

§13. Дальнейшие вариации на темы квадрик

13.1. Квадрика Пюккера и прямые в \mathbb{P}_3 . Множество всех векторных подпространств размерности m в заданном векторном пространстве V называется *грассманианом* и обозначается $\text{Gr}(m, V)$. Для d -мерного координатного пространства $V = \mathbb{k}^d$ обозначение $\text{Gr}(m, \mathbb{k}^d)$ сокращается до $\text{Gr}(m, d)$. Например, двойственные друг другу проективные подпространства \mathbb{P}_n и \mathbb{P}_n^\times суть грассманианы $\text{Gr}(1, n+1) = \mathbb{P}_n$ и $\text{Gr}(n, n+1) = \mathbb{P}_n^\times$. Простейший грассманиан, не являющийся проективным пространством, это грассманиан $\text{Gr}(2, V) = \text{Gr}(2, 4)$ двумерных векторных подпространств в четырёхмерном векторном пространстве $V \simeq \mathbb{k}^4$ или, что то же самое, множество всех прямых в трёхмерном проективном пространстве $\mathbb{P}_3 = \mathbb{P}(V)$.

13.1.1. Пюккеро вложение. Грассманиан $\text{Gr}(m, V)$ вкладывается в проективное пространство¹ $\mathbb{P}(L^m V)$ при помощи *отображения Пюккера*

$$\mathbb{p} : \text{Gr}(m, V) \hookrightarrow \mathbb{P}(L^m V), \quad U \mapsto L^m U, \quad (13-1)$$

переводящего m -мерное подпространство $U \subset V$ в одномерное подпространство $L^m U \subset L^m V$. Если U порождается векторами u_1, u_2, \dots, u_m , то с точностью до пропорциональности

$$\mathbb{p}(U) = u_1 \wedge u_2 \wedge \dots \wedge u_m.$$

Переход к другому базису подпространства U , состоящему из векторов $w_i = \sum a_{ij} u_j$, заменяет грассманов моном $u_1 \wedge u_2 \wedge \dots \wedge u_m$ на пропорциональный моном²

$$w_1 \wedge w_2 \wedge \dots \wedge w_m = \det(a_{ij}) \cdot u_1 \wedge u_2 \wedge \dots \wedge u_m.$$

Образ пюккерова вложения состоит из всех однородных грассмановых многочленов m -той степени $\omega \in L^m V$, которые раскладываются в произведение m линейных множителей. Такие многочлены называются *разложимыми*. Множество всех разложимых грассмановых многочленов в $L^m V$ описывается системой однородных квадратичных *соотношений Пюккера*³. При $m = 2$ они выглядят особенно просто благодаря следующей кососимметричной версии теоремы о диагонализации квадратичной формы.

УПРАЖНЕНИЕ 13.1 (ТЕОРЕМА ДАРБУ). Убедитесь, что любой однородный грассманов многочлен второй степени над произвольным полем \mathbb{k} в подходящем базисе $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_d$ пространства V принимает вид $\xi_1 \wedge \xi_2 + \xi_3 \wedge \xi_4 + \dots + \xi_{2r-1} \wedge \xi_{2r}$.

ЛЕММА 13.1

Грассманова квадратичная форма $\omega \in L^2 V$ разложима в произведение двух линейных форм, если и только если $\omega \wedge \omega = 0$ в $L^4 V$.

Доказательство. Если $\omega = u_1 \wedge u_2$, то $\omega \wedge \omega = u_1 \wedge u_2 \wedge u_1 \wedge u_2 = 0$. Пользуясь [упр. 13.1](#), запишем произвольную квадратичную форму $\omega \in L^2 V$ в надлежащем базисе e_1, e_2, \dots, e_d в виде $\omega = e_1 \wedge e_2 + e_3 \wedge e_4 + \dots$. Если слагаемых больше одного, $\omega \wedge \omega = 2e_1 \wedge e_2 \wedge e_3 \wedge e_4 + \dots \neq 0$. Поэтому такая форма ω не разложима. \square

¹Здесь и далее $L^m V = \bigoplus_{m=0}^d L^m V$ обозначает пространство *грассмановых многочленов* от векторов e_1, e_2, \dots, e_d какого-либо базиса в V , см. н° 5.6 на стр. 84.

²См. н° 5.6.1 на стр. 86.

³См., например, Предложение 2.4 на стр. 29 лекции

<http://gorod.bogomolov-lab.ru/ps/stud/algebra-3/1415/lec-02.pdf>.

13.1.2. Плюккерова квадрика. Если $\dim V = 4$, то $\dim \Lambda^4 V = 1$ и условие разложимости из лем. 13.1 превращается в одно квадратное уравнение на форму $\omega \in \Lambda^2 V$. А именно, зададим билинейную форму \tilde{q} на $\Lambda^2 V$ так, чтобы для всех $\omega_1, \omega_2 \in \Lambda^2 V$ выполнялось равенство

$$\omega_1 \wedge \omega_2 = \tilde{q}(\omega_1, \omega_2) \cdot e_1 \wedge e_2 \wedge e_3 \wedge e_4, \quad (13-2)$$

где e_1, e_2, e_3, e_4 — произвольный базис в V . Разложимые грассмановы многочлены $\omega \in \Lambda^2$ суть изотропные векторы этой формы. Они образуют в $\mathbb{P}_5 = \mathbb{P}(\Lambda^2 V)$ квадрику *квадрику Плюккера*

$$P = V(q) = \{ \omega \in \Lambda^2 V \mid \omega \wedge \omega = 0 \}. \quad (13-3)$$

УПРАЖНЕНИЕ 13.2. Убедитесь, что форма \tilde{q} , задаваемая равенством (13-2), билинейна, симметрична и невырождена, а при выборе другого базиса в V она умножается на ненулевую константу. Напишите её матрицу Грама в базисе из бивекторов $e_{ij} = e_i \wedge e_j$.

Из упражнения вытекает, что в координатах x_{ij} относительно базиса из бивекторов $e_{ij} = e_i \wedge e_j$ условие разложимости бивектора $\omega = \sum_{ij} x_{ij} e_{ij}$ принимает вид

$$x_{12}x_{34} - x_{13}x_{24} + x_{14}x_{23} = 0. \quad (13-4)$$

При этом плюккерovo вложение (13-1) переводит прямую (ω) , порождённую векторами u, w , строки координат которых в базисе e_1, e_2, e_3, e_4 составляют 2×4 матрицу

$$\begin{pmatrix} u_1 & u_2 & u_3 & u_4 \\ w_1 & w_2 & w_3 & w_4 \end{pmatrix},$$

в бивектор с координатами $x_{ij} = \det \begin{pmatrix} u_i & u_j \\ w_i & w_j \end{pmatrix}$, равными 2×2 минорам этой матрицы.

УПРАЖНЕНИЕ 13.3. Убедитесь в этом и выясните, существует ли комплексная 2×4 -матрица, шесть 2×2 -миноров которой, выписанные в случайном порядке, суть а) $\{2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ б) $\{3, 4, 5, 6, 7, 8\}$? Если да, то предъявите такую матрицу явно.

ЛЕММА 13.2

Две прямые $\ell_1, \ell_2 \subset \mathbb{P}_3$ пересекаются, если и только если их плюккерovy образы ортогональны относительно квадратичной формы (13-2).

Доказательство. Если $\ell_1 \cap \ell_2 = \emptyset$, то в V существует такой базис e_1, e_2, e_3, e_4 , что $\ell_1 = (e_1 e_2)$, а $\ell_2 = (e_3 e_4)$. Тогда $\mathbb{p}(\ell_1) \wedge \mathbb{p}(\ell_2) = e_1 \wedge e_2 \wedge e_3 \wedge e_4 \neq 0$. Если ℓ_1 и ℓ_2 пересекаются в точке a , то $\ell_1 = (ab)$, а $\ell_2 = (ac)$ для некоторых $b, c \in V$, и $\mathbb{p}(\ell_1) \wedge \mathbb{p}(\ell_2) = a \wedge b \wedge a \wedge c = 0$. \square

СЛЕДСТВИЕ 13.1

Для любой точки $p = \mathbb{p}(\ell) \in P$ пересечение плюккеровой квадрики (13-3) с касательной плоскостью в точке p состоит из плюккерovy образов всех прямых, пересекающих ℓ :

$$P \cap T_p P = \{ \mathbb{p}(\ell') \mid \ell' \cap \ell \neq \emptyset \}.$$

13.1.3. Связки и пучки прямых в \mathbb{P}_3 . Множество прямых в \mathbb{P}_3 называется *связкой*, если его пюккерев образ является двумерной плоскостью, лежащей на квадратике Пюккера. Каждая такая плоскость $\pi \subset P$ линейно порождается тройкой неколлинеарных точек $p_i = \mathbb{P}(\ell_i)$, $i = 1, 2, 3$. При этом $\pi = P \cap T_{p_1}P \cap T_{p_2}P \cap T_{p_3}P$. По лем. 13.2 и сл. 13.1 соответствующая связка прямых состоит из всех таких прямых, которые пересекают 3 данные попарно пересекающиеся прямые ℓ_1, ℓ_2, ℓ_3 в \mathbb{P}_3 . Три прямых в \mathbb{P}_3 попарно пересекаются ровно в двух случаях: когда они лежат в одной плоскости или когда они проходят через одну точку. Таким образом, существуют два геометрически разных типа связок прямых на \mathbb{P}_3 :

α -плоскость $\pi_\alpha(O) \subset P$, состоящая из всех прямых, проходящих через данную точку $O \in \mathbb{P}_3$

β -плоскость $\pi_\beta(\Pi) \subset P$, состоящая из всех прямых, лежащих в данной плоскости $\Pi \in \mathbb{P}_3$.

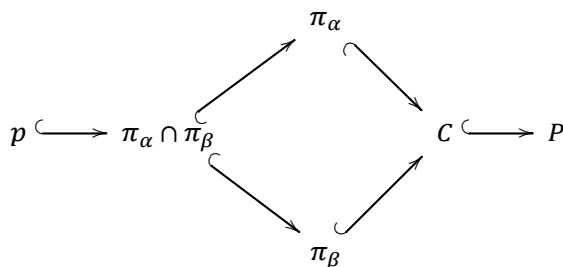
При этом любые две плоскости одного и того же типа всегда пересекаются ровно по одной точке

$$\begin{aligned}\pi_\beta(\Pi_1) \cap \pi_\beta(\Pi_2) &= \mathbb{P}(\Pi_1 \cap \Pi_2) \\ \pi_\alpha(O_1) \cap \pi_\alpha(O_2) &= \mathbb{P}((O_1 O_2)),\end{aligned}$$

а две плоскости различных типов $\pi_\beta(\Pi)$, $\pi_\alpha(O)$ не пересекаются при $O \notin \Pi$ и пересекаются по прямой при $O \in \Pi$. Последняя прямая является пюккеревым образом пучка прямых, лежащих в плоскости Π и проходящих через точку $O \in \Pi$.

Упражнение 13.4. Покажите, что всякая прямая, лежащая на квадратике Пюккера, является пересечением α -плоскости с β -плоскостью, и тем самым, представляет собою пучок прямых, лежащих в некоторой плоскости и проходящих там через одну точку.

13.1.4. Клеточное разбиение пюккеревой квадратки. Зафиксируем какую-нибудь дополнительную к точке $p \in P$ трёхмерную гиперплоскость $H \subset T_p P$ в четырёхмерном касательном пространстве $T_p P$ к квадратике Пюккера $P \subset \mathbb{P}_5$. Особая квадратка $C = P \cap T_p P$ представляет собою простой конус с вершиной p над неособой квадратикой $G = H \cap P$, изоморфной квадратике Сегре в \mathbb{P}_3 . Это приводит к следующей стратификации пюккеревой квадратки замкнутыми подмножествами:



Открытые подмножества этих стратов, дополнительные к объединению стратов меньшей размерности, могут быть бирационально отождествлены с аффинными пространствами, в результате чего возникает разбиение пюккеревой квадратки P дизъюнктное объединение

$$\mathbb{A}^0 \sqcup \mathbb{A}^1 \sqcup \left(\begin{array}{c} \mathbb{A}^2 \\ \sqcup \\ \mathbb{A}^2 \end{array} \right) \sqcup \mathbb{A}^3 \sqcup \mathbb{A}^4,$$

где $A^0 = p$, $A^1 = (\pi_\alpha \cap \pi_\beta) \setminus p$, аффинные плоскости A^2 суть дополнения $\pi_\alpha \setminus (\pi_\alpha \cap \pi_\beta)$ и $\pi_\beta \setminus (\pi_\alpha \cap \pi_\beta)$. Пространство $A^3 = A^1 \times A^2$ это конус с выколотой вершиной p над дополнением $G \setminus (G \cap T_p G)$ до пары пересекающихся образующих на квадрике Сегре. Это дополнение отождествляется с A^2 проекцией из точки пересечения прямых на плоскость.

УПРАЖНЕНИЕ 13.5. Покажите, что проекция гладкой квадрики $Q \subset \mathbb{P}^n$ из любой точки $p \in Q$ на произвольную гиперплоскость $\Gamma \not\ni p$ задаёт бирациональную биекцию между дополнением $Q \setminus T_p Q$ и аффинным пространством $\Gamma \setminus T_p \Gamma \simeq \mathbb{A}^{n-1}$.

