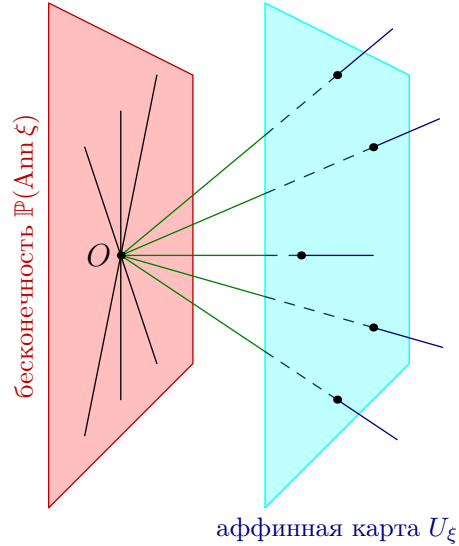


Рис. 10◊1. Проективный мир.

Иначе говоря, с точкой $p \in \mathbb{P}_n$ взаимно однозначно связаны не координаты ненулевого вектора, задающего эту точку, а только отношения $(x_0 : x_1 : \dots : x_n)$ между ними. Эти отношения называются *однородными координатами* точки p в базисе e_0, e_1, \dots, e_n .

10.1.2. Локальные аффинные координаты. Рассмотрим на $\mathbb{P}_n = \mathbb{P}(V)$ аффинную карту $U_\xi = \{(x_0, x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{A}(V) \mid \xi(x) = 1\}$, отвечающую какому-нибудь ненулевому ковектору $\xi \in V^*$. Любые n ковекторов $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n \in V^*$, таких что $\xi, \xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$ образуют базис в V^* , задают внутри карты U_ξ *локальные аффинные координаты*. А именно, пусть векторы $e_0, e_1, \dots, e_m \in V$ составляют двойственный к $\xi, \xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$ базис пространства V . За начало отсчёта аффинной координатной системы в карте U_ξ принимается точка $e_0 \in U_\xi$, а в качестве базиса векторного пространства $\text{Ann } \xi$, с которым ассоциировано аффинное пространство U_ξ , берутся векторы e_1, e_2, \dots, e_n . Для вычисления локальных аффинных координат относительно такого репера у точки $p \in \mathbb{P}_n$ с однородными координатами $(x_0 : x_1 : \dots : x_n)$ следует выбрать в одномерном подпространстве, отвечающем точке p , базисный вектор $v = p / \xi(p) \in U_\xi$ с $\xi(v) = 1$, и вычислить значения n линейных форм ξ_i на этом векторе. Отметим, что получающиеся таким образом значения локальных аффинных координат $x_i(p) = \xi_i(v) = \xi_i(p) / \xi(p)$, $1 \leq i \leq n$, зависят от однородных координат точки p не линейно, а дробно линейно.

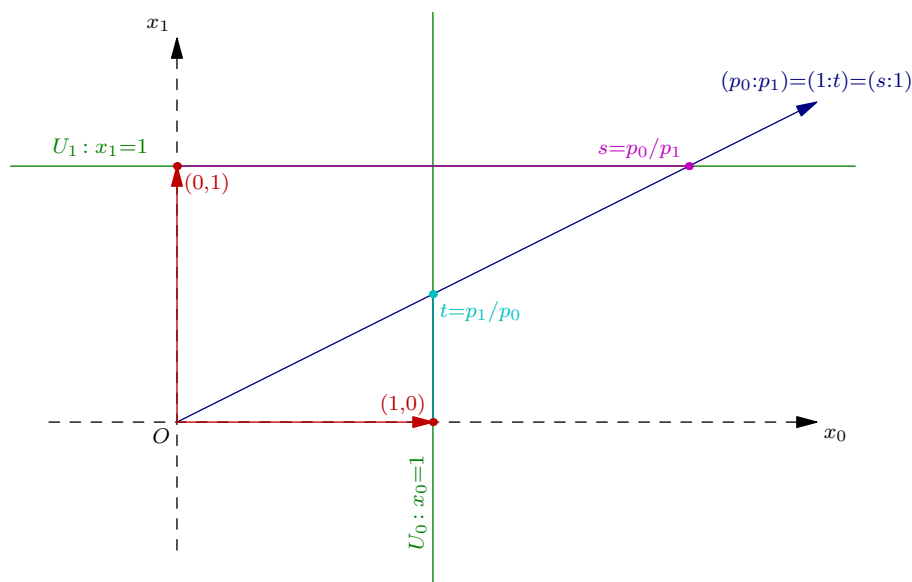


Рис. 10◊2. Стандартные карты на \mathbb{P}_1 .

ПРИМЕР 10.1 (ПРОЕКТИВНАЯ ПРЯМАЯ, СР. С № 3.7 НА СТР. 47)

Как мы видели в н° 3.7 на стр. 47, проективная прямая $\mathbb{P}_1 = \mathbb{P}_1(\mathbb{k}) = \mathbb{P}(\mathbb{k}^2)$ покрывается двумя аффинными картами $U_0 = U_{x_0}$ и $U_1 = U_{x_1}$, которые представляют собою аффинные прямые с уравнениями $x_0 = 1$ и $x_1 = 1$, см. рис. 10◊2. Карта U_0 покрывает все точки \mathbb{P}_1 кроме вертикальной координатной оси $(0 : 1)$, единственной бесконечно удалённой точки для карты U_0 . Точка $(x_0 : x_1)$ с $x_0 \neq 0$ видна в карте U_1 как $(1 : \frac{x_1}{x_0})$ и функция $w = x_1|_{U_0} = x_1/x_0$ может использоваться в качестве локальной аффинной координаты в этой карте. Карта U_1 покрывает все точки $(x_0 : x_1) = (\frac{x_0}{x_1} : 1)$ с $x_1 \neq 0$, и функция $w = x_0|_{U_1} = x_0/x_1$ годится в качестве локальной координаты в U_1 . Единственной бесконечно удалённой точкой для карты U_1 является горизонтальная координатная ось $(1 : 0)$. Координаты z и w одной и той же точки $(x_0 : x_1) \in \mathbb{P}_1$,

видимой сразу в обеих картах, связаны соотношением $z = 1/w$.

Упражнение 10.3. Убедитесь в этом.

Иначе говоря, проективная прямая $\mathbb{P}_1(\mathbb{k})$ является результатом склейки двух аффинных прямых $\mathbb{A}^1 \simeq \mathbb{k}$ с координатами z и w вдоль подмножеств $z \neq 0$ и $w \neq 0$ путём отождествления точки с координатой z на одной прямой и точки с координатой $w = 1/z$ на другой для всех $z, w \neq 0$. В н° 3.7 на стр. 47 мы видели, что над полями $\mathbb{k} = \mathbb{R}$ и $\mathbb{k} = \mathbb{C}$ результатами такой склейки являются, соответственно окружность и сфера (см. рис. 3◊19 на стр. 48 и рис. 3◊20 на стр. 49), т. к. окружность (соотв. сфера) диаметра 1 точно также склеиваются из двух касательных прямых \mathbb{R} (соотв. плоскостей \mathbb{C}), проведённых в диаметрально противоположных точках и проектирующихся на окружность (соотв. сферу) из точки, диаметрально противоположной к точке касания.

Пример 10.2 (вещественная проективная плоскость $\mathbb{P}_2(\mathbb{R}) = \mathbb{P}(\mathbb{R}^3)$)

Как топологическое пространство, вещественная проективная плоскость допускает следующее наглядное описание. Каждая проходящая через начало координат прямая в \mathbb{R}^3 пересекает единичную замкнутую полусферу $x_0^2 + x_1^2 + x_2^2 = 1, x_0 \geq 0$. При этом любая не лежащая в плоскости $x_0 = 0$ прямая пересекает полусферу ровно в одной, внутренней точке, а каждая прямая из плоскости $x_0 = 0$ пересекает полусферу в двух диаметрально противоположных точках границы. Таким образом, топологическое пространство $\mathbb{P}_2(\mathbb{R})$ гомеоморфно¹ полусфере, у которой склеены диаметрально противоположные точки границы. Поскольку полусфера гомеоморфна квадрату, то же пространство получится при склейке противоположных сторон квадрата с обращением их ориентации, как на рис. 10◊3.

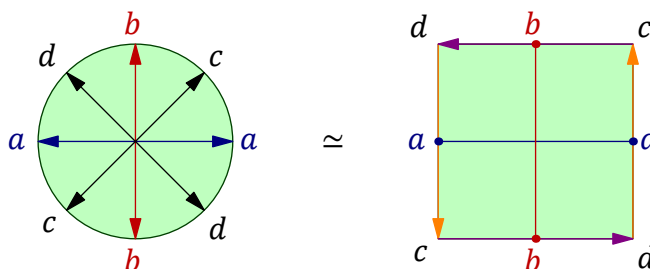


Рис. 10◊3. $\mathbb{P}_2(\mathbb{R})$ это квадрат со склеенными противоположными точками границы.

Результат такой склейки иначе можно описать как ленту Мёбиуса, к граничной окружности которой приклеен — по своей граничной окружности — диск, см. рис. 10◊4.

