

Выпуклые многогранные конусы

Г9♦1. Нарисуйте ограниченное замкнутое выпуклое множество с незамкнутым множеством
а) вершин б) крайних точек.

ВМК или *выпуклый многогранный конус* на векторах $v_1, v_2, \dots, v_m \in V \simeq \mathbb{R}^n$ это множество вида $\sigma = \sigma_{v_1 v_2 \dots v_m} = \{\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \dots + \lambda_m v_m \mid \forall i \lambda_i \geq 0\} \subset V$. Множество ковекторов $\sigma^\vee = \{\xi \in V^* \mid \forall v \in \sigma \xi(v) \geq 0\} \subset V^*$ называется *двойственным конусом* к вМК σ . Пересечения $\sigma \cap \text{Ann}(\xi)$, где $\xi \in \sigma^\vee$, называются *гранями* σ . Грани, отличные от σ , называются *собственными*. Под *размерностью* вМК σ понимается размерность его линейной оболочки. Грани коразмерности 1 называются *гипергранями*. Для гипергранни τ n -мерного вМК σ мы обозначаем через $\xi_\tau \in \sigma^\vee$ базисный вектор в $\text{Ann} \tau$.

Г9♦2. Покажите, что для любого вМК σ и любого вектора $w \notin \sigma$ существует $\xi \in \sigma^\vee$ с $\xi(w) < 0$.

Г9♦3. Покажите, что $\sigma = \{v \in V \mid \xi(v) \geq 0 \ \forall \xi \in \sigma^\vee\}$.

Г9♦4. Покажите, что грани σ суть вМК и что грань грани и пересечение граней суть грани σ .

Г9♦5. Докажите эквивалентность друг другу следующих условий на вМК σ :

- а) $\sigma \cap (-\sigma) = \{0\}$ б) σ^\vee линейно порождает V^* в) $\exists \xi \in \sigma^\vee : \sigma \cap \text{Ann}(\xi) = \{0\}$
г) σ не содержит ненулевых векторных подпространств из V .

Г9♦6. Покажите, что минимальная по включению грань конуса σ равна $\sigma \cap (-\sigma)$.

Г9♦7. Докажите эквивалентность друг другу следующих условий на вМК σ и вектор $v \in \sigma$: а) линейная оболочка σ совпадает с $\{w - \lambda v \mid w \in \sigma, \lambda \geq 0\}$ б) $\forall \xi \in \sigma^\vee \setminus \text{Ann}(\sigma) \ \xi(v) > 0$ в) v внутренняя точка¹ конуса σ г) $\forall w \in \sigma \exists u \in \sigma : u + w = \lambda v$ для некоторого $\lambda \in \mathbb{R}_{>0}$ д) $\sigma^\vee \cap \text{Ann}(v) = \text{Ann}(\sigma)$.

Г9♦8. Верно ли что два не содержащихся в гиперплоскостях двойственных конуса $\sigma \in V$ и $\sigma^\vee \in V^*$ имеют одинаковое число одномерных граней?

Г9♦9. Покажите, что выпуклый подконус $\eta \subset \sigma$ является гранью конуса σ , если и только если $\forall v_1, v_2 \in \sigma \ v_1 + v_2 \in \eta \Rightarrow v_1, v_2 \in \eta$.

Г9♦10. Покажите, что любая собственная грань $\tau \subsetneq \sigma$ а) содержится в некой гипергранни конуса σ б) является пересечением всех содержащих её гиперграней конуса σ .

Г9♦11. Для линейно порождающего V вМК $\sigma \neq V$ докажите, что а) $\partial\sigma$ является объединением гиперграней б) ковекторы $\xi_\tau \in V^*$, задающие гипергранни $\sigma \subset \tau$, содержатся в следующем конечном множестве Φ : перебираем все линейно независимые наборы из $(n-1)$ векторов v_i ; для каждого из них находим $\xi \in V^*$, порождающий его аннулятор; если ξ или $-\xi$ неотрицателен на всех v_i , включаем его (с нужным знаком) в Φ , если нет — то нет в) $\sigma = \bigcap_{\tau} H_{\xi_\tau}^+$, где $\tau \subset \sigma$ пробегает все гипергранни σ г) σ^\vee это тоже вМК.

Г9♦12. Покажите, что сопоставление грани $\tau \subset \sigma$ множества $\text{Ann}(\tau) \cap \sigma^\vee \subset \sigma^\vee$ корректно задаёт обращающую включения биекцию между гранями σ и σ^\vee .

Г9♦13. Пусть $\xi \in \sigma^\vee$ и $\tau = \text{Ann}(\xi) \cap \sigma$. Верно ли, что $\tau^\vee = \{\zeta - \lambda \xi \mid \zeta \in \sigma^\vee, \lambda \geq 0\}$?

Г9♦14. Пусть вМК σ_1 и σ_2 пересекаются по общей грани τ . Верно ли, что $\tau = \sigma_1 \cap \text{Ann}(\xi) = \sigma_2 \cap \text{Ann}(\xi)$ для некоторого $\xi \in \sigma_1^\vee \cap (-\sigma_2^\vee)$?

Г9♦15. Обозначим через $W \subset V$ линейную оболочку грани τ вМК $\sigma \subset V$. Покажите, что $\sigma + W$ является вМК в фактор пространстве V/W , причём его грани — это в точности $\eta + W$, где η пробегает все содержащие τ грани σ .

Г9♦16. Для любого выпуклого многогранника $M \subset \mathbb{A}(V)$ докажите, что

- а) вМК, натянутый на все рёбра, выходящие из произвольной вершины M , содержит M
б) из любой вершины M можно пройти в любую другую, двигаясь только по рёбрам
в) если $\xi \in V^*$ ограничен на M , то $\max_{x \in M} \xi(x)$ достигается в некоторой вершине $p \in M$
г) для того, чтобы $\xi(p) = \max_{x \in M} \xi(x)$, необходимо и достаточно, чтобы $\xi \in V^*$ не увеличивал своего значения вдоль всех выходящих из p рёбер M .

¹в топологии линейной оболочки конуса σ .

№	дата сдачи	имя и фамилия принявшего	подпись принявшего
1а			
б			
2			
3			
4			
5а			
б			
в			
г			
6			
7а			
б			
в			
г			
д			
8			
9			
10а			
б			
11а			
б			
в			
г			
12			
13			
14			
15			
16а			
б			
в			
г			