По этой же причине $P \setminus T_p P \simeq \mathbb{A}^4$.

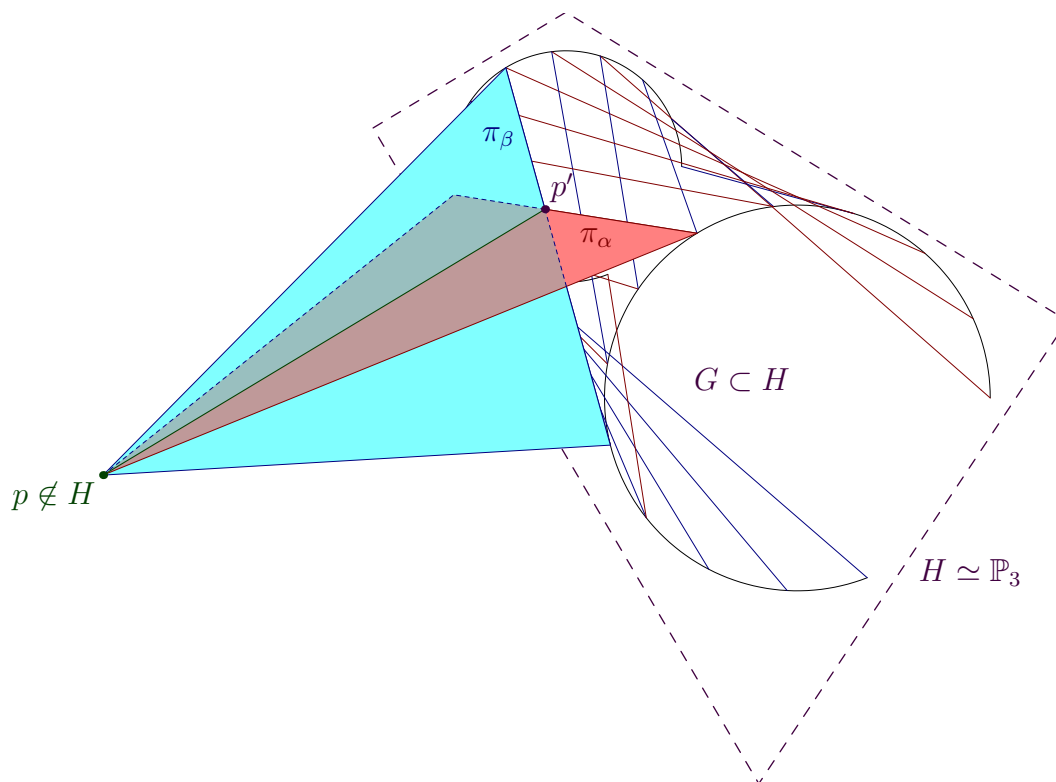


Рис. 13.1. Конус $C = P \cap T_p P$.

ПРИМЕР 13.1

Прикинем, сколько прямых пересекает четыре заданные попарно не пересекающиеся прямые $\ell_i \subset \mathbb{P}^3$, $1 \leq i \leq 4$. Искомое множество представляет собою пересечение квадрики Плюккера P и четырёх её касательных гиперплоскостей T_{p_i} в точках $p_i = \mathbb{P}(\ell_i) \in P$. При достаточно общем выборе точек $p_1, p_2 \in P$ пересечение $S(p_1, p_2) = P \cap T_{p_1} P \cap T_{p_2} P$ является гладкой квадрикой Сегре в трёхмерном проективном пространстве $T_{p_1} P \cap T_{p_2} P$. Если передвинуть прямые ℓ_1 и ℓ_2 в \mathbb{P}^3 так, чтобы они стали пересекаться, квадрика $S(p_1, p_2)$ вырождается в объединение α -плоскости $\pi_\alpha(p_{12})$ и β -плоскости $\pi_\beta(P_{12})$, где $p_{12} = \ell_1 \cap \ell_2 \in \mathbb{P}^3$, а $P_{12} \subset \mathbb{P}^3$ обозначает плоскость, порождённую пересекающимися прямыми ℓ_1, ℓ_2 . Две такие вырожденные квадрики, отвечающие двум парам пересекающихся прямых ℓ_1, ℓ_2 и ℓ_3, ℓ_4 , в общем случае трансверсально пересекаются по двум точкам: прямой $(p_{12} p_{34})$ и прямой $P_{12} \cap P_{34}$, причём эти точки лежат вне множеств особых точек обеих распавшихся квадрик. Поэтому можно ожидать, что при достаточно общем выборе прямых ℓ_i гладкие квадрики $S(p_1, p_2)$ и $S(p_2, p_3)$ тоже трансверсально

пересекаются по двум точкам, т. е. что при достаточно общем выборе четырёх заданных попарно скрещивающихся прямых имеется ровно две прямые, пересекающие все четыре заданных.

УПРАЖНЕНИЕ 13.6. При помощи [предл. 11.9](#) на стр. 207 точно опишите множество прямых, пересекающих 4 данные попарно не пересекающиеся прямые в а) $\mathbb{P}(\mathbb{C}^4)$ б) $\mathbb{A}(\mathbb{C}^4)$ в) $\mathbb{P}(\mathbb{R}^4)$ г) $\mathbb{A}(\mathbb{R}^4)$ в зависимости от расположения этих четырёх прямых. Укажите все возможные ответы и выясните, какие из них устойчивы к малым шевелениям четырёх данных прямых.

13.1.5. Прямые в пространстве со скалярным произведением. Допустим, что на четырёхмерном пространстве V задана невырожденная квадратичная форма g . Тогда она индуцирует билинейную форму \tilde{g}_2 на пространстве $\Lambda^2 V$, значение которой на парах разложимых бивекторов равно взаимному определителю Грама соответствующих пар векторов:

$$\tilde{g}_2(u_1 \wedge w_1, u_2 \wedge w_2) \stackrel{\text{def}}{=} \det \begin{pmatrix} \tilde{g}(u_1, w_1) & \tilde{g}(u_1, w_2) \\ \tilde{g}(u_2, w_1) & \tilde{g}(u_2, w_2) \end{pmatrix}. \quad (13-5)$$

УПРАЖНЕНИЕ 13.7. Убедитесь, что билинейная форма (13-5) симметрична и невырождена, и напишите её матрицу Грама в базисе $e_i \wedge e_j$, построенном по а) ортогональному б) гиперболическому базису e_1, e_2, e_3, e_4 формы g .

Из [лем. 11.1](#) на стр. 192 вытекает, что пересечение квадратки $G_2 = V(g_2) \subset \mathbb{P}(\Lambda^2 V)$ с квадратикой Плюккера P состоит из плюккеревых образов всех прямых $\ell \subset \mathbb{P}(V)$, касающихся квадратки $G = V(g) \subset \mathbb{P}(V)$. Полярное преобразование $\bar{g} : \mathbb{P}_3 \rightarrow \mathbb{P}_3^\times$ относительно квадратки G задаёт на множестве прямых в \mathbb{P}_3 инволюцию Ходжа, которая переводит прямую $\ell = (uw)$ в полярную относительно квадратки G прямую $\ell^* = \bar{g}(u) \cap \bar{g}(w)$, где $\bar{g}(u), \bar{g}(w) \subset \mathbb{P}_3$ — плоскости, полярные точкам u, w . Инволюция Ходжа продолжается по линейности до инволютивного проективного автоморфизма $*$: $\mathbb{P}(\Lambda^2 V) \rightarrow \mathbb{P}(\Lambda^2 V)$, задаваемого таким линейным оператором

$$* : \Lambda^2 V \rightarrow \Lambda^2 V, \omega \mapsto \omega^*, \text{ что} \quad (13-6) \\ \forall \omega_1, \omega_2 \in \Lambda^2 V \quad \omega_1 \wedge \omega_2^* = \tilde{g}_2(\omega_1, \omega_2) \cdot e_1 \wedge e_2 \wedge e_3 \wedge e_4.$$

Этот оператор называется *звёздочкой Ходжа*. Согласно [п° 12.6](#) на стр. 226, плюккерово скалярное произведение (13-2) задаёт биекцию между квадратичными формами и самосопряжёнными операторами на $\Lambda^2 V$. Звёздочка Ходжа в этой биекции соответствует квадратичной форме g_2 из (13-5). Действительно, соотношение (13-6) как раз и утверждает, что

$$\tilde{g}_2(\omega_1, \omega_2) = \tilde{q}(\omega_1, \omega_2^*) \quad (13-7)$$

Обратите внимание, что и плюккерово скалярное произведение на $\Lambda^2 V$, и оператор Ходжа зависят от выбора базиса $e_1 \wedge e_2 \wedge e_3 \wedge e_4$ в одномерном пространстве $\Lambda^4 V$, но при выборе другого базиса умножаются на одну и ту же константу, так что соотношение (13-7) имеет место при любом выборе базиса.

УПРАЖНЕНИЕ 13.8. Убедитесь, что звёздочка Ходжа задаёт на проективном пространстве $\mathbb{P}_5 = \mathbb{P}(\Lambda^2)$ нетождественную инволюцию, действующую на прямые $(e_i e_j) \subset \mathbb{P}_3$, порождённые векторами произвольного ортогонального базиса формы g в V , по правилу $(e_i e_j)^* = (e_k e_\ell)$, где $\{i, j, k, \ell\} = \{1, 2, 3, 4\}$.

ПРИМЕР 13.2 (Сегре – Плюккер – Веронезе)

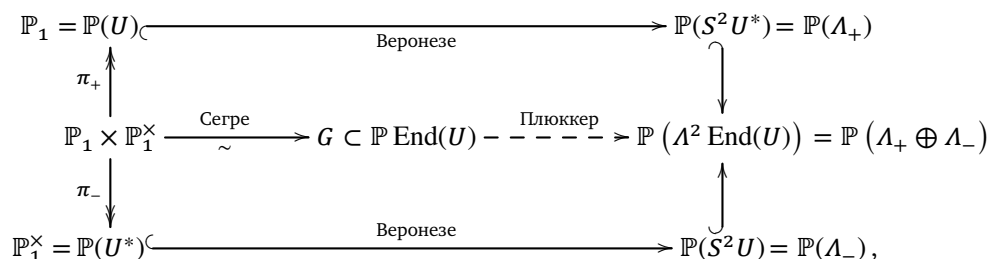
Рассмотрим четырёхмерное пространство $V = \text{End}(U)$ эндоморфизмов двумерного векторного пространства $U = \mathbb{K}^2$ и квадратичную форму $g = \det$ на нём. Изотропные векторы этой квадратичной формы образуют в $\mathbb{P}_3 = \mathbb{P}(\text{End}(U))$ квадрику Сегре $G = \{f : U \rightarrow U \mid \det f = 0\}$, которая замечается двумя семействами прямолинейных образующих¹ и бирационально изоморфна произведению $\mathbb{P}_1 \times \mathbb{P}_1^\times = \mathbb{P}(U) \times \mathbb{P}(U^*)$. Поляризация квадратичной формы \det задаёт на пространстве 2×2 матриц гиперболическое скалярное произведение

$$\widetilde{\det}(F_1, F_2) = \frac{1}{2} \text{tr } F_1 F_2^\vee, \quad \text{где} \quad \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^\vee = \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} \quad (13-8)$$

это присоединённая матрица² Пусть операторы $f_1, f_2, f_1^*, f_2^* : U \rightarrow U$ образуют гиперболический базис формы \det в $V = \text{End } U$. Согласно [упр. 13.7](#) звёздочка Ходжа действует на составленные из них бивекторы по правилу:

$$\begin{aligned} f_1 \wedge f_1^* &\leftrightarrow f_2 \wedge f_2^*, \\ f_1 \wedge f_2 &\mapsto f_1 \wedge f_2 \quad f_1 \wedge f_2^* \mapsto -f_1 \wedge f_2^*, \\ f_1^* \wedge f_2^* &\mapsto f_1^* \wedge f_2^* \quad f_2 \wedge f_1^* \mapsto -f_2 \wedge f_1^*. \end{aligned}$$

Таким образом, звёздочка Ходжа является линейной инволюцией векторного пространства $\Lambda^2 V$, которое распадается в прямую сумму $\Lambda^2 V = \Lambda_+ \oplus \Lambda_-$ двух её трёхмерных собственных подпространств $\Lambda_\pm = \{\omega \in \Lambda^2 V \mid \omega^* = \pm \omega\}$, отвечающих собственным числам ± 1 и ортогональных друг другу относительно формы Плюккера. Проективизации этих собственных подпространств $\mathbb{P}(\Lambda_\pm)$ образуют в \mathbb{P}_5 пару дополнительных двумерных плоскостей, поточечно неподвижных относительно инволюции Ходжа и трансверсально пересекающих квадрику Плюккера P по двум гладким коникам, которые являются плюккеровыми образами двух семейств прямолинейных образующих квадрики Сегре $G \subset \mathbb{P}(V)$, ибо каждая лежащая на G прямая автополярна относительно G , и наоборот, любая G -автополярная прямая в $\mathbb{P}_3 = \mathbb{P}(V)$ с необходимостью лежит на квадрике Сегре. Состоящее из всех касательных к G прямых пересечение $P \cap V(\Lambda^2 \det)$ является линейным соединением коник $P \cap \mathbb{P}(\Lambda_\pm)$. Отождествляя каждую из этих коник с коникой Веронезе, мы можем интерпретировать точки, лежащие в плоскостях $\mathbb{P}(\Lambda_+)$ и $\mathbb{P}(\Lambda_-)$, как неупорядоченные пары точек на двойственных прямых $\mathbb{P}_1 = \mathbb{P}(U)$ и $\mathbb{P}_1^\times = \mathbb{P}(U^*)$ так, что возникает коммутативная диаграмма



нижняя и верхняя горизонтальные стрелки которой переводят пересекающиеся в точке $u \otimes \xi$ прямолинейные образующие $u \otimes \mathbb{P}_1^\times$ и $\mathbb{P}_1 \times \xi$ квадрики G , соответственно, в одномерные

¹См. н° 11.5.1 на стр. 206.