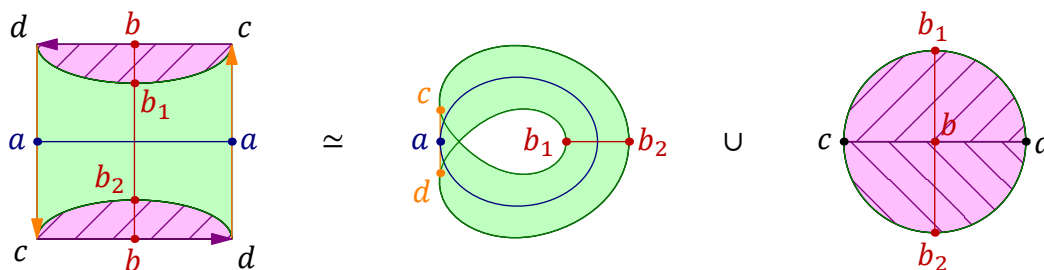


Рис. 10◊4. $\mathbb{P}_2(\mathbb{R})$ это лента Мёбиуса с заклеенной диском границей.

¹Биективное отображение между топологическими пространствами называется гомеоморфизмом, если и оно, и обратное к нему отображения оба непрерывны.

Обратите внимание, что красный вертикальный и синий горизонтальный отрезки квадрата превращаются при склейке в две петли¹ на $\mathbb{P}_2(\mathbb{R})$, которые пересекаются по одной точке, причём при малых шевелениях этих петель они по-прежнему будут пересекаться в одной точке. Это означает, что ни одну из них нельзя стянуть в точку непрерывной деформацией внутри $\mathbb{P}_2(\mathbb{R})$.

УПРАЖНЕНИЕ 10.4. Убедитесь, что устойчивое к малым шевелениям количество точек пересечения непрерывно стягиваемой в точку петли с любой другой петлёй чётно.

При этом, если петлю a , т. е. экватор ленты Мёбиуса, пройти в одном направлении дважды, то возникающая таким образом «удвоенная петля» непрерывно деформируется в границу ленты Мёбиуса, а значит, может быть стянута внутри $\mathbb{P}_2(\mathbb{R})$ в точку по приклеенному к границе ленты Мёбиуса диску. Таким образом, на $\mathbb{P}_2(\mathbb{R})$ есть нестягиваемая петля, двойной обход которой стягиваем.

ПРИМЕР 10.3 (Вещественное проективное пространство $\mathbb{P}_3(\mathbb{R}) \simeq \text{SO}_3(\mathbb{R})$)

В прим. 7.4 на стр. 108 мы видели, что каждая собственная линейная изометрия трёхмерного евклидова пространства \mathbb{R}^3 является поворотом вокруг некоторой прямой. Изобразим поворот вокруг прямой с вектором скорости e единичной длины на угол $\varphi \in [0, \pi]$, если смотреть вдоль вектора e , точкой² $\varphi \cdot e \in \mathbb{R}^3$. В результате все повороты на углы, меньшие π , изобразятся внутренними точками шара радиуса π с центром в нуле. Диаметально противоположным точкам ограничивающей этот шар сферы отвечает одна и та же изометрия — поворот на угол π вокруг соединяющей эти точки прямой³. Таким образом собственная ортогональная группа $\text{SO}_3(\mathbb{R})$ евклидова пространства \mathbb{R}^3 гомеоморфна трёхмерному шару со склеенными диаметально противоположными точками ограничивающей этот шар сферы. С другой стороны, конструкция из предыдущего прим. 10.2, применённая к пространству \mathbb{R}^4 , показывает, что вещественное проективное пространство $\mathbb{P}_3(\mathbb{R}) = \mathbb{P}(\mathbb{R}^4)$ допускает точно такое же описание: каждая проходящая через начало координат прямая в \mathbb{R}^4 пересекает единичную замкнутую полусферу $x_0^2 + x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1$, $x_0 \geq 0$, и все не лежащие в плоскости $x_0 = 0$ прямые пересекают её в единственной внутренней точке, а прямые из плоскости $x_0 = 0$ — по двум диаметально противоположным точкам граничной трёхмерной сферы $x_0^2 + x_1^2 + x_2^2 = 1$. Остаётся заметить, что полусфера в \mathbb{R}^4 гомеоморфна шару в \mathbb{R}^3 .

УПРАЖНЕНИЕ 10.5. Убедитесь, что семейство вращений вокруг фиксированной оси в фиксированном направлении на углы от 0 до 2π в фиксированном направлении тоже образуют в пространстве $\text{SO}_3(\mathbb{R}) \simeq \mathbb{P}_3(\mathbb{R})$ нестягиваемую петлю, двойной обход которой стягиваем.

ПРИМЕР 10.4 (Стандартное аффинное покрытие \mathbb{P}_n)

Набор из $(n + 1)$ аффинных карт $U_\nu = U_{x_\nu}$, задаваемых в \mathbb{A}^{n+1} уравнениями $x_\nu = 1$, называется *стандартным открытым покрытием* координатного проективного пространства $\mathbb{P}_n = \mathbb{P}(\mathbb{K}^{n+1})$. Для каждого $\nu = 0, 1, \dots, n$ в качестве стандартных локальных аффинных координат на U_ν берутся n линейных форм $t_i^{(\nu)} = x_i|_{U_\nu} = x_i/x_\nu$, где $0 \leq i \leq n$ и $i \neq \nu$. Таким образом, пространство \mathbb{P}_n можно представлять себе как результат склейки $(n + 1)$ различных копий U_0, U_1, \dots, U_n аффинного пространства \mathbb{A}^n по их фактическим пересечениям внутри \mathbb{P}_n . В однородных координатах на \mathbb{P}_n пересечение $U_\mu \cap U_\nu$ описывается как множество всех таких x, y

¹Т. е. в замкнутые кривые, являющиеся непрерывными образами окружности.

²Т. е. концом вектора длины $\varphi \in [0, \pi] \subset \mathbb{R}$, отложенного в направлении единичного вектора e .

³Он виден как поворот на угол π независимо от того направления на оси, вдоль которого Вы его наблюдаете.

которых обе координаты x_μ и x_ν не обращаются в 0. В локальных аффинных координатах на U_μ и U_ν это множество задаётся, соответственно, неравенствами $t_\nu^{(\mu)} \neq 0$ и $t_\mu^{(\nu)} \neq 0$. При этом точка $t^{(\mu)} \in U_\mu$ склеивается с точкой $t^{(\nu)} \in U_\nu$, если и только если $t_\nu^{(\mu)} = 1/t_\mu^{(\nu)}$ и $t_i^{(\mu)} = t_i^{(\nu)}/t_\mu^{(\nu)}$ для $i \neq \mu, \nu$. Правые части этих равенств называются *функциями перехода* от локальных координат $t^{(\nu)}$ к локальным координатам $t^{(\mu)}$.

10.2. Задание фигур полиномиальными уравнениями. Если зафиксировать в векторном пространстве V^* базис x_0, x_1, \dots, x_n , каждому многочлену $f \in \mathbb{k}[x_0, x_1, \dots, x_n]$ можно сопоставить функцию $\tilde{f} : \mathbb{A}(V) \rightarrow \mathbb{k}$, значение которой в точке $p = (p_0, p_1, \dots, p_n)$ равно $f(p_0, p_1, \dots, p_n)$, результату подстановки значений координат этой точки вместо переменных в многочлен f . Получающиеся таким образом функции $\mathbb{A}(V) \rightarrow \mathbb{k}$ называются *полиномиальными*.

УПРАЖНЕНИЕ 10.6 (ПО АЛГЕБРЕ). Покажите, что: а) полиномиальные функции образуют подалгебру¹ в \mathbb{k} -алгебре всех функций $\mathbb{A}(V) \rightarrow \mathbb{k}$ б) эта подалгебра не зависит от выбора базиса в V , использованного для её определения в) над любым конечным полем \mathbb{k} любая функция $\mathbb{A}(V) \rightarrow \mathbb{k}$ может быть (многими способами) записана в виде \tilde{f} с разными $f \in \mathbb{k}[x_1, x_2, \dots, x_n]$ г) над любым бесконечным полем существуют неполиномиальные функции $\mathbb{A}(V) \rightarrow \mathbb{k}$, и равенство полиномиальных функций $\tilde{f} = \tilde{g}$ влечёт равенство задающих их многочленов $f = g$ в $\mathbb{k}[x_0, x_1, \dots, x_n]$.

Множество нулей многочлена f на аффинном пространстве $\mathbb{A}(V)$ обозначается через

$$V(f) = \{p \in \mathbb{A}(V) \mid f(p) = 0\}$$

и называется *аффинной алгебраической гиперповерхностью*, задаваемой многочленом f . Пересечения аффинных алгебраических гиперповерхностей, т. е. множества решений систем полиномиальных уравнений на координаты, называются *аффинными алгебраическими многообразиями*. Например, аффинными многообразиями являются аффинные подпространства — они задаются системами линейных (неоднородных) уравнений.

На проективном пространстве $\mathbb{P}(V)$ отличный от константы многочлен от однородных координат, вообще говоря, не задаёт никакой функции. Тем не менее, для любого *однородного* многочлена f степени $d > 0$ множество его нулей²

$$V(f) \stackrel{\text{def}}{=} \{v \in V \mid f(v) = 0\}$$

является корректно определённым подмножеством в $\mathbb{P}(V)$, поскольку

$$f(v) = 0 \iff f(\lambda v) = \lambda^d f(v) = 0, .$$

Иначе говоря, аффинная гиперповерхность $V(f) \subset \mathbb{A}(V)$ представляет собой конус, образованный проходящими через начало координат прямыми, которые являются точками проективного пространства. Множество этих точек называется *проективной алгебраической гиперповерхностью* и тоже обозначается через $V(f) \subset \mathbb{P}(V)$. Пересечения проективных гиперповерхностей, т. е. множества ненулевых решений³ систем однородных полиномиальных уравнений, называются *проективными алгебраическими многообразиями*.

