

Квадрики и билинейные формы размерности > 1 и над незамкнутыми полями

Г14♦1. Из скольких точек состоят над полем¹ \mathbb{F}_9 а) коника $x_0^2 + x_1^2 + x_2^2 = 0$ на \mathbb{P}_2 б) квадрака $x_0^2 + x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 0$ в \mathbb{P}_3 ?

Г14♦2. Сколько прямых пересекает 4 данные попарно не пересекающиеся прямые в а) $\mathbb{P}(\mathbb{C}^4)$ б) $\mathbb{A}(\mathbb{C}^4)$ в) $\mathbb{P}(\mathbb{R}^4)$ г) $\mathbb{A}(\mathbb{R}^4)$? Найдите все возможные ответы и выясните, какие из них устойчивы к малым шевелениям четырёх данных прямых.

Г14♦3. Покажите, что касательное пространство к квадрике Сегре

$$S = \{F : U \rightarrow U \mid \dim U = 2, \text{rk } F = 1\} \subset \mathbb{P}_3 = \mathbb{P}(\text{End } U)$$

в точке $v \otimes \xi \in S$ образовано всеми такими линейными операторами $F \neq 0$, что $F(\text{Ann } \xi) \subset \mathbb{k} \cdot v$.

Г14♦4. Покажите, что что пересечение гладкой вещественной проективной квадрики Q сигнатуры (p, m) с касательной плоскостью $T_x Q$ является линейным соединением точки x с гладкой квадрикой сигнатуры $(p - 1, m - 1)$ в дополнительном к x подпространстве в $T_x Q$.

Г14♦5. Какими могут быть ранг и сигнатура гиперплоского сечения гладкой вещественной проективной квадрики Q сигнатуры (p, m) ? Покажите, что такое сечение особо, если и только если гиперплоскость касается квадрики.

Г14♦6. Для гладкой квадрики $G = V(g) \subset \mathbb{P}_3 = \mathbb{P}(V)$ над полем \mathbb{C} рассмотрим на пространстве $\Lambda^2 V$ билинейную форму $\Lambda^2 g(v_1 \wedge v_2, w_1 \wedge w_2) \stackrel{\text{def}}{=} \det \begin{pmatrix} \tilde{g}(v_1, w_1) & \tilde{g}(v_1, w_2) \\ \tilde{g}(v_2, w_1) & \tilde{g}(v_2, w_2) \end{pmatrix}$. Запишите её матрицу

Грама в таком базисе $e_i \wedge e_j$, что e_i составляют g -ортонормальный базис в V . Проверьте, что

а) форма $\Lambda^2 g$ симметрична и невырождена, а пересечение задаваемой ею квадрики в $\mathbb{P}_5 = \mathbb{P}(\Lambda^2 V)$ с квадрикой Плюккера $P = \{\omega \in \Lambda^2 V \mid \omega \wedge \omega = 0\}$ состоит в точности из плюккеревых образов² всех прямых, касающихся квадрики G

б) * вложение Плюккера переводит два семейства прямолинейных образующих квадрики G пару коник, высекаемых из квадрики Плюккера двумя дополнительными плоскостями в \mathbb{P}_5 , состоящими из неподвижных точек *инволюции Ходжа* $*$: $\mathbb{P}(\Lambda^2 V) \rightarrow \mathbb{P}(\Lambda^2 V)$, $\omega \mapsto \omega^*$, которая однозначно определяется тем, что $\omega_1 \wedge \omega_2^* = \Lambda^2 g(\omega_1, \omega_2) \cdot e_1 \wedge e_2 \wedge e_3 \wedge e_4$ для всех $\omega_1, \omega_2 \in \Lambda^2 V$ и любого g -ортонормального базиса e_1, e_2, e_3, e_4 в V .

Г14♦7. В пространстве \mathbb{P}_3 над бесконечным полем заданы 6 точек p_{ij} , занумерованных парами цифр $1 \leq i < j \leq 4$, причём никакие 4 точки не компланарны. Покажите, что 4 плоскости³ $(p_{12}p_{13}p_{14}), (p_{12}p_{23}p_{24}), (p_{13}p_{23}p_{34}), (p_{14}p_{24}p_{34})$ пересекаются в одной точке, если и только если 4 плоскости⁴ $(p_{12}p_{23}p_{13}), (p_{12}p_{24}p_{14}), (p_{13}p_{14}p_{34}), (p_{23}p_{24}p_{34})$ пересекаются в одной точке.

Г14♦8. Для билинейной формы⁵ $\beta : V \times V \rightarrow \mathbb{k}$ а) выразите матрицы операторов $\wedge \beta : V \rightarrow V^*$, $v \mapsto \beta(v, *)$ и $\beta^\wedge : V \rightarrow V^*$, $v \mapsto \beta(*, v)$, в двойственных базисах e и e^* через матрицу Грама базиса e . б) Докажите равносильность друг другу следующих свойств ограничения формы β на подпространство $U \subset V$: (1) \forall ненулевого $u \in U \exists u' \in U : \beta(u', u) \neq 0$ (2) \forall ненулевого $u \in U \exists u'' \in U : \beta(u, u'') \neq 0$ (3) $V = U \oplus U^\perp$, где $U^\perp = \{w \in V \mid \beta(u, w) = 0 \forall u \in U\}$ (4) $V = {}^\perp U \oplus U$, где ${}^\perp U = \{w \in V \mid \beta(w, u) = 0 \forall u \in U\}$. в) Когда эти свойства выполнены, постройте изометрический изоморфизм $U^\perp \simeq {}^\perp U$. г) Приведите пример, когда $U^\perp \neq {}^\perp U$ как подпространства в V . Может ли существовать такое дополнительное к $\ker \beta^\wedge$ подпространство $U \subset V$, что ограничение $\beta|_U$ вырождено, для д) произвольной е) (косо)симметричной билинейной формы β ?

¹Элементы поля $\mathbb{F}_9 = \mathbb{Z}[x]/(3x^2 + 1)$ суть $a + b\sqrt{-1}$, где $a, b \in \mathbb{Z}/(3)$ и $\sqrt{-1} \cdot \sqrt{-1} = -1 \in \mathbb{Z}/(3)$

²Вложение Плюккера биективно отображает множество всех прямых в $\mathbb{P}_3 = \mathbb{P}(V)$ на квадрику Плюккера $P \subset \mathbb{P}_5 = \mathbb{P}(\Lambda^2 V)$, сопоставляя прямой $(ab) \subset \mathbb{P}_3$ одномерное подпространство в $\Lambda^2 V$, натянутое на бивектор $a \wedge b$.

³Натянутые на все такие тройки точек, у которых все пары индексов имеют общую цифру.

⁴Натянутые на все такие тройки точек, у которых все три пары индексов не содержит одну из цифр.

⁵Которая не предполагается ни (косо)симметричной, ни (не)вырожденной.

№	дата сдачи	имя и фамилия принявшего	подпись принявшего
1а			
б			
2а			
б			
в			
г			
3			
4			
5			
6а			
б			
7			
8а			
б			
в			
г			
д			
е			