²Ср. с форм. (5-15) на стр. 80 из н° 5.4.2.

подпространства в $L^2 \text{End}(U)$, натянутые на грассмановы бивекторы

$$(u \otimes \xi_1) \wedge (u \otimes \xi_2) \quad \text{и} \quad (u_1 \otimes \xi) \wedge (u_2 \otimes \xi),$$

где u_1, u_2 и ξ_1, ξ_2 произвольные базисы в U и U^* .

УПРАЖНЕНИЕ 13.9. Убедитесь, что эти одномерные подпространства не зависят от выбора базисов в U и U^* и переводятся в себя звёздочкой Ходжа.

13.2. Пучки квадратик. Прямые в пространстве $\mathbb{P}(S^2V^*)$ квадратик на $\mathbb{P}_n = \mathbb{P}(V)$ называются *пучками квадратик*. Такой пучок $(Q_0Q_1) \subset \mathbb{P}(S^2V^*)$ однозначно задаётся любой парой различных лежащих в нём квадратик $Q_0 = V(q_0)$, $Q_1 = V(q_1)$ и состоит из всех квадратик вида

$$Q_\lambda = V(\lambda_0q_0 + \lambda_1q_1) = \{v \in \mathbb{P}(V) \mid \lambda_0q_0(v) + \lambda_1q_1(v) = 0\}, \quad (13-9)$$

где $\lambda = (\lambda_0 : \lambda_1) \in \mathbb{P}_1 = \mathbb{P}(\mathbb{k}^2)$.

Пересечение базисных квадратик $B = Q_0 \cap Q_1$ называется *базисным множеством* пучка. Поскольку каждая квадратика из пучка (13-9) проходит через B , базисное множество не зависит от выбора базисных квадратик Q_0, Q_1 на прямой (Q_0Q_1) . Многочлен

$$\chi_{(q_0q_1)}(t_0, t_1) \stackrel{\text{def}}{=} \det(t_0q_0 + t_1q_1) \in \mathbb{k}[t_0, t_1] \quad (13-10)$$

называется *характеристическим многочленом* пучка (13-9). Это однородный многочлен степени $(n+1)$ от $t = (t_0 : t_1)$. В отличие от базисного множества, он *зависит* от выбора базисных квадратик Q_0, Q_1 , и при переходе к другим двум базисным квадратикам в том же самом пучке переменные $(t_0 : t_1)$ подвергаются обратимому линейному преобразованию. Поэтому алгебраическим инвариантом пучка является не сам многочлен (13-10), а только его класс по модулю обратимой линейной замены переменных. Пучок квадратик называется *невыврожденным*, если в нём есть хоть одна гладкая квадратика. Это означает, что характеристический многочлен (13-10) отличен от нуля хотя бы в одной точке на \mathbb{P}_1 , и в частности, является ненулевым многочленом. Поэтому в невырожденном пучке квадратик на \mathbb{P}_n содержится не более $(n+1)$ особых квадратик, причём вершинные подпространства никаких двух из них не пересекаются, поскольку вектор, лежащий в ядре сразу двух корреляций \hat{q}_0, \hat{q}_1 , лежал бы и в ядре любой их линейной комбинации $\lambda_0\hat{q}_0 + \lambda_1\hat{q}_1$, так что все квадратик пучка оказались бы вырождены.

13.2.1. Спектр невырожденного пучка. Множество вырожденных квадратик в невырожденном пучке (13-9) называется *спектром* этого пучка. Квадратичные формы $\lambda_0q_0 + \lambda_1q_1$, задающие квадратик из спектра, биективно соответствуют корням $\lambda = (\lambda_0 : \lambda_1)$ характеристического многочлена (13-10). Под *кратностью* вырожденной квадратик, отвечающей корню λ многочлена (13-10), мы всегда понимаем кратность $\text{mult}(\lambda)$ этого корня, т. е. максимальное $n \in \mathbb{N}$, такое что многочлен (13-10) делится на $\det^n(\lambda, t) = (t_1\lambda_0 - t_0\lambda_1)^n$ в кольце многочленов $\mathbb{k}[t_0, t_1]$. Удобно также считать, что все гладкие квадратик пучка имеют в нём кратность нуль. Над алгебраически замкнутым полем спектр любого невырожденного пучка квадратик на \mathbb{P}_n состоит ровно из $(n+1)$ квадратик с учётом их кратностей. Рассматриваемый как набор из $n+1$ неупорядоченных точек на \mathbb{P}_1 с точностью до дробно линейного автоморфизма \mathbb{P}_1 , он не зависит от выбора базиса в пучке.

ЛЕММА 13.3

В невырожденном пучке квадратик кратность $\text{mult}S$ каждой особой квадратик S строго больше размерности $\dim \text{Sing } S$ пространства её особых точек.

Доказательство. Пусть квадрика $G \subset \mathbb{P}_n$ неособа, а пространство особых точек $\text{Sing } S$ квадрики $S \subset \mathbb{P}_n$ имеет размерность $\dim \text{Sing } S = k$. Это означает, что задающая квадрику S квадратичная форма $s \in S^2 V^*$ имеет $(k + 1)$ -мерное ядро и $\text{rk } s = n - k$, т. е. все миноры порядка $> (n - k)$ в её матрице Грама нулевые. По формуле для определителя пучка матриц из прим. 5.5 на стр. 88 характеристический многочлен пучка (SG)

$$\det(t_0 s + t_1 g) = \sum_{m=0}^{n+1} t_0^m t_1^{n+1-m} \cdot \sum_{\#I=\#J=m} g_{IJ} s_{ij} \tag{13-11}$$

делится на t_0^{k+1} . Поэтому кратность задающей S точки $t = (0 : 1) \in \mathbb{P}_1$ не менее $k + 1$. \square

13.2.2. Пример: невырожденные пучки коник. Над алгебраически замкнутым полем \mathbb{K} невырожденный пучок коник на $\mathbb{P}_2 = \mathbb{P}(V)$ может содержать 1, 2 или 3 различных особых коники, а его базисное множество конечно и может состоять из 1, 2, 3 или 4 различных точек. Если в пучке есть двойная прямая, то все его базисные точки лежат на этой прямой. Если в пучке есть распавшаяся коника $\ell_1 \cup \ell_2$, то все базисные точки такого пучка лежат на $\ell_1 \cup \ell_2$, причём на каждой из прямых ℓ_1, ℓ_2 имеется хотя бы одна базисная точка.

Если базисное множество пучка состоит из единственной точки p , особой коникой в нём может быть лишь двойная прямая, касающаяся любой гладкой коники пучка в точке p . Наоборот, любая гладкая коника C и касающаяся её в произвольной точке $p \in C$ двойная прямая ℓ задают регулярный пучок коник с единственной базисной точкой p , и единственной особой коникой — двойной прямой ℓ . Все гладкие коники этого пучка пересекаются друг с другом по единственной точке p и имеют в ней общую касательную см. рис. 13◊2.

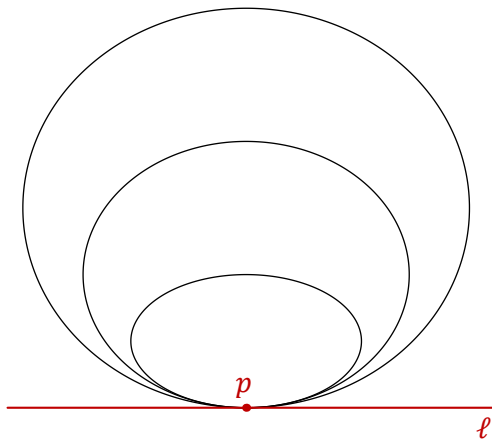


Рис. 13◊2. Пучок с одной базисной точкой ($a = b = c = d = p$).

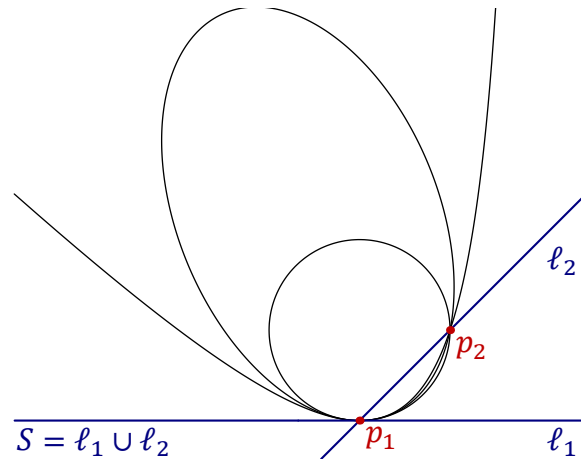


Рис. 13◊3. Пучок с двумя базисными точками $p_1 = a = b = c, p_2 = d$ и одной вырожденной коникой S .

Если базисное множество пучка состоит из двух точек p_1, p_2 , вырожденными кониками в нём могут быть или двойная прямая $\ell = (p_1 p_2)$ или такая распавшаяся коника $\ell_1 \cup \ell_2$, что $p_1 \in \ell_1, p_2 \in \ell_2$ и либо обе точки p_1, p_2 отличны от особой точки $\ell_1 \cap \ell_2$, как на рис. 13◊4, либо $p_1 = \ell_1 \cap \ell_2$, а $p_2 \neq \ell_1 \cap \ell_2$, как на рис. 13◊3. В последнем случае распавшаяся коника $\ell_1 \cap \ell_2$ является единственной особой коникой в пучке, а каждая гладкая коника пучка касается прямой ℓ_1 в точке p_1 и проходит через точку p_2 , см. рис. 13◊3. В частности, любые две гладкие коники в таком пучке пересекаются ровно по двум точкам p_1, p_2 и имеют в точке p_1 общую касательную.

Двойная прямая $\ell = (p_1 p_2)$ и распавшаяся коника $\ell_1 \cup \ell_2$ с $p_1 \in \ell_1 \setminus \ell_2, p_2 \in \ell_2 \setminus \ell_1$ могут появиться в пучке с двумя базисными точками p_1, p_2 только одновременно, ибо множество всех коник на \mathbb{P}^2 , которые касаются двух заданных прямых ℓ_1, ℓ_2 в двух заданных точках $p_1 \in \ell_1, p_2 \in \ell_2$, отличных от $\ell_1 \cap \ell_2$, автоматически является пучком.

УПРАЖНЕНИЕ 13.10. Докажите это и убедитесь, что такой пучок содержит ровно две вырожденные коники: двойную прямую $\ell = (p_1 p_2)$ и распавшуюся конику $\ell_1 \cup \ell_2$.

Прямые ℓ_1 и ℓ_2 однозначно восстанавливаются по двойной прямой ℓ и любой гладкой конике C из пучка как касательные к C в двух точках пересечения $C \cap \ell$.

Если базисное множество пучка коник состоит из трёх точек p_1, p_2, p_3 , то они не коллинеарны¹. В частности, такой пучок не содержит двойных прямых. Кроме того, ни одна из точек p_i не может быть особой одновременно для двух распавшихся коник из пучка: иначе все коники пучка были бы особыми в этой точке. Распавшаяся коника $\ell_1 \cup \ell_2$ в таком пучке проходит через базисные точки либо так, что $p_1 = \ell_1 \cap \ell_2, p_2 \in \ell_1 \setminus \ell_2, p_3 \in \ell_2 \setminus \ell_1$, либо так, что $p_1 \in \ell_1 \setminus \ell_2, p_2, p_3 \in \ell_2 \setminus \ell_1$. На рис. 13◊5 первое отвечает прямым ℓ'_1, ℓ'_2 , второе — прямым ℓ''_1, ℓ''_2 .

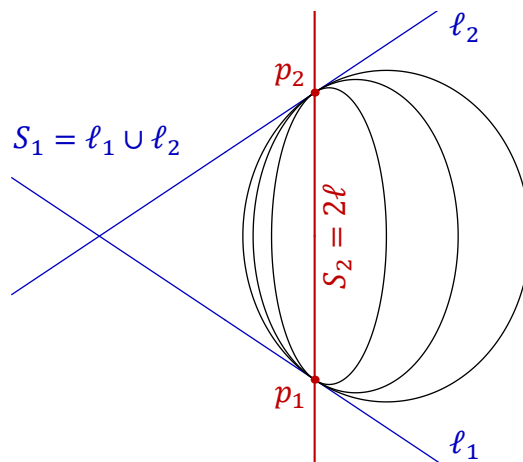


Рис. 13◊4. Пучок с двумя базисными точками $p_1 = a = b, p_2 = c = d$ и двумя вырожденными кониками S_1, S_2 .