¹Т. е. подкольцо и одновременно векторное подпространство.

²Рассматриваемых с точностью до умножения на ненулевые константы.

³Как и выше, рассматриваемых с точностью до умножения на ненулевые константы.

Простейшими примерами проективных многообразий являются *проективные подпространства* $\mathbb{P}(U) \subset \mathbb{P}(V)$, проективизации ненулевых векторных подпространств $U \subset V$. Они задаются системами однородных линейных уравнений. Так, через любые две различные точки $a, b \in \mathbb{P}(V)$ проходит *проективная прямая* (ab) , которая представляет собою проективизацию линейной оболочки векторов a, b и состоит из всевозможных ненулевых векторов $\lambda a + \mu b$, рассматриваемых с точностью до пропорциональности. Она может быть задана системой однородных линейных уравнений $\xi(x) = 0$, где ξ пробегает подпространство $\text{Ann } a \cap \text{Ann } b$ или какой-нибудь базис в этом подпространстве. Отношение $(\lambda : \mu)$ коэффициентов в разложении вектора $v = \lambda a + \mu b \in (ab)$ можно использовать в качестве внутренней однородной координаты на проективной прямой (ab) .

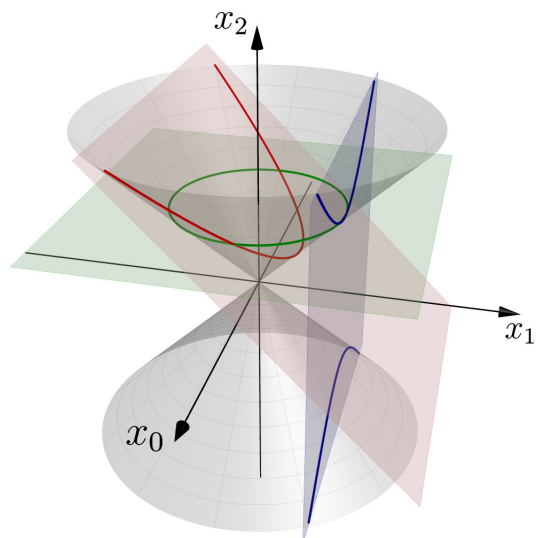
УПРАЖНЕНИЕ 10.7. Рассмотрим произвольную аффинную карту $U_\xi \subset \mathbb{P}_n$ и произвольное k -мерное проективное подпространство $K \subset \mathbb{P}_n$. Покажите, что либо $K \cap U_\xi = \emptyset$, либо $K \cap U_\xi$ является k -мерным аффинным подпространством в U_ξ .

УПРАЖНЕНИЕ 10.8. Покажите, что для любых двух проективных подпространств $K, L \subset \mathbb{P}_n$ выполняется неравенство¹ $\dim(K \cap L) \geq \dim K + \dim L - n$.

ПРИМЕР 10.5 (Аффинные коники)

Посмотрим как выглядит в различных аффинных картах плоская проективная кривая C , заданная в однородных координатах на $\mathbb{P}_2 = \mathbb{P}(\mathbb{R}^3)$ уравнением

$$x_0^2 + x_1^2 = x_2^2 \quad (10-1)$$



В стандартной карте U_{x_1} , где $x_1 = 1$, в локальных координатах

$$t_0 = x_0|_{U_{x_1}} = x_0/x_1$$

$$t_2 = x_2|_{U_{x_1}} = x_2/x_1$$

уравнение (10-1) превращается в уравнение гиперболы $t_2^2 - t_0^2 = 1$. В стандартной карте U_{x_2} , где $x_2 = 1$, с локальными координатами

$$t_0 = x_0|_{U_{x_2}} = x_0/x_2$$

$$t_1 = x_1|_{U_{x_2}} = x_1/x_2$$

мы получим уравнение окружности $t_0^2 + t_1^2 = 1$. В карте $U_{x_1+x_2}$, где $x_1 + x_2 = 1$, в координатах

$$\text{Рис. 10} \diamond 5. \text{ Конус. } t = x_0|_{U_{x_1+x_2}} = x_0/(x_1 + x_2)$$

$$u = (x_2 - x_1)|_{U_{x_1+x_2}} = (x_2 - x_1)/(x_2 + x_1)$$

мы получим² уравнение параболы $t^2 = u$. Таким образом, аффинные эллипс, гипербола и парабола суть изображения одной и той же проективной кривой (10-1) в различных аффинных картах. Вид кривой C в карте $U \subset \mathbb{P}_2$ определяется тем, как располагается по отношению к C бесконечно удалённая прямая этой карты: эллипс, парабола и гипербола возникают, соответственно, когда эта прямая не пересекается с C , касается C и пересекается с C в двух различных точках (см. рис. 10♦5).

¹ В частности, любые две прямые на \mathbb{P}_2 пересекаются.

² После переноса x_1^2 из левой части (10-1) в правую и деления обеих частей на $x_2 + x_1$.

10.2.1. Проективное замыкание аффинной гиперповерхности. Пусть аффинная гиперповерхность $V(f) \subset \mathbb{A}^n$ в аффинном координатном пространстве $\mathbb{A}^n = \mathbb{A}(\mathbb{k}^n)$ задаётся (неоднородным) многочленом степени d вида

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = f_0 + f_1(x_1, x_2, \dots, x_n) + f_2(x_1, x_2, \dots, x_n) + \dots + f_d(x_1, x_2, \dots, x_n)$$

где каждый многочлен f_i . Вложим \mathbb{A}^n в проективное координатное пространство $\mathbb{P}_n = \mathbb{P}(\mathbb{k}^{n+1})$ с однородными координатами $(x_0 : x_1 : \dots : x_n)$ в качестве стандартной аффинной карты U_0 и образуем однородный многочлен

$$\bar{f}(x_0, x_1, \dots, x_n) = f_0 \cdot x_0^d + f_1(x_1, x_2, \dots, x_n) \cdot x_0^{d-1} + \dots + f_d(x_1, x_2, \dots, x_n),$$

который получается из f умножением каждого монома на такую степень переменной x_0 , которая делает степень всего монома равной d . Многочлен \bar{f} превращается в f , если положить $x_0 = 1$. Таким образом, многочлены f и \bar{f} однозначно определяют друг по другу. Проективная гиперповерхность $V(\bar{f}) \subset \mathbb{P}_n$ называется *проективным замыканием* аффинной гиперповерхности $V(f) \subset \mathbb{A}^n$. Последняя является пересечением проективной гиперповерхности $V(\bar{f})$ со стандартной аффинной картой U_0 . Дополнение $V(\bar{f}) \setminus U_0 = V(\bar{f}) \cap \mathbb{P}(\text{Ann } x_0)$, т. е. пересечение гиперповерхности $V(\bar{f})$ с бесконечно удалённой проективной гиперплоскостью аффинной карты U_0 , задаётся в однородных координатах $(x_1 : x_2 : \dots : x_n)$ на этой гиперплоскости однородным уравнением $f_d(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0$, т. е. старшей однородной компонентой многочлена f . Точки этой проективной гиперповерхности называются *асимптотическими направлениями* аффинной гиперповерхности $V(f)$.

Например, проективное замыкание аффинной кубической кривой $x_1 = x_2^3$ это проективная кубическая кривая $x_0^2 x_1 = x_2^3$, которая имеет ровно одну бесконечно удалённую точку $(0 : 1 : 0)$ и выглядит в стандартной аффинной карте U_1 как полукубическая парабола $x_0^2 = x_2^3$ с остриём в этой точке.

10.2.2. Пространство гиперповерхностей. Однородные многочлены фиксированной степени d вместе с нулевым многочленом образуют конечномерное векторное подпространство, которое мы будем обозначать через $S^d V^* \subset \mathbb{k}[x_1, x_2, \dots, x_n]$. Поскольку пропорциональные уравнения задают одну и ту же гиперповерхность, гиперповерхности степени d являются точками проективного пространства $\mathbb{P}(S^d V^*)$, которое мы будем называть *пространством гиперповерхностей* степени d в $\mathbb{P}(V)$.

УПРАЖНЕНИЕ 10.9. Найдите размерность пространства $\mathbb{P}(S^d V^*)$.

Поскольку уравнение $f(p) = 0$ при фиксированном $p \in \mathbb{P}(V)$ является *линейным* уравнением на $f \in S^d V^*$, гиперповерхности степени d , проходящие через заданную точку p , образуют проективную гиперплоскость в пространстве всех гиперповерхностей.

Проективные подпространства в пространстве гиперповерхностей называются *линейными системами* гиперповерхностей. По определению, всякая гиперповерхность из линейной системы, порождённой гиперповерхностями $V(f_1), V(f_2), \dots, V(f_m)$ задаётся уравнением вида

$$\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2 + \dots + \lambda_m f_m = 0,$$

где $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m \in \mathbb{k}$ — некоторые константы. В частности, любая гиперповерхность из такой системы обязательно содержит пересечение $V(f_1) \cap V(f_2) \cap \dots \cap V(f_m)$.

По старинной традиции, одномерные и двумерные линейные системы частенько называются *пучками* и *связками* соответственно. Поскольку любая прямая в проективном пространстве имеет непустое пересечение с любой гиперплоскостью, всякий пучок гиперповерхностей¹ всегда содержит гиперповерхность, проходящую через любую наперёд заданную точку.

ПРИМЕР 10.6 (НАБОРЫ ТОЧЕК НА \mathbb{P}_1 И КРИВАЯ ВЕРОНЕЗЕ)

Фиксируем двумерное векторное пространство $U \simeq \mathbb{k}^2$ с координатами x_0, x_1 и рассмотрим проективную прямую $\mathbb{P}_1 = \mathbb{P}(U)$. Всякое конечное множество точек $p_1, p_2, \dots, p_d \in \mathbb{P}_1 = \mathbb{P}(U)$ (среди которых допускаются и совпадающие) является алгебраической гиперповерхностью, а именно, множеством нулей однородного многочлена d -той степени

$$f(x_0, x_1) = \prod_{v=1}^d \det(x, p_v) = \prod_{v=1}^d (p_{v,1}x_0 - p_{v,0}x_1), \quad \text{где } p_v = (p_{v,0} : p_{v,1}). \quad (10-2)$$

По аналогии с (неоднородными) многочленами от одной переменной, задающими конфигурации точек на аффинной прямой A_1 , мы будем называть точки $p_v \in \mathbb{P}_1$ *корнями* однородного многочлена f от переменных x_0, x_1 . В этом смысле разложение (10-2) аналогично разложению многочлена от одной переменной на линейные множители, отвечающие корням. В частности, у однородного многочлена степени d от двух переменных имеется не более d различных корней на \mathbb{P}_1 , а если поле \mathbb{k} алгебраически замкнуто, то таких корней, с учётом кратностей², будет ровно d . Таким образом, над алгебраически замкнутым полем \mathbb{k} всевозможные d -точечные конфигурации на \mathbb{P}_1 взаимно однозначно соответствуют точкам проективного пространства $\mathbb{P}_d = \mathbb{P}(S^d U^*)$, ассоциированного с $(d+1)$ -мерным векторным пространством однородных многочленов степени d от x_0, x_1 .

Покажем, что над произвольным полем \mathbb{k} , характеристика которого не делит d , те конфигурации из d точек на \mathbb{P}_1 , в которых все d точек слипаются в одну, образуют алгебраическую кривую $C_d \subset \mathbb{P}_d = \mathbb{P}(S^d U^*)$. Эта кривая называется *кривой Веронезе* степени d или *рациональной нормальной кривой d -той степени* и является образом *отображения Веронезе*

$$v_d : \mathbb{P}_1^\times = \mathbb{P}(U^*) \rightarrow \mathbb{P}_d = \mathbb{P}(S^d U^*), \quad (10-3)$$

переводящего линейную форму $\varphi \in U^*$, задающую одну точку $p \in \mathbb{P}(U)$, в её d -ю степень $\varphi^d \in S^d(U^*)$, задающую d -кратную точку p . Условимся записывать $\varphi \in U^*$ и $f \in S^d(U^*)$ в виде

$$\varphi(x) = \alpha_0 x_0 + \alpha_1 x_1 \quad \text{и} \quad f(x) = \sum_{\nu} a_{\nu} \cdot \binom{d}{\nu} x_0^{d-\nu} x_1^{\nu},$$

где a_k суть частные от деления коэффициентов многочлена f на биномиальные коэффициенты³ $\binom{d}{k}$, и используем отношения коэффициентов $(\alpha_0 : \alpha_1)$ и $(a_0 : a_1 : \dots : a_d)$ в качестве однородных координат на $\mathbb{P}_1^\times = \mathbb{P}(U^*)$ и на $\mathbb{P}_d = \mathbb{P}(S^d U^*)$ соответственно. В этих обозначениях кривая Веронезе описывается параметрическим уравнением

$$(\alpha_0 : \alpha_1) \mapsto (a_0 : a_1 : \dots : a_d) = (\alpha_0^d : \alpha_0^{d-1} \alpha_1 : \alpha_0^{d-2} \alpha_1^2 : \dots : \alpha_1^d), \quad (10-4)$$

¹Над любым полем!

²Под кратностью корня p понимается максимальная степень линейной формы $\det(t, p)$, на которую многочлен f делится в $\mathbb{k}[t_0, t_1]$.

³Если $\text{char } \mathbb{k} = p$ делит d , то записать f в таком виде невозможно, поскольку некоторые биномиальные коэффициенты обратятся в нуль. Например, при $d = p$ весь образ отображения (10-3) лежит на прямой, проходящей через x_0^p и x_1^p , поскольку $(\alpha_0 x_0 + \alpha_1 x_1)^p = \alpha_0^p x_0^p + \alpha_1^p x_1^p$ при $\text{char } \mathbb{k} = p$.

из которого вытекает, что кривая C_d состоит из всех таких точек $(a_0 : a_1 : \dots : a_d) \in \mathbb{P}^d$, координаты которых составляют геометрическую прогрессию. Это равносильно равенству

$$\text{rk} \begin{pmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & \dots & a_{d-2} & a_{d-1} \\ a_1 & a_2 & a_3 & \dots & a_{d-1} & a_d \end{pmatrix} = 1,$$

т. е. системе однородных квадратичных уравнений $a_i a_j = a_{i+1} a_{j-1}$, $1 \leq i < j \leq d$.

Например, коника Веронезе $C_2 \subset \mathbb{P}^2$ состоит из всех ненулевых квадратных трёхчленов¹

$$a_0 x_0^2 + 2a_1 x_0 x_1 + a_2 x_1^2,$$

являющихся полными квадратами. Она описывается хорошо известным из школы уравнением

$$D/4 = -\det \begin{pmatrix} a_0 & a_1 \\ a_1 & a_2 \end{pmatrix} = a_1^2 - a_0 a_2 = 0 \quad (10-5)$$

и допускает следующее параметрическое описание:

$$a_0 = \alpha_0^2, \quad a_1 = \alpha_0 \alpha_1, \quad a_2 = \alpha_1^2, \quad (10-6)$$

где $(\alpha_0 : \alpha_1)$ пробегает $\mathbb{P}_1 = \mathbb{P}(\mathbb{k}^2)$.

Пересечение кривой (10-4) с произвольной гиперплоскостью, заданной уравнением

$$A_0 a_0 + A_1 a_1 + \dots + A_d a_d = 0,$$

состоит из Веронезе-образов тех точек $(\alpha_0 : \alpha_1) \in \mathbb{P}_1$, в которых обращается в нуль однородный многочлен $\sum A_\nu \cdot \alpha_0^{d-\nu} \alpha_1^\nu$ степени d . Поскольку таких точек не более d , над произвольным полем \mathbb{k} , характеристика которого не делит d , никакие $d + 1$ точек кривой Веронезе не лежат в одной гиперплоскости. Отсюда вытекает, что при $2 \leq m \leq d$ никакие $m + 1$ точек кривой C_d не лежат в одном $(m - 1)$ -мерном подпространстве. Над алгебраически замкнутым полем, характеристика которого не делит d , пересечение кривой C_d с любой гиперплоскостью состоит в точности из d точек². Именно поэтому мы и говорим, что *степень* кривой C_d равна d .

10.3. Дополнительные подпространства и проекции. Проективные подпространства $K = \mathbb{P}(U)$ и $L = \mathbb{P}(W)$ пространства $\mathbb{P}^n = \mathbb{P}(V)$ называются *дополнительными*, если $K \cap L = \emptyset$ и $\dim K + \dim L = n - 1$. Например, любые две непересекающиеся прямые в \mathbb{P}^3 дополнительные. На языке линейной алгебры дополнительность означает, что соответствующие векторные пространства $U, W \subset V$ трансверсальны: $U \cap W = \{0\}$, и

$$\dim U + \dim W = \dim K + 1 + \dim L + 1 = (n + 1) = \dim V,$$

откуда $V = U \oplus W$. В этом случае любой вектор $v \in V$ имеет единственное разложение $v = u + w$ с $u \in U$ и $w \in W$, причём обе компоненты этого разложения отличны от нуля, если v не содержится ни в U , ни в W . Это означает, что для любой точки $p \notin K \sqcup L$ существует единственная прямая $\ell = (q, r)$, проходящая через p и пересекающая каждое из подпространств K, L . В самом деле, в качестве точек q и r , задающих такую прямую, можно взять компоненты u, w разложения вектора v , задающего точку p , и наоборот, если вектор v , задающий точку p оказался в

¹Как обычно, рассматриваемых с точностью до пропорциональности.

²Некоторые из которых могут совпадать друг с другом.

двумерной линейной оболочке ненулевых векторов $u \in U$ и $w \in W$, то одномерные подпространства, натянутые на u и w должны содержать компоненты разложения вектора v в силу единственности его разложения по U и W .

Для каждой пары дополнительных подпространств $K, L \subset \mathbb{P}_n$ определено отображение

$$\pi_L^K : (\mathbb{P}_n \setminus K) \rightarrow L, \tag{10-7}$$

которое тождественно действует на L и переводит каждую точку $p \in \mathbb{P}_n \setminus (K \sqcup L)$ в точку пересечения с L той единственной прямой, что проходит через p и пересекает оба подпространства K и L . Отображение (10-7) называется *проекцией на L из K* . В согласованных с разложением $V = U \oplus W$ однородных координатах $(x_0 : x_1 : \dots : x_n)$ таких, что $(x_0 : x_1 : \dots : x_m)$ являются координатами в K , а $(x_{m+1} : x_{m+2} : \dots : x_n)$ — в L , проекция π_L^K просто удаляет первые $(m + 1)$ координат x_ν с $0 \leq \nu \leq m$.