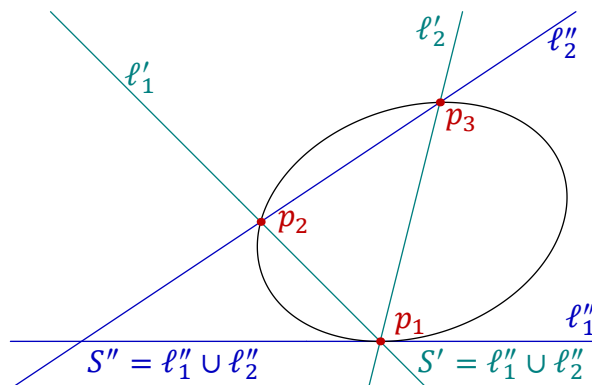


Рис. 13◊5. Пучок с тремя базисными точками $p_1 = a = b, p_2 = c, p_3 = d$ и двумя вырожденными кониками S_1, S_2 .

Во втором случае любая гладкая коника C из пучка касается прямой ℓ_1 в точке p_1 . В первом случае все гладкие коники пучка имеют в точке p_1 общую касательную, поскольку проходящая через p_1 прямая ℓ , касаящаяся фиксированной гладкой коники C из пучка в точке $p_1 \in C$, соприкасается в точке p_1 с каждой коникой пучка, порождённого коникой C и распавшейся коникой $\ell''_1 \cup \ell''_2$, которая тоже касается прямой ℓ в точке $p_1 = \ell''_1 \cap \ell''_2$.

УПРАЖНЕНИЕ 13.11. Убедитесь в этом и покажите, что множество всех коник $C \subset \mathbb{P}^2$, касающихся заданной прямой ℓ в заданной точке $p \in \ell$ и проходящих через две другие различные

¹Иначе содержащая базисные точки прямая пересекала бы любую гладкую конику пучка по трём точкам.

заданные точки $a, b \notin \ell$, составляют пучок, содержащий ровно две вырожденные коники: $(ab) \cup \ell$ и $(pa) \cup (pb)$.

Пучок коник, спектр которого состоит из трёх разных точек, называется *простым*. По лем. 13.3 все точки спектра простого пучка имеют кратность 1, и по предыдущему базисное множество такого пучка состоит из четырёх различных точек a, b, c, d , никакие 3 из которых не коллинеарны.

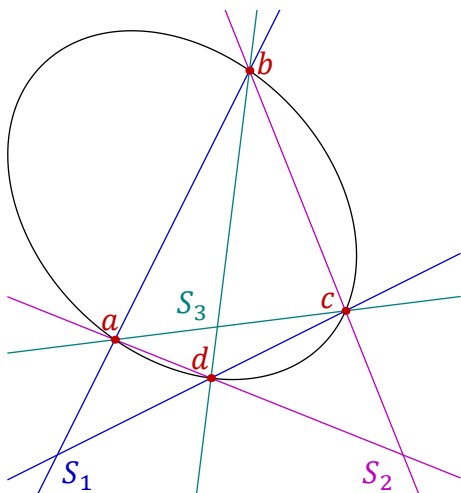


Рис. 13◊6. Три особые коники простого пучка с базисными точками a, b, c, d .

Упражнение 13.12. Покажите, что множество всех коник, проходящих через 4 различные точки a, b, c, d , никакие 3 из которых не коллинеарны, представляет собою простой пучок, три особые коники которого суть пары противоположных сторон четырёхвершинника $abcd$, как на рис. 13◊6. Таким образом, простой пучок коник однозначно определяется четырьмя своими базисными точками a, b, c, d , и в однородных координатах $x = (x_0 : x_1 : x_2)$ на \mathbb{P}_2 уравнения его коник имеют вид

$$\frac{\det(x, a, b) \cdot \det(x, c, d)}{\det(x, a, d) \cdot \det(x, b, c)} = \frac{\lambda_0}{\lambda_1},$$

где $\lambda = (\lambda_0 : \lambda_1)$ пробегает \mathbb{P}_1 . Все предыдущие примеры являются вырождениями простого пучка и получаются из него, когда некоторые из базисных точек слипаются друг с другом. А именно, пучок на рис. 13◊5 возникает при $a, b \rightarrow p_1, c = p_2, d = p_3$, пучок на рис. 13◊4 — когда $a, b \rightarrow p_1, c, d \rightarrow p_2$, пучок на рис. 13◊3 — если $a, b, c \rightarrow p_1, d = p_2$, а на рис. 13◊2 все четыре базисные точки схлопываются в одну. К какому из перечисленных типов принадлежит заданный пучок коник (CD) , геометрически определяется взаимным расположением в пространстве коник $\mathbb{P}_5 = \mathbb{P}(S^2V^*)$ прямой $L = (CD)$ и кубической гиперповерхности особых коник $\Sigma = \{q \in \mathbb{P}_5 \mid \det q = 0\}$. В случае простого пучка прямая L трансверсально пересекает эту гиперповерхность в трёх её гладких точках. Прямая L , касающаяся Σ в гладкой точке и трансверсально пересекающая в другой гладкой точке, задаёт такой пучок, как на рис. 13◊5, причём точке касания L с Σ отвечает распавшаяся коника с особенностью в базисной точке пучка. Прямая L , проходящая через особую точку гиперповерхности Σ и трансверсально пересекающая с Σ в ещё одной гладкой точке, задаёт пучок, показанный на рис. 13◊4, и в нём особой точке пересечения отвечает двойная прямая. Прямая L которая пересекает гиперповерхность Σ с кратностью 3 в единственной гладкой точке, задаёт пучок с рис. 13◊3. А максимально вырожденный из невырожденных пучков, представленный на рис. 13◊2, отвечает прямой L , которая пересекает гиперповерхность Σ с кратностью 3 в единственной точке, которая к тому же ещё и особа.

Что такое простые и особые точки проективной гиперповерхности, и что такое кратность пересечения, объясняется ниже.

13.2.3. Касательное пространство к проективной гиперповерхности. Рассмотрим проективную гиперповерхность $V(f) \subset \mathbb{P}_n$, заданную однородным многочленом f степени d , и не лежащую на ней прямую $(ab) \subset \mathbb{P}_n$, проходящую через точку $a \in V(f)$. Ограничение многочлена f на прямую (ab) является ненулевым однородным многочленом степени d

$$f_{ab}(\lambda, \mu) \stackrel{\text{def}}{=} f(\lambda a + \mu b)$$

от однородной координаты $(\lambda : \mu)$ на прямой (ab) . Точка $a = (1 : 0)$ является его корнем. Кратность этого корня называется *кратностью пересечения* прямой (ab) с гиперповерхностью $V(f)$ в точке a . Таким образом, над алгебраически замкнутым полем \mathbb{k} любая прямая либо лежит на гиперповерхности $V(f)$, либо пересекает её ровно по d точкам, учитываемым с кратностями, равными кратностям пересечения прямой и гиперповерхности в этих точках.

Прямая (ab) называется *касательной* к гиперповерхности $V(f)$ в точке a , если она лежит на этой гиперповерхности или пересекает её в точке a с кратностью ≥ 2 . Объединение всех прямых, касающихся гиперповерхности $V(f)$ в точке $a \in V(f)$, называется *касательным пространством* к гиперповерхности f в точке a и обозначается $T_a V(f)$.

Минимальная из кратностей пересечений гиперповерхности $V(f)$ со всевозможными проходящими через точку $a \in V(f)$ прямыми называется *кратностью точки a* на гиперповерхности $V(f)$. Если она равна единице, точка a называется *гладкой*, если больше единицы — *особой*. Таким образом, точка $a \in V(f)$ особа, если и только если $T_a V(f) = \mathbb{P}_n$.

УПРАЖНЕНИЕ 13.13. Покажите, что точка $a \in V(f)$ особа тогда и только тогда, когда все частные производные от многочлена f зануляются в точке a , и что касательное пространство $T_a V(f)$ в гладкой точке a является проективным подпространством коразмерности 1 и задаётся однородным линейным уравнением $\sum_{i=0}^n \frac{\partial f}{\partial x_i}(a) \cdot x_i = 0$.

13.2.4. Гиперповерхность особых квадратик. Множество всех особых квадратик на $\mathbb{P}_n = \mathbb{P}(V)$ образует в пространстве квадратик $\mathbb{P}(S^2 V^*)$ алгебраическую гиперповерхности степени $(n + 1)$

$$\Sigma = V(\det) = \{q \in S^2 V^* \mid \det(q) = 0\}. \quad (13-12)$$

ЛЕММА 13.4

Особая квадратика $S \in \Sigma$ является гладкой точкой гиперповерхности особых квадратик Σ тогда и только тогда, когда сама квадратика $S \subset \mathbb{P}(V)$ имеет единственную особую точку, и в этом случае касательное пространство $T_S \Sigma \subset \mathbb{P}(S^2 V^*)$ состоит из всех квадратик $Q \subset \mathbb{P}(V)$, проходящих через особую точку квадратика S .

Доказательство. Ограничение многочлена \det на прямую $(SQ) \subset \mathbb{P}(S^2 V^*)$, где точка $S \in \Sigma$ отвечает особой квадратике $S = V(s) \subset \mathbb{P}(V)$, а точка $Q \in \mathbb{P}(S^2 V^*)$ отвечает произвольной квадратике $Q = V(q) \subset \mathbb{P}(V)$, задаётся в аффинной окрестности точки S на прямой (SQ) уравнением¹

$$0 = \det(s + tq) = \det(s) + t \cdot \sum_{ij} q_{ij} s_{ij}^\vee + \text{члены, делящиеся на } t^2,$$

где s_{ij}^\vee означает алгебраическое дополнение к (ij) -тому элементу матрицы s . Квадратика S отвечает корню $t = 0$. Он кратный тогда и только тогда, когда , когда

$$\sum_{ij} q_{ij} s_{ij}^\vee = 0. \quad (13-13)$$

Это линейное уравнение на q нетривиально, если и только если в матрице s имеется хоть один ненулевой минор порядка $\dim V - 1$, т. е. когда $\dim \ker s = 1$. Поскольку² $s \cdot s^\vee = s^\vee \cdot s = \det(s) \cdot E = 0$, каждый столбец и каждая строка присоединённой матрицы $s^\vee = (s_{ij}^\vee)$ лежит в

¹См. формулу (13-11) на стр. 237.

²Ср. с правилом Крамера для отыскания ненулевого решения системы однородных линейных уравнений из предл. 5.5.

ядре матрицы s . Поэтому $\text{rk } s^\vee = 1$, и все строки и столбцы симметричной матрицы s^\vee пропорциональны координатам особой точки

$$p = (p_0 : p_1 : \dots : p_n) = (s_{i0}^\vee : s_{i1}^\vee : \dots : s_{in}^\vee) = (s_{0j}^\vee : s_{1j}^\vee : \dots : s_{nj}^\vee)$$

квадрики S . Условие касания (13-13) превращается в равенство $\sum_{ij} q_{ij} p_i p_j = q(p) = 0$, как раз и означающее, что квадратика Q проходит через особую точку p квадратика S . \square

Следствие 13.2

Прямая $(PQ) \subset \mathbb{P}(S^2V^*)$ касается гиперповерхности особых квадратик Σ в точке $Q \in \Sigma$ тогда и только тогда, когда $P \cap \text{Sing } Q \neq \emptyset$, и лежит на Σ , если и только если $\text{Sing } P \cap \text{Sing } Q \neq \emptyset$. \square

Пример 13.3

При $n = 2$ особыми точками гиперповерхности особых коник $\Sigma \subset \mathbb{P}_5$ являются двойные прямые, а распавшиеся коники суть гладкие точки гиперповерхности Σ . Если пучок коник (QS) касается Σ в гладкой точке $S = \ell_1 \cup \ell_2$, то он либо больше нигде не пересекает Σ , и в этом случае кратность пересечения Σ с L в S равна 3, либо пересекает Σ с кратностью 1 ещё ровно в одной, автоматически гладкой точке. Эти случаи реализуются пучками, представленными на рис. 13◊3 и рис. 13◊5. Для пучка (QS) , проходящего через особую точку $S = 2\ell$ гиперповерхности Σ , имеется ровно та же альтернатива: если кратность пересечения Σ с L в S равна 3, то он больше нигде не пересекает Σ и выгладит как на рис. 13◊2, или же он имеет с Σ ещё ровно одну гладкую точку кратности 1, как на рис. 13◊4. Все остальные пучки просты, т. е. пересекаются с Σ ровно по трём точкам с кратностью 1 и выгладят как на рис. 13◊6.

13.2.5. Регулярные пучки. Невырожденный пучок квадратик (Q_0Q_1) на \mathbb{P}_n называется *регулярным*, если кратность каждой точки его спектра ровно на единицу больше размерности пространства особых точек отвечающей этой точке особой квадратика, т. е. когда

$$\dim \text{Sing}(Q_\lambda) = \text{mult}(\lambda) - 1 \quad \text{для всех } \lambda = (\lambda_0 : \lambda_1) \in \mathbb{P}_1.$$

Это означает, что ранг матрицы Грама $\lambda_0 q_0 + \lambda_1 q_1$ в каждой точке $\lambda \in \mathbb{P}_1$ падает в точности на кратность корня $t = \lambda$ характеристического многочлена $\chi_{q_0, q_1}(t_0, t_1) = \det(t_0 q_0 + t_1 q_1)$. Из всех рассмотренных в н° 13.2.2 невырожденных пучков коник регулярными являются только пучки, представленные на рис. 13◊6 и рис. 13◊4.

Теорема 13.1

Над алгебраически замкнутым полем \mathbb{k} для любого регулярного пучка квадратик в $\mathbb{P}(V)$ найдётся такой базис пространства V , в котором матрицы Грама всех квадратик из пучка одновременно диагональны.

Доказательство. Пусть пучок порождается квадратиками $V(g)$ и $V(q)$, где форма g неособа. Сопоставим форме q автодуальный относительно скалярного произведения \tilde{g} на V линейный оператор¹ $f = -\hat{g}^{-1}\hat{q} : V \rightarrow V$, однозначно задающийся тем, что $\tilde{g}(u, fw) = -\tilde{q}(u, w)$ для всех $u, w \in V$. Поскольку матрица F оператора f выражается через матрицы Грама G, Q квадратичных форм g, q по формуле $F = -G^{-1}Q$, характеристический многочлен оператора f

$$\chi_f(t) = \det(tE - F) = \det(tE + G^{-1}Q) = \det G^{-1} \det(tG + Q) = \chi_{(gq)}(t, 1) \cdot \det G^{-1} \quad (13-14)$$

¹Это сопоставление отличается знаком от использовавшегося в н° 12.6 на стр. 226.

с точностью до ненулевого постоянного множителя совпадает с ограничением характеристического многочлена пучка квадратик¹ на аффинную окрестность квадратичной формы q , для которой квадратичная форма g является бесконечностью. Таким образом, собственные числа оператора f совпадают с теми значениями $t = \lambda$, для которых квадратичная форма $g + \lambda q$ вырождена. А так как ранг матрицы Грама $\lambda G + Q$ равен рангу матрицы $\lambda E - F = G^{-1}(\lambda G + Q)$, размерность собственного подпространства $V_\lambda = \ker(\lambda E - F)$ совпадает с размерностью ядра квадратичной формы $\lambda G + Q$, которая по условию теоремы в точности равна кратности корня $t = \lambda$. Поэтому сумма размерностей всех собственных подпространств оператора f равна $\dim V$. Так как по упр. 12.14 на стр. 226 все собственные подпространства самосопряжённого оператора ортогональны друг другу относительно формы g , пространство V является g -ортогональной прямой суммой собственных подпространств V_λ оператора F . Выбирая в каждом подпространстве V_λ ортогональный базис квадратичной формы G , мы получаем в V базис, где обе формы g и q имеют диагональные матрицы Грама. Но тогда и все формы $\lambda g + \mu q$ будут диагональны в этом базисе. \square

ТЕОРЕМА 13.2

Два регулярных пучка квадратик в \mathbb{P}_n над алгебраически замкнутым полем \mathbb{k} переводятся один в другой линейным проективным автоморфизмом² \mathbb{P}_n , если и только если их спектры, понимаемые как неупорядоченные множества из n не обязательно различных точек на \mathbb{P}_1 , переводятся друг в друга дробно линейным автоморфизмом \mathbb{P}_1 .

Доказательство. Выберем в первом пучке гладкую квадратичку $V(g')$ и рассмотрим в V базис e' , в котором все квадратички первого пучка имеют диагональные матрицы Грама, причём нормируем его так, чтобы матрица Грама формы g' стала единичной E . Рассмотрим любую отличную от g' форму q' из первого пучка и обозначим через Q' её матрицу Грама в базисе e' . В доказательстве предыдущей теор. 13.1 мы видели, что диагональные элементы матрицы Q' являются корнями многочлена $\det(tE - Q')$, т. е. составляют в точности спектр первого пучка. Поскольку он совпадает со спектром второго пучка, во втором пучке квадратичных форм имеется базис из таких форм g'' , q'' , что корни многочлена $\chi_{g''q''}(t, 1)$ совпадают с корнями многочлена $\det(tE - Q')$. Из этого вытекает, что форма g'' невырождена, и в пространстве V существует базис e'' , в котором матрица Грама формы g'' единичная, а форма q'' имеет диагональную матрицу Q'' с диагональными элементами, равными корням многочлена $\det(tE - Q')$. Таким образом, матрица Q'' в базисе e'' совпадает с матрицей Q' в базисе e' . Проективный изоморфизм $\mathbb{P}_n \xrightarrow{\sim} \mathbb{P}_n$, переводящий базис e' в базис e'' , преобразует базисные квадратичные формы g' , q' первого пучка в базисные квадратичные формы g'' , q'' второго. Следовательно, он преобразует каждую форму $\lambda g' + \mu q'$ первого пучка в форму $\lambda g'' + \mu q''$ второго. \square

ПРИМЕР 13.4 (ПРОСТЫЕ ПУЧКИ)

Пучок квадратик на \mathbb{P}_n называется *простым*, если его спектр состоит из $(n + 1)$ различных точек на \mathbb{P}_1 . Таким образом, каждая особая квадратичка простого пучка имеет ровно одну особую точку и единичную кратность в спектре. В частности, каждый простой пучок регулярен, и все квадратички в нём одновременно диагонализуются в некотором базисе. Два простых пучка переводятся

¹См. формулу (13-10) на стр. 236.

²Т. е. существует такой линейный проективный автоморфизм \mathbb{P}_n , который биективно отображает квадратички одного пучка на квадратички второго.

один в другой проективным преобразованием тогда и только тогда, когда $n + 1$ точек на \mathbb{P}_1 , отвечающих особым квадрикам первого пучка, переводятся дробно линейным автоморфизмом \mathbb{P}_1 в $n + 1$ точек, отвечающих особым квадрикам второго.

ТЕОРЕМА 13.3

Пучок квадрик (PQ) над алгебраически замкнутым полем прост, если и только если квадрики P, Q пересекаются трансверсально, т. е. $\text{codim } T_a P \cap T_a Q = 2$ в каждой точке $a \in P \cap Q$.

Доказательство. Рассмотрим в пространстве квадрик $\mathbb{P}_N = \mathbb{P}(S^2 V^*)$ на $\mathbb{P}_n = \mathbb{P}(V)$ гиперповерхность особых квадрик¹ $\Sigma = V(\det) \subset \mathbb{P}_N$. Прямая $(PQ) \subset \mathbb{P}_N$ пересекает гиперповерхность Σ меньше, чем по $n + 1$ точкам, если и только если она касается Σ в одной из точек $S \in (PQ) \cap \Sigma$. С другой стороны, нетрансверсальность пересечения каких-либо квадрик P, Q в некоторой точке $a \in P \cap Q$ означает, что любые две квадрики пучка (PQ) пересекаются в точке a не трансверсально. В самом деле, если $P = V(p), Q = V(q)$, то $T_a P \cap T_a Q = \mathbb{P}(\ker \hat{p}(a) \cap \ker \hat{q}(a))$, и условие $\text{codim}(\ker \hat{p}(a) \cap \ker \hat{q}(a)) \geq 1$ равносильно пропорциональности ковекторов $\hat{p}(a)$ и $\hat{q}(a)$, и тогда все ковекторы $\hat{h}(a)$ с $\hat{h} = \lambda \hat{p} + \mu \hat{q}$ пропорциональны друг другу. В частности, в этом случае пучок содержит квадрику $S = V(s)$ с $\hat{s}(a) = \lambda \hat{p}(a) + \mu \hat{q}(a) = 0$, т. е. $s \in \text{Sing } S$. Тогда $P \cap \text{Sing } S \neq \emptyset$ и прямая (PQ) касается гиперповерхности Σ в точке S по сл. 13.2, а значит, пучок не прост. Наоборот, если прямая (PQ) касается гиперповерхности Σ в точке S , то $P \cap \text{Sing } S \neq \emptyset$ и пересечение $P \cap S$ не трансверсально во всех точках из $P \cap \text{Sing } S$. Но тогда и пересечение $P \cap Q$ тоже не трансверсально в этих же точках. \square

13.3. Евклидовы коники. Рассмотрим евклидову плоскость $V = \mathbb{R}^2$ со стандартными координатами (x_1, x_2) как множество вещественных точек двумерного комплексного координатного пространства $V_{\mathbb{C}} = \mathbb{C}^2$, вложенного в качестве стандартной аффинной карты $U_0 = e_0 + V_{\mathbb{C}}$ в комплексную проективную плоскость $\mathbb{P}_2 = \mathbb{P}(\mathbb{C}^3)$ с однородными координатами $(x_0 : x_1 : x_2)$. Бесконечно удалённую прямую $x_0 = 0$ этой карты обозначим через ℓ_{∞} и будем называть *бесконечностью*. Она естественно отождествляется с проективной прямой $\mathbb{P}(V_{\mathbb{C}})$, и её точки являются *направлениями аффинных прямых*, лежащих в карте U_0 , в том смысле, что проходящая через точку $p \in U_0$ вдоль вектора $v \in V_{\mathbb{C}}$ аффинная прямая $\{p + tv \mid t \in \mathbb{C}\}$ является видимой в карте U_0 аффинной частью проективной прямой $(pv) \subset \mathbb{P}_2$, где $v \in V$ рассматривается как точка бесконечно удалённой прямой $\ell_{\infty} = \mathbb{P}(V_{\mathbb{C}}) \subset \mathbb{P}(\mathbb{C}^3)$.

Евклидово скалярное произведение на V , продолженное по \mathbb{C} -линейности до комплексной билинейной формы $V_{\mathbb{C}} \times V_{\mathbb{C}} \rightarrow \mathbb{C}$, задаёт на $\ell_{\infty} = \mathbb{P}(V_{\mathbb{C}})$ гладкую квадрику $x_1^2 + x_2^2 = 0$, которая называется *изотропной квадрикой* или *абсолютом* и состоит из двух различных комплексно сопряжённых невещественных точек

$$\iota_+ = (1 : -i) \quad \text{и} \quad \iota_- = (1 : i), \quad (13-15)$$

называемых *изотропными направлениями*². Сопоставление направлению v перпендикулярного направления v^{\perp} , и сопоставление точке $v \in \ell_{\infty}$ точки $w \in \ell_{\infty}$ с $[u, w, \iota_+, \iota_-] = -1$ задают на прямой ℓ_{∞} одну и ту же инволюцию с неподвижными точками ι_{\pm} . Эта инволюция называется

¹См. формулу (13-12) на стр. 240.

²Здесь и далее слово *направление* используется как синоним словосочетания «ненулевой вектор из пространства $V_{\mathbb{C}}$, рассматриваемый с точностью до умножения на ненулевые комплексные константы» и означает точку на прямой $\ell_{\infty} = \mathbb{P}(V_{\mathbb{C}})$.

перпендикулярностью или евклидовым сопряжением. Таким образом, равенство $(u, w) = 0$ в V_C равносильно гармоничности направлений $u, w \in \ell_\infty$ изотропным направлениям (13-15).

Упражнение 13.14. Покажите, что «евклидов угол¹» между двумя различными неизотропными направлениями $u, w \in \ell_\infty$ выражается через их двойное отношение с изотропными направлениями ι_\pm по формуле $\angle(u, w) = \pm \frac{1}{2i} \ln[u, w, \iota_+, \iota_-]$.

На комплексной проективной плоскости \mathbb{P}_2 действует \mathbb{C} -антилинейная инволюция комплексного сопряжения $(x_0 : x_1 : x_2) \leftrightarrow (\bar{x}_0 : \bar{x}_1 : \bar{x}_2)$. Она переводит прямые в прямые, а коники — в коники, и сохраняет аффинную карту $U_0 \subset \mathbb{P}_2$, действуя на ней комплексно полуаффинными² вещественно аффинными преобразованиями. Точки, прямые и коники, которые переводятся комплексным сопряжением в себя, называются *вещественными*. Например, бесконечно удалённая прямая и изотропная коника на ней вещественны. Обратите внимание, что вещественная фигура запросто может не иметь ни одной вещественной точки.

Упражнение 13.15. Покажите, что вещественность прямой или коники на \mathbb{P}_2 означает, что их можно задать уравнением с вещественными коэффициентами.

По классификации из прим. 12.4 на стр. 223, гладкая вещественная коника называется *параболой*, *гиперболой* или *эллипсом*, когда она, соответственно, касается прямой ℓ_∞ или пересекает её по двум вещественным или двум не вещественным комплексно сопряжённым точкам. Точка $f \in \mathbb{P}_2$ называется *фокусом* гладкой коники $C \subset \mathbb{P}_2$, если обе прямые $(\iota_\pm f)$ касаются коники C . Поляры фокусов относительно коники C называются *директрисами* этой коники.