Пример 10.7 (проекция коники на прямую)

Спроектируем гладкую конику C , заданную уравнением $x_0^2 + x_1^2 = x_2^2$ из прим. 10.5, на прямую L , заданную уравнением $x_0 = 0$, из точки $p = (1 : 0 : 1) \in C$. В стандартной аффинной карте U_2 , где $x_2 = 1$, эта проекция $\pi_L^p : C \rightarrow L$ выглядит как на рис. 10◊6. Она устанавливает бирациональную биекцию между прямой L и коникой C в том смысле, что однородные координаты соответственных точек $q = (q_0 : q_1 : q_2) \in C$ и $t = (0 : t_1 : t_2) = \pi_L^p(q) \in L$ суть рациональные алгебраические функции друг друга:

$$\begin{aligned} (t_1 : t_2) &= (q_1 : (q_2 - q_0)) \\ (q_0 : q_1 : q_2) &= \\ &= ((t_1^2 - t_2^2) : 2 t_1 t_2 : (t_1^2 + t_2^2)) \end{aligned} \tag{10-8}$$

Упражнение 10.10. Проверьте эти формулы и обратите внимание, что когда (t_1, t_2) пробегает $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ вторая из них перечисляет все пифагоровы тройки¹ $(q_0 : q_1 : q_2)$.

а само отображение $\pi_L^p : C \rightarrow L$ взаимно однозначно, если доопределить его в точке p так, чтобы она переходила в точку пересечения прямой L и касательной к C в точке p прямой $x_0 = x_2$ (на рис. 10◊6 это пересечение происходит в бесконечной точке $t = (0 : 1 : 0)$). В самом деле, каждая проходящая через p прямая $\ell_t = (pt)$, за исключением касательной, пересекает C ещё ровно в одной точке $q = q(t)$, отличной от p , и координаты этой точки q рационально выражаются через коэффициенты уравнения прямой ℓ_t , являющиеся рациональными функциями от t , и координаты точки p .

Отметим, что коника C переводится в конику Веронезе $a_1^2 = a_0 a_2$ из (10-5) обратимой линейной заменой координат

$$\begin{cases} a_0 = x_2 + x_0 \\ a_1 = x_1 \\ a_2 = x_2 - x_0 \end{cases} \quad \begin{cases} x_0 = (a_0 - a_2)/2 \\ x_1 = a_1 \\ x_2 = (a_0 + a_2)/2 \end{cases}$$

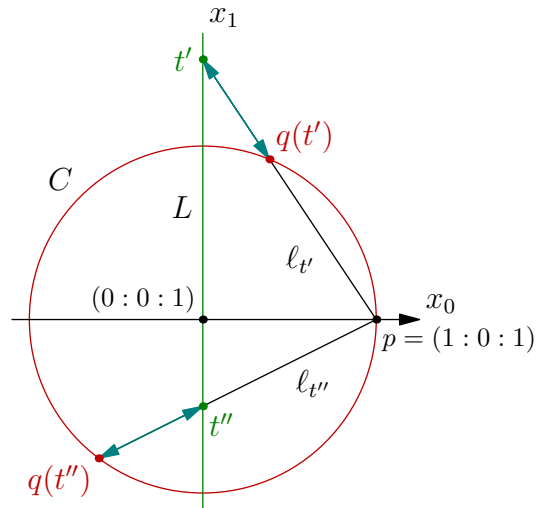


Рис. 10◊6. Проектирование коники на прямую.

¹Т. е. все целые решения уравнения Пифагора $q_0^2 + q_1^2 = q_2^2$.

и параметризация (10-6) кривой Веронезе при этой замене координат превращается в точности в параметризацию (10-8).

10.4. Линейные проективные изоморфизмы. Всякий линейный изоморфизм векторных пространств $F : U \simeq W$ корректно определяет биекцию $\bar{F} : \mathbb{P}(U) \simeq \mathbb{P}(W)$, которая называется *проективным линейным преобразованием* или *проективным изоморфизмом*.

УПРАЖНЕНИЕ 10.11. Рассмотрим две гиперплоскости $L_1, L_2 \subset \mathbb{P}_n = \mathbb{P}(V)$ и точку $p \notin L_1 \cup L_2$.

Убедитесь, что проекция из p задаёт проективный изоморфизм $\gamma_p : L_1 \simeq L_2$.

ТЕОРЕМА 10.1

Для любых двух упорядоченных наборов из $(n + 2)$ точек

$$\{p_0, p_1, \dots, p_{n+1}\} \in \mathbb{P}(U), \quad \{q_0, q_1, \dots, q_{n+1}\} \in \mathbb{P}(W),$$

в каждом из которых никакие $(n + 1)$ точек не лежат в одной гиперплоскости, существует единственный с точностью до пропорциональности линейный изоморфизм $F : U \rightarrow W$, такой что $\bar{F}(p_i) = q_i$ при всех i .

Доказательство. Зафиксируем некоторые векторы u_i и w_i , представляющие точки p_i и q_i , и возьмём $\{u_0, u_1, \dots, u_n\}$ и $\{w_0, w_1, \dots, w_n\}$ в качестве базисов в U и W . Оператор $F : U \rightarrow W$ тогда и только тогда переводит точку p_i в точку q_i , когда $F(u_i) = \lambda_i w_i$ для некоторых ненулевых $\lambda_i \in \mathbb{k}$. В частности, для того, чтобы точки p_0, p_1, \dots, p_n переводились преобразованием \bar{F} в точки q_0, q_1, \dots, q_n , необходимо и достаточно, чтобы оператор F в выбранных нами базисах имел диагональную матрицу с произвольными ненулевыми константами $\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_n$ по главной диагонали. Заметим теперь, что в разложении $u_{n+1} = x_0 u_0 + x_1 u_1 + \dots + x_n u_n$ все координаты x_i отличны от нуля, поскольку в противном случае $n + 1$ точка¹ оказались бы в одной гиперплоскости, заданной условием обращения этой координаты в нуль. Если аналогичным образом разложить вектор $w_{n+1} = y_0 w_0 + y_1 w_1 + \dots + y_n w_n$ и записать равенство $F(u_{n+1}) = \lambda_{n+1} w_{n+1}$ в виде системы равенств на координаты, мы получим на константы $\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_{n+1}$ соотношения $y_i = \lambda_{n+1} \lambda_i x_i$ (при всех $0 \leq i \leq n$), из которых

$$(\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_n) = \lambda_{n+1}^{-1} \cdot (y_1/x_1, y_2/x_2, \dots, y_n/x_n).$$

Таким образом, матрица оператора F определена однозначно с точностью до постоянного множителя $\lambda_{n+1}^{-1} \neq 0$. \square

Следствие 10.1

Две матрицы тогда и только тогда задают одинаковые проективные изоморфизмы, когда они пропорциональны. \square

Пример 10.8 (четырёхвершинник и эпиморфизм $S_4 \rightarrow S_3$)

Любые четыре точки $a, b, c, d \in \mathbb{P}_2$, никакие три из которых не коллинеарны, задают конфигурацию из трёх пар прямых, соединяющих непересекающиеся пары точек (см. рис. 10◊7). Эта конфигурация называется *четырёхвершинником $abcd$* , а пары прямых, проходящих через непересекающиеся пары точек, называются *противоположными сторонами* этого четырёхвершинника. Точки пересечений пар противоположных сторон

$$x = (ab) \cap (cd), \quad y = (ac) \cap (bd), \quad z = (ad) \cap (bc) \quad (10-9)$$

¹А именно, p_{n+1} и все p_i с номерами, отличными от номера занулившейся координаты вектора u_{n+1} .

и проходящие через них три прямые называют *ассоциированным треугольником* xuz четырёхвершинника $abcd$. Согласно теор. 10.1 на стр. 181, каждая перестановка точек a, b, c, d однозначно задаёт линейное проективное преобразование $\mathbb{P}_2 \simeq \mathbb{P}_2$, переводящее четырёхвершинник $abcd$ в себя, а значит, как-то переставляющее вершины x, y, z ассоциированного с ним треугольника. Возникающий таким образом гомоморфизм групп перестановок $\pi : S_4 \rightarrow S_3$ сюръективен, поскольку транспозиция точек a, b и транспозиция точек a, c приводят, соответственно, к транспозициям точек y, z и точек x, z , которые порождают группу треугольника xuz . Ядро гомоморфизма¹ π состоит из тождественной перестановки и трёх пар непересекающихся транспозиций:

$$\ker \pi = \{(a, b, c, d), (b, a, d, c), (c, d, a, b), (d, c, b, a)\}.$$

Эта четырёхэлементная группа перестановок называется *группой Клейна* или *группой двуугольника* и обозначается V_4 или D_2 .