Упражнение 13.16. Покажите, что две прямые на \mathbb{P}_2 сопряжены³ относительно гладкой коникой тогда и только тогда, когда они гармоничны в порождённом ими пучке прямых⁴ двум прямым, касающимся этой коники.

13.3.1. Эллипсы и гиперболы называются *центральной кониками*. Полюс z_* прямой ℓ_∞ относительно такой коники C лежит в \mathbb{R}^2 и является центром симметрии аффинной части коники, т. к. для любой проходящей через z_* прямой (ab) , пересекающей конику C в точках a, b , а прямую ℓ_∞ в точке d , двойное отношение $[a, b, c, d] = -1$ по предл. 11.2 на стр. 194, откуда z_* является серединой отрезка $[a, b]$. Полярная бесконечности точка z_* называется *центром*, а проходящие через неё прямые — *диаметрами* коники C .

Упражнение 13.17. Покажите, что любой диаметр гладкой центральной коники делит пополам все хорды, параллельные⁵ сопряжённому диаметру.

Центральная коника имеет 4 фокуса, которые принято нумеровать так, чтобы комплексное сопряжение переставляло прямые $(\iota_+ f_1) \leftrightarrow (\iota_- f_1)$ и прямые $(\iota_+ f_2) \leftrightarrow (\iota_- f_2)$. Таким образом, фокусы f_1, f_2 оказываются вещественными, а фокусы f_3, f_4 не вещественными и комплексно сопряжёнными друг другу, см. рис. 13♦7.

¹Понимаемый как такое комплексное число $\angle(u, w) \in \mathbb{C}$, что $\cos^2 \angle(u, w) = (u, w)^2 (u, u)^{-1} (w, w)^{-1}$, ср. с форм. (3-8) на стр. 38.

²См. п° 2.5 на стр. 29.

³Две прямые на плоскости называются *сопряжёнными* относительно гладкой коники, если одна из них проходит через полюс другой.

⁴Т. е. в пучке прямых с центром в точке пересечения этих двух прямых.

⁵По определению, прямые *параллельные* данной $\ell \subset \mathbb{P}_2$ суть все прямые из пучка с центром в точке $\ell \cap \ell_\infty$, за исключением самих прямых ℓ и ℓ_∞ .

Предложение 13.1

Для любой центральной гладкой коники C прямые (f_1f_2) и (f_3f_4) , проходящие через два вещественных и два мнимых фокуса коники C , пересекаются в центре коники и пересекают бесконечность по точкам $x_* = \ell_\infty \cap (f_1f_2)$ и $y_* = \ell_\infty \cap (f_2f_3)$, которые одновременно перпендикулярны и сопряжены относительно коники C . Кроме того, точка y_* является пересечением поляр фокусов f_1 и f_2 , а точка x_* — пересечением поляр фокусов f_3 и f_4 , см. рис. 13◊7.

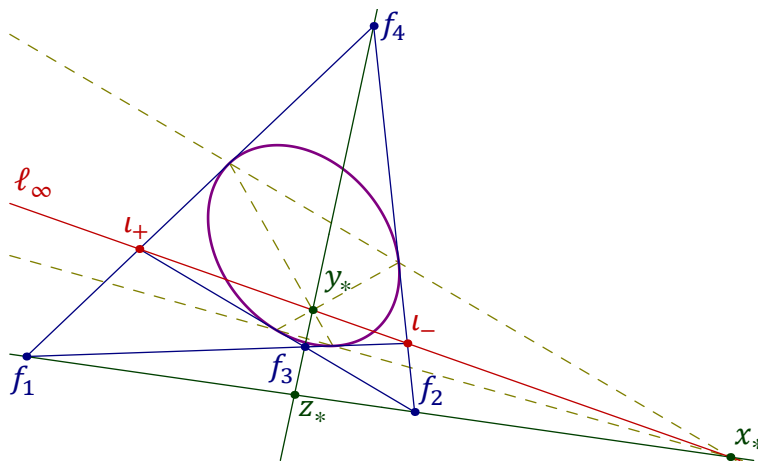


Рис. 13◊7. Гладкая центральная коника, т. е. эллипс или гипербола.

Доказательство **Предл. 13.1**. В **Прим. 10.11** мы видели, что стороны четырёхвершинника $l_+f_3l_-f_4$ гармоничны сторонам ассоциированного с ним треугольника $f_1y_*f_2$ в каждой из вершин этого треугольника. Поэтому, согласно **упр. 13.16**, прямая (f_1f_2) сопряжена как прямой (f_1y_*) , так и прямой (f_2y_*) . Следовательно, точка y_* лежит как на поляре точки f_1 , так и на поляре точки f_2 . Точно такое же рассуждение, применённое к четырёхвершиннику $l_+f_1l_-f_2$ и ассоциированному с ним треугольнику $f_3x_*f_4$, показывает, что y_* лежит на полярах фокусов f_3 и f_4 . Из сказанного вытекает, что точка y_* является полюсом прямой (f_1f_2) , а точка x_* — полюсом прямой (f_3f_4) . Поэтому пересечение $(f_1f_2) \cap (f_3f_4)$ является полюсом прямой $(x_*y_*) = \ell_\infty$, т. е. совпадает с точкой z_* . С другой стороны, гармоничность прямых (f_1y_*) и $(f_1f_2) = (f_1x_*)$ в пучке прямых с центром f_1 означает сопряжённость направлений x_* , y_* относительно коники C , а также равенство $[x_*, y_*, l_+, l_-] = -1$, т. е. перпендикулярность направлений x_* и y_* . \square

13.3.2. Главные оси центральных коник. Направления $x_*, y_* \in \ell_\infty$, одновременно перпендикулярные и сопряжённые относительно коники, называются *главными осями* центральной коники. Из **предл. 13.1** вытекает, что главные оси существуют. Поскольку центр z_* является полюсом прямой (x_*y_*) , точка x_* сопряжена не только точке y_* , но и точке z_* , а значит, является полюсом прямой z_*y_* . По той же причине точка y_* является полюсом прямой z_*x_* . Таким образом, треугольник $x_*y_*z_*$ автополярен относительно коники C . На языке уравнений это означает, что матрица Грама квадратичной формы, задающей конику C , в базисе $x_*y_*z_*$ диагональна. Таким образом в аффинной системе координат с центром z_* и вещественным ортонормальным базисом x_*, y_* в V аффинное уравнение коники принимает вид $ax^2 + by^2 = 1$, где $a > 0$. Такая коника является эллипсом при $b > 0$ и гиперболой при $b < 0$.

Упражнение 13.18. Покажите, что для любой пары различных инволюций на проективной прямой над алгебраически замкнутым полем существует ровно одна пара точек, переводимых друг в друга обеими инволюциями.

Поскольку сопряжение диаметров относительно коники C и евклидово сопряжение представляют собой пару инволюций на пучке прямых с центром в Z_* , из упр. 13.18 вытекает, что каждая коника, для которой эти инволюции различны, обладает единственной парой главных осей. В доказательстве теор. 12.5 на стр. 227 мы видели, что направления главных осей являются собственными векторами матрицы Грама квадратичной части f_2 аффинного уравнения коники в произвольном ортонормальном базисе евклидовой плоскости \mathbb{R}^2 . Поэтому практическое отыскание главных осей для заданной явным уравнением коники большого труда не составляет.

13.3.3. Окружности. Неподвижными точками сопряжения относительно коники C являются точки пересечения $C \cap \ell_\infty$. Они называются *асимптотическими направлениями* коники C . У каждой центральной коники имеется ровно два асимптотических направления, причём у гипербол они вещественны, а у эллипсов не вещественны и комплексно сопряжены. Коника называется (*комплексной*) *окружностью*, если асимптотические направления изотропны. Это, с одной стороны, равносильно прохождению коники через изотропные точки l_\pm , а с другой стороны, означает, что сопряжение относительно коники C совпадает с евклидовым сопряжением. В частности, любые два сопряжённых или перпендикулярных диаметра окружности являются её главными осями. Покажем, что это определение окружности согласуется со школьным¹. Евклидова окружность с центром $a = (a_1, a_2)$ и радиусом r задаётся уравнением $(x_1 - a_1x_0)^2 + (x_2 - a_2x_0)^2 = r^2x_0^2$ и пересекает бесконечность в точности по изотропной квадрике $x_1^2 + x_2^2 = 0$. Наоборот, если вещественная непустая² гладкая коника C проходит через точки l_\pm , то проводя окружность через любые три её вещественные неколлинеарные точки³, мы получим ещё одну гладкую конику, проходящую через l_\pm . Поэтому коника C совпадает с этой окружностью. Итак, евклидовы окружности это гладкие вещественные коники с непустым множеством вещественных точек, лежащие в трёхмерном комплексном проективном пространстве всех коник на \mathbb{P}_2 , проходящих через изотропные точки⁴ l_\pm .

Пример 13.5 (директор центральной коники)

Сопряжение относительно коники C задаёт гомографию $\delta_C : l_+^\times \simeq l_-^\times$ между пучками прямых с центрами в изотропных точках. Она переводит прямую $\ell \ni l_+$ в сопряжённую ей относительно C прямую $\delta_C(\ell) \ni l_-$, см. рис. 13◊8. В пучке прямых с центром в точке⁵ $p = \ell \cap \delta_C(\ell)$ пара сопряжённых прямых ℓ и $\delta_C(\ell)$ гармонична паре касательных, опущенных из точки p на конику C . Следовательно, эти касательные перпендикулярны. Таким образом, ГМТ пересечения соответственных прямых $\ell \cap \delta_C(\ell)$ это в точности ГМТ $p \in \mathbb{P}_2$, из которых коника C видна под прямым углом. В прим. 11.4 на стр. 197 мы видели, что ГМТ пересечения соответственных прямых гомографии между двумя пучками представляет собою конику, проходящую через центры пучков, как на рис. 13◊8. Поскольку в нашем случае эти центры суть изотропные точки l_\pm , рассматриваемое нами ГМТ — окружность. Она называется *директором* коники C и обозначается D_C . Согласно тому же прим. 11.4, $\delta_C(\ell_\infty) = T_{l_-}D_C$ и $\delta_C(T_{l_+}D_C) = \ell_\infty$. Поэтому обе пары прямых $\ell_\infty, T_{l_+}D_C$ и $\ell_\infty, T_{l_-}D_C$ гармоничны касательным, опущенным на конику C из изотропных точек. Тем самым, прямая ℓ_∞ сопряжена относительно коники C с обеими касательными к

¹Ср. с прим. 3.4 на стр. 39.

²Т.е. имеющая непустое пересечение с $\mathbb{R}^2 \subset U_0 \subset \mathbb{P}_2$ или, что то же самое, непустое множество вещественных точек в карте U_0 .

³А такие существуют в силу предл. 11.1 на стр. 192.

⁴Не имеющие вещественных точек гладкие вещественные коники из этого пространства, такие как коника $x_1^2 + y_1^2 = -1$, иногда называют *мнимыми окружностями*.

⁵На рис. 13◊8 показаны три такие точки: p_1, p_2 и p_3 .

окружности D_C в изотропных точках. Следовательно эти касательные пересекаются в полюсе z_* прямой ℓ_∞ относительно коники C , т. е. директор имеет тот же центр, что и коника.

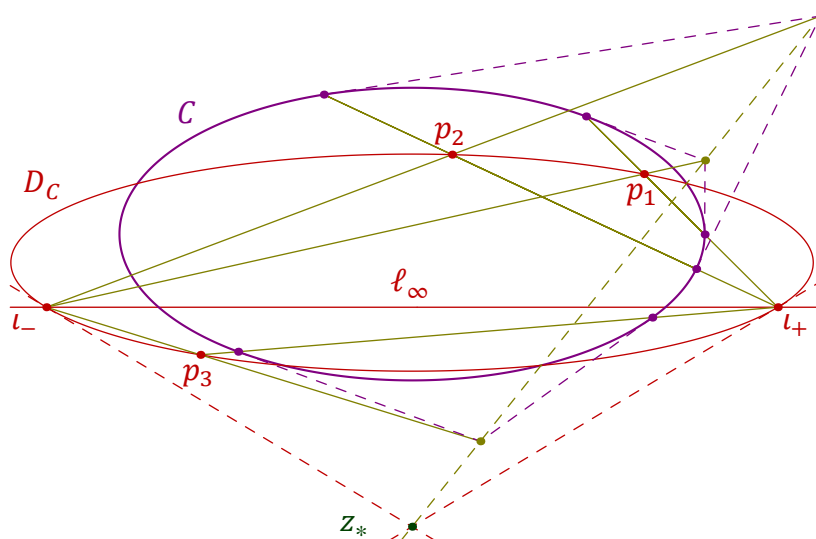


Рис. 13◊8. Директор гладкой центральной коники.

УПРАЖНЕНИЕ 13.19. Напишите явное уравнение директора D_C в главных осях коники C .