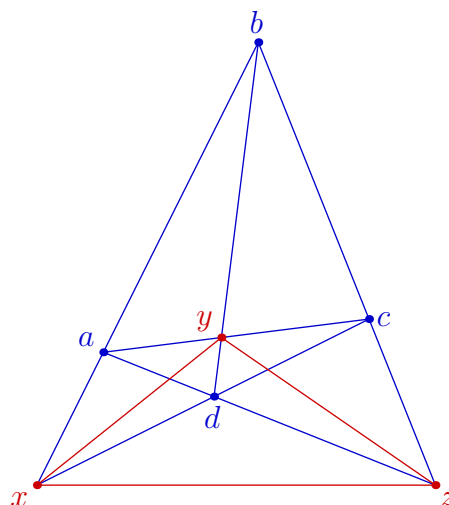


Рис. 10◊7. Четырёхвершинник.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 10.1 (ЛИНЕЙНЫЕ ПРОЕКТИВНЫЕ ГРУППЫ)

Согласно теор. 10.1 линейные проективные автоморфизмы пространства $\mathbb{P}(V)$ образуют группу, изоморфную фактор группе полной линейной группы $GL(V)$ по подгруппе гомотетий $H = \{\lambda \cdot \text{Id} \mid \lambda \neq 0\} \subset GL(V)$. Эта фактор группа обозначается $PGL(V) = GL(V)/H$ и называется *проективной линейной группой*. Если при помощи выбора базиса отождествить линейную группу $GL(V)$ с группой невырожденных матриц GL_{n+1} , проективная группа $PGL(V)$ отождествится с группой PGL_{n+1} невырожденных матриц, рассматриваемых с точностью до пропорциональности.

ПРИМЕР 10.9 (ДРОБНО ЛИНЕЙНЫЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ПРЯМОЙ)

Группа $PGL_2(\mathbb{k})$ состоит из классов пропорциональности матриц $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ с $ad - bc \neq 0$.

Она действует на \mathbb{P}_1 по правилу

$$A : (x_0 : x_1) \mapsto ((ax_0 + bx_1) : (cx_0 + dx_1)).$$

В стандартной аффинной карте $U_1 \simeq \mathbb{A}^1$ с аффинной координатой $t = x_0/x_1$, это действие имеет вид дробно линейного преобразования $t \mapsto (at + b)/(ct + d)$. Единственное дробно линейное преобразование, переводящее три заданных различных точки q, r, s в $\infty, 0, 1$, очевидно, таково:

$$t \mapsto \frac{t - r}{t - q} \cdot \frac{s - r}{s - q} \quad (10-10)$$

10.5. Гомографии. Многие геометрические задачи так или иначе связаны с соответствиями между точками одной проективной прямой и точками другой проективной прямой, такими что координаты соответственных точек *алгебраически* выражаются друг через друга. Простейшими такими соответствиями являются бирациональные² биекции или *гомографии*.

¹Напомню, что ядром гомоморфизма групп $\varphi : G_1 \rightarrow G_2$ называется подгруппа $\ker \varphi \subset G_1$, состоящая из всех элементов группы G_1 , отображающихся в единицу группы G_2 .

²Соответствие между точками называется *бирациональным*, если координаты соответственных точек являются рациональными функциями друг друга.

ТЕОРЕМА 10.2

Если над алгебраически замкнутым полем \mathbb{k} с $\text{char } \mathbb{k} = 0$ имеется биективное отображение

$$\varphi : \mathbb{P}_1 \setminus \{\text{конечное множество}\} \xrightarrow{\cong} \mathbb{P}_1 \setminus \{\text{конечное множество}\},$$

которое в некоторой аффинной карте с аффинной координатой t может быть задано формулой

$$t \mapsto \varphi(t) = g(t)/h(t), \quad \text{где } g, h \in \mathbb{k}[t], \quad (10-11)$$

то φ является линейным проективным изоморфизмом¹.

Доказательство. В однородных координатах $(x_0 : x_1)$, для которых $t = x_0/x_1$, формулу (10-11) можно переписать² как $\varphi : (x_0 : x_1) \mapsto (F(x_0, x_1) : G(x_0, x_1))$, где F и G не пропорциональные друг другу однородные многочлены от (x_0, x_1) одинаковой степени $d = \deg F = \deg G$. Если точка $\vartheta = (\vartheta_0 : \vartheta_1) \in \mathbb{P}_1$ имеет при отображении φ ровно один прообраз, то однородный многочлен $\vartheta_1 \cdot F(x_0, x_1) - \vartheta_0 \cdot G(x_0, x_1)$ имеет на \mathbb{P}_1 ровно один корень $x = \varphi^{-1}(\vartheta)$. Над алгебраически замкнутым полем такое возможно, только если этот корень d -кратный. Поэтому в пространстве \mathbb{P}_d однородных многочленов степени d от (x_0, x_1) прямая $(F, G) = \{\lambda F + \mu G \mid (\lambda : \mu) \in \mathbb{P}_1\}$ имеет бесконечно много³ точек пересечения с кривой Веронезе $C_d \subset \mathbb{P}_d$ из прим. 10.6 на стр. 178, где мы видели, что при $d \geq 2$ никакие три точки кривой C_d не лежат на одной прямой. Поэтому $d = 1$ и $\varphi \in \text{PGL}_2(\mathbb{k})$. \square

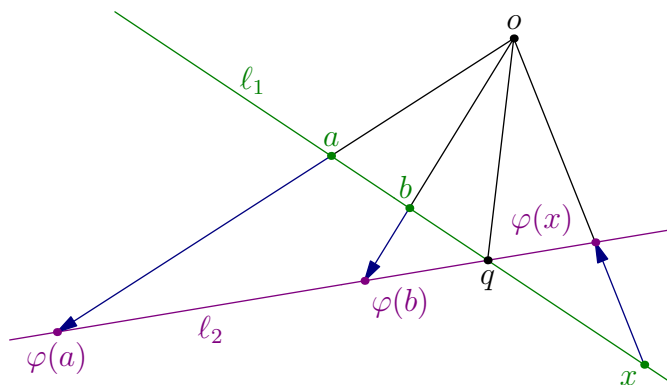


Рис. 10♦8. Перспектива.

ПРИМЕР 10.10 (ПЕРСПЕКТИВЫ)

Важным примером гомографии является центральная проекция прямой $\ell_1 \subset \mathbb{P}_2$ на другую прямую $\ell_2 \subset \mathbb{P}_2$ из произвольной точки $o \notin \ell_1 \cup \ell_2$ (см. рис. 10♦8). Мы будем называть такую гомографию *перспективой* с центром o и обозначать $o : \ell_1 \xrightarrow{\cong} \ell_2$.

УПРАЖНЕНИЕ 10.12. Убедитесь, что перспектива в самом деле является гомографией (т. е. биективна и бирациональна).

Гомография $\varphi : \ell_1 \xrightarrow{\cong} \ell_2$ является перспективой, если и только если она переводит точку пересечения прямых $\ell_1 \cap \ell_2$ в себя. В самом деле, беря в качестве o точку пересечения прямых $(a, \varphi(a))$ и $(b, \varphi(b))$, соединяющих произвольные точки $a, b \in \ell_1 \setminus \ell_2$ с их образами $\varphi(a), \varphi(b)$,

¹И, в частности, однозначно продолжается на всю прямую.

²Конечное множество, где отображение φ не определено, может при этом поменяться.

³Т. к. поле \mathbb{k} бесконечно, а отображение φ биективно вне конечного множества точек.

как на рис. 10◊8, видим, что перспектива $o : \ell_1 \simeq \ell_2$ действует на три точки a, b и $\ell_1 \cap \ell_2$ также, как и φ , и, стало быть, совпадает с φ , т. к. дробно линейный изоморфизм однозначно определяется своим действием на три различных точки.

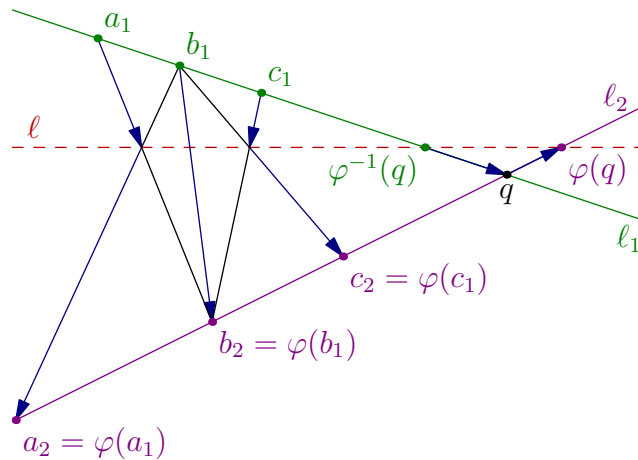


Рис. 10◊9. Перекрёстная ось.

Предложение 10.1

Пусть прямые $\ell_1, \ell_2 \subset \mathbb{P}_2$ пересекаются в точке $q = \ell_1 \cap \ell_2$. Если для некоторой прямой ℓ и точек $b_1 \in \ell_1$ и $b_2 \in \ell_2$ гомография $\varphi : \ell_1 \simeq \ell_2$ раскладывается в композицию перспектив

$$\varphi = (b_1 : \ell \rightarrow \ell_2) \circ (b_2 : \ell_1 \rightarrow \ell), \quad \text{где } b_1 \in \ell_1, b_2 \in \ell_2, \quad (10-12)$$

(см. рис. 10◊9), то $b_2 = \varphi(b_1)$, а ℓ проходит через точки $\varphi(q)$ и $\varphi^{-1}(q)$. Наоборот, каждую гомографию $\varphi : \ell_1 \simeq \ell_2$ можно разложить в композицию (10-12), в которой точку $b_1 \in \ell_1$ можно выбрать произвольно, точка $b_2 = \varphi(b_1)$, а прямая ℓ не зависит от выбора $b_1 \in \ell_1$.

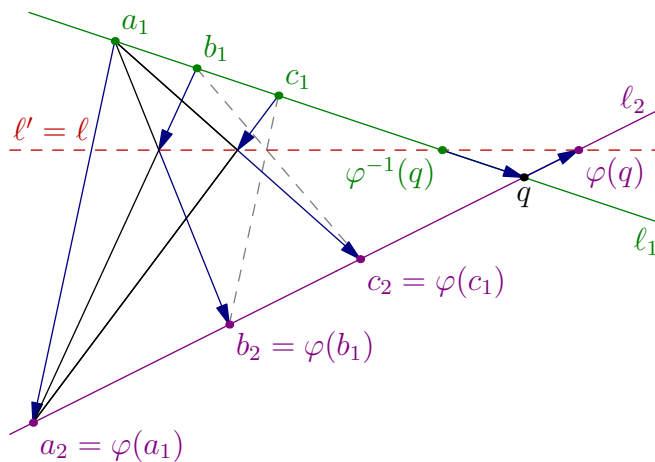


Рис. 10◊10. Равенство $\ell' = \ell$.

Доказательство. Первое утверждение очевидно из рис. 10◊9. Для доказательства второго рассмотрим произвольные три различных и отличных от $q = \ell_1 \cap \ell_2$ точки $a_1, b_1, c_1 \in \ell_1$ и обозначим через $a_2, b_2, c_2 \in \ell_2$ их образы относительно φ . Возьмём в качестве ℓ прямую, проходящую через точки пересечения пар «перекрёстных» прямых $(a_1b_2) \cap (b_1a_2)$ и $(c_1b_2) \cap (b_1c_2)$. Из

рис. 10◊9 очевидно, что композиция перспектив из правой части (10-12) переводит a_1, b_1, c_1 соответственно в a_2, b_2, c_2 и, стало быть, совпадает с φ . Чтобы убедиться, что прямая ℓ не зависит от b_1 повторим предыдущее рассуждение, заменив в нём тройку a_1, b_1, c_1 — тройкой c_1, a_1, b_1 (см. рис. 10◊10). Получим разложение $\varphi = (a_1 : \ell' \rightarrow \ell_2) \circ (a_2 : \ell' \rightarrow \ell)$, в котором прямая ℓ' проходит через точки пересечения пар перекрёстных прямых $(a_1 c_2) \cap (c_1, a_2)$ и $(b_1 a_2) \cap (a_1, b_2)$. Обе прямые ℓ и ℓ' проходят через точку $(b_1 a_2) \cap (a_1, b_2)$, а также (согласно первому утверждению предложения) через точки¹ $\varphi(q)$ и $\varphi^{-1}(q)$. Поэтому $\ell = \ell'$. \square

Следствие 10.2 (перекрёстная ось гомографии)

Для любой гомографии $\varphi : \ell_1 \simeq \ell_2$ и точек $x \neq y$, независимо пробегающих прямую ℓ_1 , GMT пересечений «перекрёстных прямых» $(x, \varphi(y)) \cap (y, \varphi(x))$ представляет собою прямую², проходящую через точки $\varphi(\ell_1 \cap \ell_2)$ и $\varphi^{-1}(\ell_1 \cap \ell_2)$.

Замечание 10.1. Обратите внимание, что предл. 10.1 и сл. 10.2 справедливы и для перспектив, когда точки $\varphi(\ell_1 \cap \ell_2)$ и $\varphi^{-1}(\ell_1 \cap \ell_2)$ совпадают друг с другом и с $\ell_1 \cap \ell_2$ и сами по себе не определяют перекрёстную ось ℓ однозначно.

УПРАЖНЕНИЕ 10.13. На \mathbb{P}_2 даны две прямые ℓ_1 и ℓ_2 . Гомография $\varphi : \ell_1 \simeq \ell_2$ переводит три данные точки $a_1, b_1, c_1 \in \ell_1$ в три данные точки $a_2, b_2, c_2 \in \ell_2$. Одной линейкой постройте образ $\varphi(x)$ произвольно заданной точки $x \in \ell_1$.

10.6. Двойное отношение. Рассмотрим проективную прямую $\mathbb{P}_1 = \mathbb{P}(\mathbb{k}^2)$ со стандартными однородными координатами $(x_0 : x_1)$ и аффинной координатой $x = x_0 / x_1$. Отметим, что разность аффинных координат $a = a_0 / a_1$ и $b = b_0 / b_1$ любых двух точек $a = (a_0 : a_1)$ и $b = (b_0 : b_1)$ с точностью до множителя совпадает с определителем их однородных координат:

$$a - b = \frac{a_0}{a_1} - \frac{b_0}{b_1} = \frac{a_0 b_1 - a_1 b_0}{a_1 b_1} = \frac{\det(a, b)}{a_1 b_1}.$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 10.2

Для четырёх различных точек $p_1, p_2, p_3, p_4 \in \mathbb{P}_1$ величина

$$[p_1, p_2, p_3, p_4] = \frac{(p_1 - p_3)(p_2 - p_4)}{(p_1 - p_4)(p_2 - p_3)} = \frac{\det(p_1, p_3) \cdot \det(p_2, p_4)}{\det(p_1, p_4) \cdot \det(p_2, p_3)}. \quad (10-13)$$

называется *двойным отношением*³ этих четырёх точек.

УПРАЖНЕНИЕ 10.14. Пусть точки c, d имеют координаты γ, δ в аффинной карте с началом в b , для которой $a = \infty$, т. е. $c = b + \gamma a, d = b + \delta a$. Убедитесь, что $[a, b, c, d] = \delta / \gamma$.

¹Совпадающие друг с другом, если φ перспектива.

²Эта прямая называется *перекрёстной осью* гомографии φ (по-английски: *cross-axis*).

³По-английски *cross-ratio*.

10.6.1. Геометрический смысл двойного отношения. Согласно формуле (10-10) двойное отношение $[p_1, p_2, p_3, p_4] \in \mathbb{P}_1 = \mathbb{P}(\mathbb{k}^2)$ представляет собою образ точки p_4 при единственном дробно линейном автоморфизме \mathbb{P}_1 , переводящем точки p_1, p_2, p_3 в точки $\infty, 0, 1$ соответственно. Отсюда сразу следует, что двойное отношение четырёх различных точек может принимать любые значения кроме $\infty, 0$ и 1 и что две упорядоченных четвёрки точек тогда и только тогда переводятся одна в другую дробно линейным преобразованием прямой, когда их двойные отношения одинаковы.

Упражнение 10.15. Докажите последнее утверждение.

Поскольку замена однородных координат является именно таким преобразованием, мы заключаем, что правая часть равенства (10-13) не зависит от выбора однородных координат, а средняя часть, содержащая разности аффинных координат точек, не зависит ни от выбора аффинной карты, ни от выбора локальной аффинной координаты в ней, при условии, что эта карта содержит все четыре точки, т. е. значения p_1, p_2, p_3, p_4 конечны.

Упражнение 10.16. Убедитесь в этом а) прямым вычислением б) выведите инвариантность двойного отношения из н° 1.6.2 на стр. 22.

Предложение 10.2

Биекция $\varphi : \mathbb{P}_1 \xrightarrow{\simeq} \mathbb{P}_1$ является линейным проективным изоморфизмом, если и только если она сохраняет двойные отношения.

Доказательство. Пусть φ переводит точки a, b и c в $\infty, 0$ и 1 соответственно. Если φ сохраняет двойные отношения, то каждая точка $t \in \mathbb{P}_1 \setminus \{a, b, c\}$ переходит в точку $\varphi(t) = [a, b, c, t] = \frac{(t-b)(c-a)}{(t-a)(c-b)}$, т. е. φ дробно линейно. \square

10.6.2. Общие и специальные четвёрки точек. Из формулы (10-13) очевидно, что одновременная перестановка двух непересекающихся пар точек не меняет двойного отношения от-
ношения:

$$[p_1, p_2, p_3, p_4] = [p_2, p_1, p_4, p_3] = [p_3, p_4, p_1, p_2] = [p_4, p_3, p_2, p_1] = t. \quad (10-14)$$

где $t \in \mathbb{P}_1 = \mathbb{P}(\mathbb{k}^2)$ это образ точки p_4 при гомографии $\vartheta : (p_1, p_2, p_3) \mapsto (\infty, 0, 1)$. Двойное отношение $[p_2, p_1, p_3, p_4]$ равно образу точки p_4 при гомографии $(p_1, p_2, p_3) \mapsto (0, \infty, 1)$, которая получится, если следом за гомографией ϑ применить гомографию $(\infty, 0, 1) \mapsto (0, \infty, 1)$, действующую по правилу $t \mapsto 1/t$. Тем самым,

$$[p_2, p_1, p_3, p_4] = [p_1, p_2, p_4, p_3] = [p_3, p_4, p_2, p_1] = [p_4, p_3, p_1, p_2] = 1/t \quad (10-15)$$

Аналогично, p_4 переводится в $[p_3, p_2, p_1, p_4]$ и $[p_1, p_3, p_2, p_4]$ гомографиями $(p_1, p_2, p_3) \mapsto (1, 0, \infty)$ и $(p_1, p_2, p_3) \mapsto (\infty, 1, 0)$, композициями ϑ с преобразованиями $(\infty, 0, 1) \mapsto (1, 0, \infty)$ и $(\infty, 0, 1) \mapsto (\infty, 1, 0)$, задаваемыми формулами $t \mapsto t/(t-1)$ и $t \mapsto 1-t$. Поэтому

$$\begin{aligned} [p_3, p_2, p_1, p_4] &= [p_2, p_3, p_4, p_1] = [p_1, p_4, p_3, p_2] = [p_4, p_1, p_2, p_3] = t/(t-1) \\ [p_1, p_3, p_2, p_4] &= [p_3, p_1, p_4, p_2] = [p_2, p_4, p_1, p_3] = [p_4, p_2, p_3, p_1] = 1-t. \end{aligned} \quad (10-16)$$