ПРИМЕР 13.6 (конфокальные коники)

Множество всех коник на \mathbb{P}^2 , имеющих те же фокусы¹, что и данная гладкая центральная коника C , это в точности множество всех коник, касающихся четырёх касательных к конике C , опущенных из изотропных точек, см. рис. 13◊7 на стр. 245. Все эти коники имеют общие центр и главные оси, а двойственные им коники в \mathbb{P}_2^\times образуют простой пучок коник, проходящих через четыре директрисы коники C . Он порождается гладкой коникой C^\times , двойственной к C , и распавшейся коникой $l_+^\times \cup l_-^\times$, объединением двух пучков прямых с центрами в изотропных точках. Если уравнение коники C в главных осях имеет вид $ax^2 + by^2 - z^2 = 0$, то по сл. 11.6 на стр. 194 коника C^\times в двойственных координатах задаётся уравнением $a^{-1}x_*^2 + b^{-1}y_*^2 - z_*^2 = 0$. Так как базис x_* , y_* пространства V ортонормален относительно евклидова скалярного произведения, распавшаяся коника на \mathbb{P}_2^\times , образованная всеми прямыми, проходящими через точки l_\pm , имеет уравнение $x_*^2 + y_*^2 = 0$. Все остальные коники пучка задаются уравнениями

$$(a^{-1} + \lambda) \cdot x_*^2 + (b^{-1} + \lambda) \cdot y_*^2 - z_*^2 = 0,$$

где параметр λ пробегает \mathbb{C} . Двойственные им конфокальные с C коники имеют аффинные уравнения

$$\frac{x^2}{a^{-1} + \lambda} + \frac{y^2}{b^{-1} + \lambda} = 1, \quad \text{где } \lambda \in \mathbb{C}.$$

На пучке прямых с центром в произвольной точке $p \in \mathbb{P}_2$ имеется инволюция $\sigma_C : p^\times \rightleftharpoons p^\times$, переставляющая между прямыми, касающимися какой-либо конфокальной с C коники.

УПРАЖНЕНИЕ 13.20. Убедитесь, что это и впрямь линейная инволюция, причём $\sigma_C(pf_1) = (pf_2)$.

¹Обратите внимание, что для этого достаточно, чтобы два вещественных фокуса были общими.

Две неподвижные точки инволюции σ_C должны касаться в точке p двух разных конфокальных с C коник, проходящих через p . Поскольку неподвижные точки гармоничны любой паре переставляемых точек, а $\sigma_C(l_{\pm}) = l_{\mp}$, эти касательные перпендикулярны. Таким образом, через любую точку $p \in \mathbb{P}_2$ проходят ровно две коники C'_p и C''_p конфокальной системы, причём они пересекаются в точке p под прямым углом, см. рис. 13◊9. Так как неподвижные относительно σ_C прямые $l'_p = T_p C'_p$ и $l''_p = T_p C''_p$ гармоничны паре касательных, опущенных из p на любую конику G конфокальной системы, перпендикулярные прямые l'_p, l''_p делят пополам углы между этими касательными. По упр. 13.20 проходящие через фокусы прямые $(pf_1), (pf_2)$ также переставляются друг с другом инволюцией σ_C . Поэтому перпендикулярные касательные l'_p и l''_p также служат биссектрисами и углов прямые $(pf_1), (pf_2)$, см. рис. 13◊9.

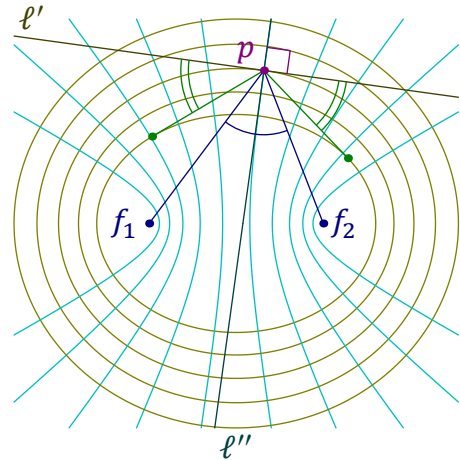


Рис. 13◊9. Конфокальные центральные коники.

Следствие 13.3

Для любых точки p и гладкой центральной коники C с вещественными фокусами f_1, f_2 угол между прямой (pf_1) и опущенной из p на C касательной равен углу между второй касательной и прямой (pf_2) . □

Следствие 13.4 (фокальное свойство центральной коники)

Все отражённые гладкой центральной коникой лучи света от точечного источника в её вещественном фокусе проходят через другой вещественный фокус. □

Упражнение 13.21. Покажите, что из двух пересекающихся в заданной точке коник конфокальной системы одна является эллипсом, а другая гиперболой.

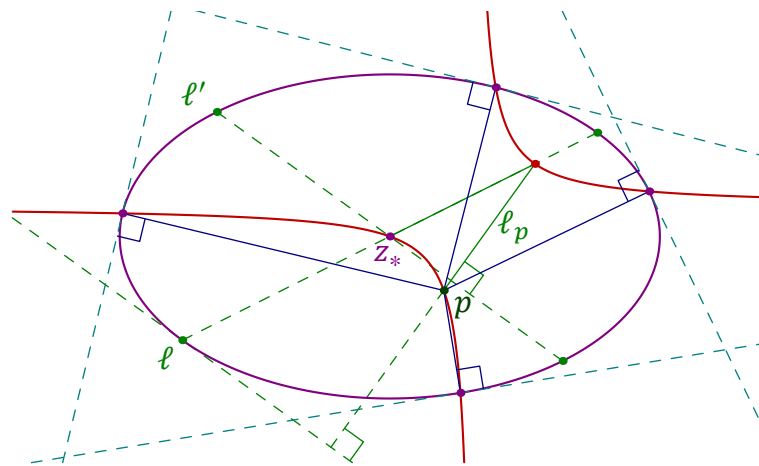


Рис. 13◊10. Гипербола Аполлония точки p относительно эллипса.

Пример 13.7 (гипербола Аполлония)

Для произвольных точки p и гладкой центральной коники C с центром в точке z_* обозначим через $\varphi : z_*^{\times} \rightarrow p^{\times}$ гомографию пучка диаметров коники C в пучок прямых с центром в p ,

переводящую диаметр $\ell \ni z_*$ в опущенный из точки p перпендикуляр ℓ_p на сопряжённый к ℓ относительно коники C диаметр $\ell' \ni z_*$, см. рис. 13◊10.

Упражнение 13.22. Убедитесь, что это и впрямь гомография.

Согласно прим. 11.4 на стр. 197, ГМТ пересечения соответственных прямых $\ell \cap \ell_p$ является коникой H , проходящей через центр коники C и точку p . Поскольку гомография φ переводит главные направления (z_*x_*) и (z_*y_*) в прямые (px_*) и (py_*) соответственно, коника H является гиперболой, с асимптотическими направлениями, параллельными главным осям коники C . Она называется *гиперболой Аполлония* точки p относительно коники C и замечательна тем, что пересекает конику C ровно по таким точкам $a \in C$, для которых прямая (pa) перпендикулярна касательной T_aC к конике C в точке a , поскольку сопряжённый к ℓ диаметр ℓ' параллелен касательным, восстановленным в концах диаметра ℓ , см. рис. 13◊10. В качестве следствия мы заключаем, что из произвольной точки p на гладкую центральную конику C можно опустить не более четырёх перпендикуляров.

13.3.4. Параболы. Гладкая вещественная коника P , касающаяся бесконечно удалённой прямой в точке $x_* = \ell_\infty \cap P$, может рассматриваться как вырождение гладкой центральной коники, при котором её центр¹ сливается с тремя фокусами f_2, f_3, f_4 в одну точку, которую обозначают $x_* \in \ell_\infty$ и называют *направлением оси*² параболы. Директрисы этих фокусов совпадают с бесконечной прямой ℓ_∞ , см. рис. 13◊11. Оставшийся конечный фокус f_1 тоже веществен, и под *фокусом* и *директрисой* параболы всегда понимаются именно фокус f_1 и его поляра. Конечная точка пересечения параболы с прямой (f_1f_2) обозначается через z_* и называется *вершиной* параболы.

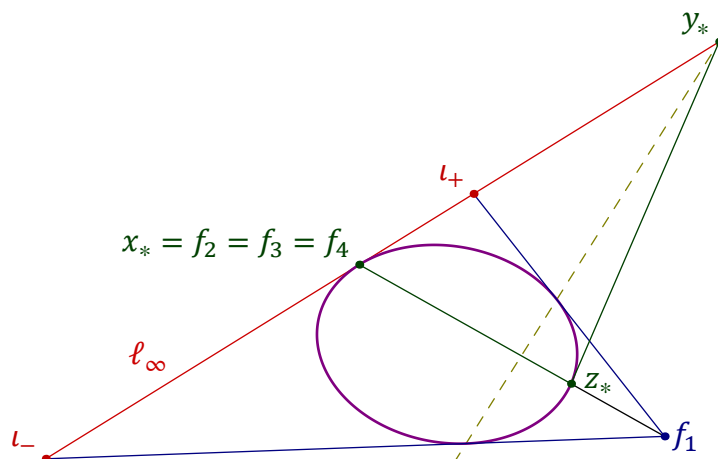


Рис. 13◊11. Парабола.

Точки x_* и $y_* = T_C P \cap \ell_\infty$ называются *главными осями* параболы P . Они сопряжены относительно параболы и перпендикулярны. Первое очевидно из рис. 13◊11, второе выражает тот факт, что в пучке прямых с центром в f_1 сопряжённые относительно коники C направления x_* , y_* гармоничны касательным изотропным направлениям. Поскольку анизотропный вектор y_* сопряжён относительно P обеим точкам x_* , z_* , и обе они изотропны, выбирая на главных осях

¹Т. е. полюс бесконечно удалённой прямой ℓ_∞ , который для вещественной коники автоматически является вещественным.

²А также бесконечно удалённым фокусом и/или асимптотическим направлением.

x_* , y_* евклидово ортонормальные векторы получим для параболы P однородное уравнение $y^2 = 2axz$, где $a > 0$. В аффинном репере карты U_0 с началом в z_* это уравнение превращается в неоднородное уравнение $y^2 = 2ax$.

Упражнение 13.23. Покажите, что середины хорд, отсекаемых из параболы любым пучком параллельных прямых, лежат на прямой, параллельной оси параболы.

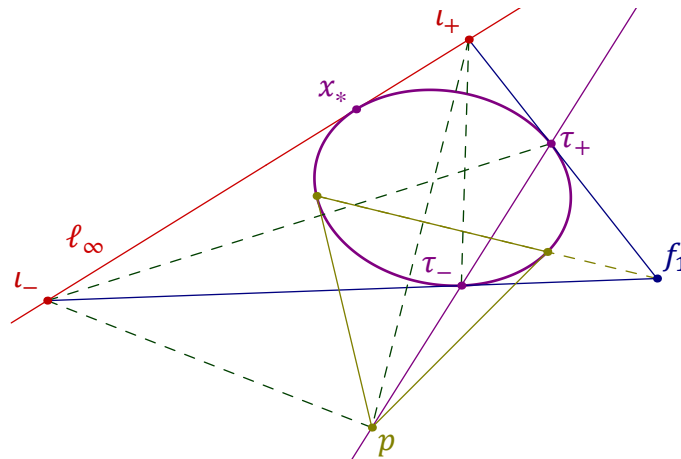


Рис. 13◊12. Директор параболы это директриса.

Предложение 13.2 (ДИРЕКТОР ЭТО ДИРЕКТРИСА)

ГМТ p , из которых параболу P видно под прямым углом, это её директриса. В частности, касательные к параболе, проведённые через концы любой фокальной хорды, пересекаются на директрисе под прямым углом.

Доказательство. Поскольку полюс p любой фокальной хорды сопряжён фокусу, он лежит на его поляре, т. е. на директрисе (см. рис. 13◊12). Задаваемая сопряжением прямых относительно коники гомография $\delta_p : l_+^x \simeq l_-^x$ из прим. 13.5 для параболы превращается в перспективу, поскольку прямая l_∞ , соединяющая центры пучков, самосопряжена. В прим. 11.4 на стр. 197 мы видели, что коника, задающая перспективную гомографию пучков, распадается в прямую, соединяющую центры пучков, и прямую, проходящую через точки пересечений как-нибудь двух пар соответственных прямых из пучков. Таковыми являются точки τ_+ и τ_- пересечения параболы с фокальными касательными, см. рис. 13◊12. \square

Пример 13.8 (КОНФОКАЛЬНЫЕ ПАРАБОЛЫ)

Параболы называются *конфокальными*, если у них один и тот же фокус и параллельные оси¹ Семейство парабол, конфокальных заданной параболе P , состоит из всех коник, вписанных в треугольник $f_1 l_- l_+$ и касающихся его стороны $l_\infty = (l_- l_+)$ в фиксированной точке u_* . Двойственные им коники образуют в \mathbb{P}_2^x пучок с тремя базисными точками — сторонами треугольника $f_1 l_- l_+$ и двумя вырожденными распавшимися кониками², одна из которых имеет особенность в точке, изображающей прямую l_∞ , состоит из двух пучков прямых l_\pm^* и задаётся в евклидово ортонормальном базисе, направленном вдоль главных осей, уравнением $x_*^2 + y_*^2 = 0$. Уравнение

¹Т. е. один и тот же бесконечно удалённый фокус.

²См. рис. 13◊5 на стр. 238.