Поскольку гомографии $(p_1, p_2, p_3) \mapsto (1, \infty, 0)$ и $(p_1, p_2, p_3) \mapsto (0, 1, \infty)$ получаются применением вслед за ϑ гомографий $(\infty, 0, 1) \mapsto (1, \infty, 0)$ и $(\infty, 0, 1) \mapsto (0, 1, \infty)$, действующих по формулам $t \mapsto (t-1)/t$ и $t \mapsto 1/(1-t)$, получаем

$$\begin{aligned} [p_2, p_3, p_1, p_4] &= [p_3, p_2, p_4, p_1] = [p_1, p_4, p_2, p_3] = [p_4, p_1, p_3, p_2] = (t-1)/t \\ [p_3, p_1, p_2, p_4] &= [p_1, p_3, p_4, p_2] = [p_2, p_4, p_3, p_1] = [p_4, p_2, p_1, p_3] = 1/(1-t). \end{aligned} \quad (10-17)$$

Формулы (10-14)-(10-17) описывают все возможные значения двойного отношения, возникающие при 24 перестановках точек p_1, p_2, p_3, p_4 . Если $t \in \mathbb{k}$ таково, что все шесть значений

$$t, \quad 1/t, \quad t/(t-1), \quad 1-t, \quad (t-1)/t, \quad 1/(1-t) \quad (10-18)$$

из правых частей формул (10-14)-(10-17) различны, то никакую перестановку точек p_i кроме четырёх перестановок¹ $(p_1, p_2, p_3, p_4), (p_2, p_1, p_4, p_3), (p_3, p_4, p_1, p_2), (p_4, p_3, p_2, p_1)$ невозможно осуществить дробно линейным преобразованием проективной прямой. Такие четвёрки точек называются *общими*.

При значениях $t = -1, 2, 1/2$, удовлетворяющих равенствам $t = 1/t, t = t/(t-1)$ и $t = 1-t$ соответственно, двойное отношение $[p_1, p_2, p_3, p_4] = t$ пробегает при перестановках точек всего три различных значения и не меняется при транспозициях² $(1, 2), (1, 3), (1, 4)$. Если же t удовлетворяют любому из двух эквивалентных друг другу квадратных уравнений³ $t = (t-1)/t$ или $t = 1/(1-t)$, то двойное отношение точек p_i не меняется при циклических перестановках точек p_1, p_2, p_3 и может принимать всего два различных значения. Четвёрка точек с двойным отношением, равным одному из этих пяти специальных значений, называется *специальной*. Таким образом, при перестановках точек, образующих специальную четвёрку, двойное отношение принимает либо три, либо два различных значения, тогда как для общей четвёрки все шесть значений (10-18) различны. Геометрически, специальность четвёрки точек означает существование гомографии, осуществляющей перестановку этих точек, отличную от четырёх клейновских перестановок.

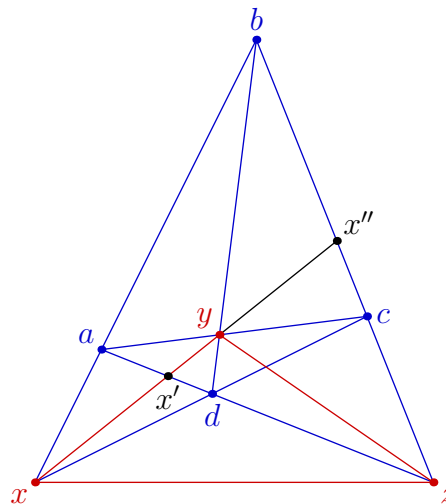


Рис. 10.11.

10.6.3. Гармонические пары точек. Четвёрка точек $\{a, b; c, d\} \in \mathbb{P}_1$ называется *гармонической*, если двойное отношение $[a, b, c, d] = -1$. Геометрически это условие означает, что в аффинной карте, для которой точка a является бесконечностью, точка b является центром тяжести точек c и d . При его выполнении говорят также, что пары точек $\{a, b\}$ и $\{c, d\}$ *гармоничны* по отношению друг к другу. Выше мы видели, что гармоничность двух пар точек равносильна тому, что их двойное отношение не меняется при перестановке точек в одной из этих пар⁴. Так как двойное отношение не меняется при перестановке пар между собой как единого целого, *гармоничность* является *симметричным* бинарным отношением на множестве *неупорядоченных* пар точек на \mathbb{P}_1 .

Пример 10.11 (гармонические пары прямых в четырёхвершиннике, продолжение прим. 10.8)

Покажем, что в каждом из трёх пучков прямых с центрами в вершинах x, y, z треугольника, ассоциированного с четырёхвершинником $abcd$, пара сторон четырёхвершинника гармонична

¹Составляющих группу Клейна из прим. 10.8 на стр. 181.

²А также остальных восьми перестановках из подгруппы, порождённой такой транспозицией и четырьмя клейновскими перестановками.

³Равносильных уравнению $t^2 - t + 1 = 0$, корнями которого являются отличные от -1 кубические корни из единицы, лежащие в поле \mathbb{k} .

⁴См. формулу (10-15) на стр. 186.

паре сторон треугольника xuz , см. рис. 10◊11. Для этого запараметризуем пучок всех проходящих через точку x прямых точками прямой (ad) и одновременно — точками прямой (bc) . Мы должны проверить, что прямая (xu) пересекает прямые (ad) и (bc) по таким точкам x' , x'' , что $[a, d, z, x'] = [b, c, z, x''] = -1$. Поскольку центральные проекции из x и из u являются дробно-линейными изоморфизмами между прямыми (ad) и (bc) , возникают следующие равенства двойных отношений соответственных точек: $[a, d, z, x'] = [b, c, z, x''] = [d, a, z, x']$. Так как при перестановке первых двух точек двойное отношение не поменялось, оно равно -1 .

Ответы и указания к некоторым упражнениям

Упр. 10.2. В правой части стоит геометрическая прогрессия $q^n + q^{n-1} + \dots + q + 1$, а слева — количество ненулевых векторов в $(n + 1)$ -мерном пространстве, делённое на количество ненулевых векторов в одномерном пространстве, т. е. $(q^{n+1} - 1)/(q - 1)$; кто знает, может, именно поэтому полученная формула называется формулой суммирования *геометрической* прогрессии

Упр. 10.3. Это следует из соотношения $(z : 1) = (x_0 : x_1) = (1 : w)$.

Упр. 10.4. Если стягиваемая петля настолько мала, что почти не отличается от точки, устойчивое к малым шевелениям количество точек её пересечения с любой петлёй равно нулю. При изменении размеров петли устойчивые точки пересечения появляются и исчезают по две.

Упр. 10.11. Пусть $L_1 = \mathbb{P}(U)$, $L_2 = \mathbb{P}(W)$, $p = \mathbb{P}(\mathbb{k} \cdot e)$. Поскольку $p \notin L_2$, $V = W \oplus \mathbb{k} \cdot e$. Центральная проекция из p индуцирована линейной проекцией V на W вдоль $\mathbb{k} \cdot e$. Так как $p \notin L_1$, ограничение этой проекции на подпространство U имеет нулевое ядро и, стало быть, является линейным изоморфизмом.

Упр. 10.12. Это частный случай [упр. 10.11](#).

Упр. 10.13. Строим перекрёстную ось ℓ (соединяющую точки $(a_1 b_2) \cap (b_1, a_2)$ и $(c_1 b_2) \cap (b_1, c_2)$) и берём в качестве $\varphi(x)$ точку пересечения прямой ℓ_2 с прямой, соединяющей точки b_1 и $\ell \cap (x, b_2)$.

Упр. 10.14. $\frac{\det(a,c)}{\det(a,d)} \cdot \frac{(b,d)}{\det(b,c)} = \frac{\det(a,b+\gamma a)}{\det(a,b+\delta a)} \cdot \frac{(b,b+\delta a)}{\det(b,b+\gamma a)} = \frac{\delta}{\gamma}$.

Упр. 10.15. Пусть $[p_1, p_2, p_3, p_4] = [q_1, q_2, q_3, q_4]$ и дробно линейные автоморфизмы

$$\varphi_p : \mathbb{P}_1 \xrightarrow{\sim} \mathbb{P}_1 \quad \text{и} \quad \varphi_q : \mathbb{P}_1 \xrightarrow{\sim} \mathbb{P}_1$$

таковы, что прообразами точек $\infty, 0, 1$ являются, соответственно, p_1, p_2, p_3 и q_1, q_2, q_3 . Тогда $\varphi_p(p_4) = \varphi_q(q_4)$ и $\varphi_q^{-1} \circ \varphi_p$ переводит p_1, p_2, p_3, p_4 в q_1, q_2, q_3, q_4 . Наоборот, если $\varphi_p : \mathbb{P}_1 \xrightarrow{\sim} \mathbb{P}_1$ переводит p_1, p_2, p_3 в $\infty, 0, 1$, а φ_{qp} переводит p_1, p_2, p_3, p_4 в q_1, q_2, q_3, q_4 , то $\varphi_p \circ \varphi_{qp}^{-1}$ переводит q_1, q_2, q_3, q_4 , соответственно, в $\infty, 0, 1, [p_1, p_2, p_3, p_4]$, откуда $[p_1, p_2, p_3, p_4] = [q_1, q_2, q_3, q_4]$.