гладкой коники P^\times имеет вид $y_*^2 + 2a^{-1}y_*z_* = 0$. Поэтому общая коника пучка имеет уравнение $(1 + \lambda)y_*^2 + 2a^{-1}x_*z_* + \lambda x^2 = 0$. Обращая его матрицу Грама, получаем для конфокальных P парабол однородные уравнения $(1 + \lambda)^{-1}y^2 - 2axz + \lambda z^2 = 0$ и аффинные уравнения

$$y^2 = (1 + \lambda)(2ax - \lambda).$$

Всё сказанное в [прим. 13.6](#) остаётся в силе и для конфокальных парабол: через любую точку $p \in \mathbb{P}_2$ проходят ровно две конфокальные параболы, а касательные к ним в точке p прямые перпендикулярны и являются биссектрисами углов между двумя касательными, опущенными из точки p на любую параболу конфокальной системы, а также угла между направлением на фокус и направлением, параллельным оси параболы.

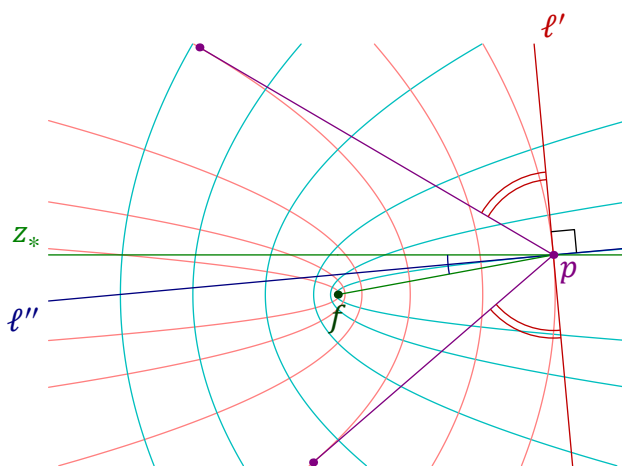


Рис. 13♦13. Конфокальные параболы.

Следствие 13.5

Для любых точки p и параболы угол между касательной, опущенной из p на параболу, и прямой (pf) , ведущей из p в фокус, равен углу между второй касательной и осью параболы. \square

Следствие 13.6 (фокальное свойство параболы)

Все отражённые параболой лучи от точечного источника в её фокусе идут параллельно оси параболы. \square

Пример 13.9 (перпендикуляры к параболе)

Гипербола Аполлония из [прим. 13.7](#) существует и для параболы (убедитесь в этом!). Отличие от центральных коник заключается в том, что направление оси параболы $x_* = \ell_\infty \cap P$ является одной из точек пересечения гиперболы Аполлония с параболой. Поэтому в аффинной карте U_0 находится не более трёх точек пересечения параболы с гиперболой Аполлония, т. е. из произвольной точки плоскости на параболу можно опустить не более трёх перпендикуляров.

Ответы и указания к некоторым упражнениям

Упр. 13.1. Перенумеровывая, если необходимо, базисные векторы пространства V , запишем многочлен в виде

$$e_1 \wedge (\alpha_2 e_2 + \dots + \alpha_n e_n) + (\text{члены, не содержащие } e_1),$$

где $\alpha_2 \neq 0$, и $\alpha_2 e_2 + \dots + \alpha_n e_n$ тоже не содержит e_1 . Перейдём к новому базису $\{\zeta_1, \zeta_2, \dots, \zeta_n\}$, в котором $\xi_2 = \alpha_2 e_2 + \dots + \alpha_n e_n$ и $\zeta_i = e_i$ при $i \neq 2$. В нём многочлен принимает вид

$$\zeta_1 \wedge \zeta_2 + \zeta_2 \wedge (\beta_3 \zeta_3 + \dots + \beta_n \zeta_n) + (\text{члены, не содержащие } \zeta_1 \text{ и } \zeta_2).$$

В базисе $\{\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n\}$ из векторов $\xi_1 = \zeta_1 - \beta_3 \zeta_3 - \dots - \beta_n \zeta_n$ и $\xi_i = \zeta_i$ при $i \neq 1$ многочлен принимает вид

$$\xi_1 \wedge \xi_2 + (\text{члены, не содержащие } \xi_1 \text{ и } \xi_2),$$

после чего можно воспользоваться индукцией.

Упр. 13.4. Рассмотрим конус $C = P \cap T_p P$. Он имеет вершину в p и состоит из всех прямых, проходящих через p и лежащих на P . Фиксируем 3-мерную гиперплоскость $H \subset T_p P$, которая не содержит p . Тогда $G = C \cap H$ есть невырожденная квадрика на H . Таким образом, любая прямая, проходящая через p , имеет вид $(pp') = \pi_\alpha \cap \pi_\beta$, где $p' \in G$ и плоскости π_α, π_β натянутые на p и две прямые, проходящие через p' в G (см. рис. 13♦1).

Упр. 13.5. Каждая прямая, которая проходит через p и не касается Q , пересекает квадрику ещё ровно в одной отличной от p точке, координаты которой, по теореме Виета, рационально зависят от прямой.

Упр. 13.7. Если матрица Грама $(\tilde{g}(e_i, e_j))$ диагональна с диагональными элементами $g_i = \tilde{g}(e_i, e_i)$, то матрица Грама формы g_2 в базисе из бивекторов $e_i \wedge e_j$ тоже диагональна с диагональными элементами $g_i g_j$. Если векторы e_1, e_2, e_1^*, e_2^* образуют гиперболический базис формы g , то пары бивекторов $e_1 \wedge e_2, e_1^* \wedge e_2^*$ и $e_1 \wedge e_2^*, e_1^* \wedge e_2$ образуют гиперболические базисы двух ортогональных друг другу гиперболических плоскостей, а векторы $e_1 \wedge e_1^*, e_2 \wedge e_2^*$ имеют скалярные квадраты -1 и ортогональны друг другу и обеим гиперболическим плоскостям.

Упр. 13.10. Для заданных точки $p \in \mathbb{P}_2 = \mathbb{P}(V)$ и прямой $\ell \subset \mathbb{P}_2$ множество всех таких коник $C = V(q) \subset \mathbb{P}_2$, что прямая ℓ служит полярной точки p относительно C , является проективным подпространством коразмерности 2 в пространстве коник $\mathbb{P}_5 = \mathbb{P}(S^2 V^*)$. В самом деле, ненулевой вектор $p \in V$ задаёт сюръективное линейное отображение

$$pl_p : S^2 V^* \rightarrow V^*, \quad q \mapsto \hat{q}(p), \quad (14-49)$$

переводящее квадратичную форму q в ковектор $\hat{q}(p) : V \rightarrow \mathbb{k}, v \mapsto \tilde{q}(v, p)$. При $\dim V = 3$ ядро $\ker pl_p$ имеет размерность $\dim \ker pl_p = \dim S^2 V^* - \dim V^* = 3$. Поэтому полный прообраз натянутого на ненулевой ковектор $\psi = \text{Ann}(\ell) \in V^*$ одномерного подпространства $\mathbb{k} \cdot \psi \subset V^*$ при отображении (14-49) имеет размерность 4 и коразмерность 2. Стало быть, его проективизация тоже имеет коразмерность 2. В частности, при $p \in \ell$, коники, касающиеся заданной прямой ℓ в заданной точке $p \in \ell$, образуют проективное подпространство коразмерности 2. Два таких подпространства, отвечающие $p_1 \in \ell_1$ и $p_2 \in \ell_2$, пересекаются как минимум по прямой. Если бы пересечение содержало плоскость, то в пространстве коник, касающихся ℓ_1 , и ℓ_2 в точках p_1 и p_2 , нашлась бы коника, проходящая через любые две наперёд заданные точки. Но такая коника, проходящая через отличную от p_1, p_2 точку прямой ℓ и ещё одну точку вне прямых ℓ, ℓ_1, ℓ_2 ,

распадается в объединение прямой ℓ и отличной от ℓ , ℓ_1 , ℓ_2 прямой ℓ' и не может пересекать прямые ℓ_1 , ℓ_2 с кратностью 2 одновременно и в p_1 , и в p_2 .

Упр. 13.12. Условие прохождения через точку задаёт в пространстве коник гиперплоскость. Если никакие три из четырёх точек не коллинеарны, эти гиперплоскости линейно независимы, т. к. через любые три из точек можно провести распадающуюся конику, не проходящую через четвертую точку. Следовательно, коники проходящие через точки a, b, c, d , никакие три из которых не коллинеарны, образуют пучок. Этот пучок содержит три распавшихся коники, образованные парами противоположных сторон четырёхвершинника $abcd$.

Упр. 13.13. По формуле Тейлора ограничение многочлена f на прямую (ab) имеет в аффинной окрестности точки a вид

$$f(a + tb) = f(a) + t \cdot \sum_{i=0}^n \frac{\partial f}{\partial x_i}(a) \cdot b_i + \text{члены, делящиеся на } t^2.$$

Точке a отвечает корень $t = 0$. Он кратный тогда и только тогда, когда

$$\sum_{i=0}^n \frac{\partial f}{\partial x_i}(a) \cdot b_i = 0.$$

Упр. 13.14. Пусть $u = \iota_+ + \lambda \iota_-$, $w = \iota_+ + \mu \iota_-$. По упр. 10.14 на стр. 185 $[u, w, \iota_+, \iota_-] = \mu / \lambda$. Так как $(\iota_+, \iota_+) = (\iota_-, \iota_-) = 0$, а $(\iota_+, \iota_-) = (\iota_-, \iota_+) = 2$, получаем

$$\cos \angle(u, w) = \frac{(u, w)}{\sqrt{(u, u)(w, w)}} = \frac{\lambda + \mu}{2\sqrt{\lambda\mu}} = \frac{\sqrt{\lambda/\mu} + \sqrt{\mu/\lambda}}{2}.$$

Полагая $\lambda/\mu = [u, w, \iota_+, \iota_-] = e^{2i\vartheta}$, приходим к равенству $\cos \angle(u, w) = \cos \vartheta$, откуда $\angle(u, w) = \pm \vartheta + 2\pi n$.

Упр. 13.15. Поскольку линейное (соотв. квадратичное) уравнение прямой (соотв. коники) определяется этой фигурой однозначно с точностью до умножения на ненулевое комплексное число, вещественность фигуры означает, что все коэффициенты a_ν её уравнения удовлетворяют соотношению $a_\nu = \lambda \bar{a}_\nu$ для одного и того же для всех ν числа $\lambda \in \mathbb{C}$, имеющего $|\lambda| = 1$, т. к. $|\bar{a}_i| = |a_i|$. Пусть $\vartheta^2 = \lambda$. Тогда $\vartheta a_i \in \mathbb{R}$.

Упр. 13.16. Это проективно двойственное утверждение к предл. 11.2 на стр. 194 для гладкой коники на плоскости.

Упр. 13.17. Пусть $a, b \in \ell_\infty$ и диаметры (ca) , (cb) сопряжены. Тогда точки a, b сопряжены относительно C , т. е. a лежит на поляре точки b . Поскольку b лежит на поляре z_* , точка z_* тоже лежит на поляре b . Следовательно, диаметр (ca) является полярной точки b , и любая проходящая через b прямая ℓ пересекает прямую (ca) по сопряжённой с b точке, которая по предл. 11.2 на стр. 194 является серединой отрезка, отсекаемого коникой на прямой ℓ .

Упр. 13.18. Вложим прямую $\mathbb{P}_1 = \mathbb{P}(U)$ в качестве коники Веронезе C в плоскость $\mathbb{P}_2 = \mathbb{P}(S^2 U^*)$, образованную неупорядоченными точек $\{x, y\} \subset \mathbb{P}_1$, как в прим. 11.6 на стр. 203. Тогда пары точек, переставляемых друг с другом инволюцией σ_{ab} с неподвижными точками a, b , отсекаются из коники Веронезе C пучком прямых с центром в точке $\{a, b\} \in \mathbb{P}_2$. Две инволюции σ_{ab} и σ_{cd} с $\{a, b\} \neq \{c, d\}$ одинаково переставляют ровно одну пару (возможно, совпадающих друг

с другом) точек, а именно, на две точки пересечения коники C с прямой, соединяющей точки $\{a, b\}$ и $\{c, d\}$ на \mathbb{P}_2 .

Упр. 13.20. σ_C переставляет две точки прямой $p^\times \subset \mathbb{P}_2^\times$, если и только если они высекаются из неё какой-либо коникой из пучка, двойственного к конфокальной системе. Поскольку для любой точки $\xi \in p^\times$ в пучке существует единственная проходящая через ξ коника, и вторая точка её пересечения с прямой p^\times рационально выражается через ξ , рассматриваемое отображение является инволютивной рациональной биекцией на прямой p^\times . коника из двойственного к конфокальной системе пучка, пересекающая прямую p^\times по паре точек $(pf_1), (pf_2) \in \mathbb{P}_2^\times$, это распавшаяся коника $f_1^\times \cup f_2^\times$.

Упр. 13.23. Поляра любой точки $w \in \ell_\infty$ проходит через полюс y_* прямой ℓ_∞ , т. е. параллельна оси параболы. Эта поляра пересекает любую прямую $\ell \ni w$ по такой точке u , что сопряжённые относительно P точки u, w гармоничны точкам пересечения $\ell \cap P$, т. е. u является серединой хорды $\ell \cap P$.