

§1. Пространство с билинейной формой

1.1. Соглашения и обозначения. Мы рассматриваем конечномерное векторное пространство V над произвольным полем \mathbb{k} . Наборы $\mathbf{v} = (v_1, v_2, \dots, v_k)$ из векторов $v_j \in V$ удобно воспринимать как матрицы-строки, элементами которых являются векторы. Если векторы из набора $\mathbf{u} = (u_1, u_2, \dots, u_n)$ линейно выражаются через векторы из набора $\mathbf{w} = (w_1, w_2, \dots, w_m)$ по формулам $u_j = \sum_i w_i c_{ij} = w_1 c_{1j} + w_2 c_{2j} + \dots + w_m c_{mj}$, где $c_{ij} \in \mathbb{k}$, то мы записываем это в виде матричного равенства $\mathbf{u} = \mathbf{w} C_{\mathbf{w}\mathbf{u}}$, где $C_{\mathbf{w}\mathbf{u}} \in \text{Mat}_{m \times n}(\mathbb{k})$ — матрица высоты m и ширины n , в j -том столбце которой стоят коэффициенты разложения вектора u_j векторам \mathbf{w} . Мы называем матрицу $C_{\mathbf{w}\mathbf{u}}$ *матрицей перехода* от векторов \mathbf{u} к векторам \mathbf{w} .

УПРАЖНЕНИЕ 1.1. Убедитесь, что если набор векторов \mathbf{w} выражается через набор векторов \mathbf{v} по формуле $\mathbf{w} = \mathbf{v} C_{\mathbf{v}\mathbf{w}}$, а набор \mathbf{v} выражается через набор \mathbf{u} по формуле $\mathbf{v} = \mathbf{u} C_{\mathbf{u}\mathbf{v}}$, то $C_{\mathbf{u}\mathbf{w}} = C_{\mathbf{u}\mathbf{v}} C_{\mathbf{v}\mathbf{w}}$.

Если задано линейное отображение $f : U \rightarrow W$ между векторными пространствами U и W , и векторы $\mathbf{u} = (u_1, u_2, \dots, u_n)$ образуют базис в U , а векторы $\mathbf{w} = (w_1, w_2, \dots, w_m)$ — базис в W , то матрица перехода от векторов $f(\mathbf{u}) = (f(u_1), f(u_2), \dots, f(u_n))$ к векторам \mathbf{w} называется *матрицей отображения f* в базисах \mathbf{u} , \mathbf{w} и обозначается $F_{\mathbf{w}\mathbf{u}}$. Её j -тый столбец состоит из координат вектора $f(u_j)$ в базисе \mathbf{w} . Таким образом, $f(\mathbf{u}) = \mathbf{w} F_{\mathbf{w}\mathbf{u}}$. Вектор $\mathbf{v} = \mathbf{u}x$ со столбцом координат x в базисе \mathbf{u} переводится отображением f в вектор

$$f(\mathbf{v}) = f(\mathbf{u}x) = f(\mathbf{u})x = \mathbf{w} F_{\mathbf{w}\mathbf{u}} x$$

со столбцом координат $F_{\mathbf{w}\mathbf{u}} x$ в базисе \mathbf{w} .

Двойственное к V пространство линейных функций $\varphi : V \rightarrow \mathbb{k}$ обозначается через V^* . Элементы этого пространства также называются *ковекторами*, *линейными формами* или *линейными функционалами* на V . Каждому базису $\mathbf{e} = (e_1, e_2, \dots, e_n)$ пространства V отвечает *двойственный базис* $\mathbf{e}^* = (e_1^*, e_2^*, \dots, e_n^*)$ пространства V^* . Линейная функция $e_i^* : V \rightarrow \mathbb{k}$ сопоставляет вектору $v \in V$ его i -тую координату в базисе \mathbf{e} и действует на базисные векторы e_j по правилу

$$e_i^*(e_j) = \delta_{ij} \stackrel{\text{def}}{=} \begin{cases} 1 & \text{при } j = i \\ 0 & \text{при } j \neq i. \end{cases}$$

УПРАЖНЕНИЕ 1.2. Убедитесь, i -тая координата произвольной линейной функции $\varphi : V \rightarrow \mathbb{k}$ в базисе \mathbf{e}^* равна значению этой функции на базисном векторе e_i , т. е. $\varphi = \sum_i e_i^* \cdot \varphi(e_i)$.

Линейное отображение $V \rightarrow V^{**}$, $v \mapsto e v_v$, сопоставляющее вектору $v \in V$ функционал вычисления $e v_v : V^* \rightarrow \mathbb{k}$, $\varphi \mapsto \varphi(v)$, переводит любой базис \mathbf{e} пространства V в двойственный к базису \mathbf{e}^* в V^* базис пространства V^{**} и, стало быть, является изоморфизмом.

Для подпространств $U \subset V$ и $W \subset V^*$ мы обозначаем через $\text{Ann } U \subset V^*$ и $\text{Ann } W \subset V$ их *аннуляторы* $\text{Ann } U \stackrel{\text{def}}{=} \{\varphi \in V^* \mid \forall u \in U \varphi(u) = 0\}$ и $\text{Ann } W \stackrel{\text{def}}{=} \{v \in V \mid \forall \psi \in W \varphi(v) = 0\}$. Соответствие $U \mapsto \text{Ann } U$ является инволютивной¹ биекцией между векторными подпространствами размерности k в V и векторными подпространствами размерности $\dim V - k$ в V^* . Эта

¹Т. е. обратной самой себе. Это означает, что $\text{Ann Ann } U = U$ для любого векторного подпространства U как в V , так и в V^* .

биекция переводит суммы векторных подпространств в пересечения, а пересечения — в суммы¹.

1.2. Билинейные формы. Отображение $\beta : V \times V \rightarrow \mathbb{k}$ называется *билинейной формой* на пространстве V , если оно линейно по каждому из двух своих аргументов при фиксированном другом, т. е. удовлетворяет равенству

$$\beta(x_1 u_1 + x_2 u_2, y_1 w_1 + y_2 w_2) = \sum_{i,j=1}^2 x_i y_j \beta(u_i, w_j) \quad (1-1)$$

при всех $u_1, u_2, w_1, w_2 \in V$ и $x_1, x_2, y_1, y_2 \in \mathbb{k}$.

УПРАЖНЕНИЕ 1.3. Убедитесь, что билинейные формы образуют векторное подпространство в пространстве всех функций $V \times V \rightarrow \mathbb{k}$.

Если форма β на пространстве V зафиксирована, то её значение $\beta(u, w) \in \mathbb{k}$ на паре векторов $u, w \in V$ иногда бывает удобно записывать в виде *скалярного произведения* $u \cdot w$, принимающего значения в поле \mathbb{k} и, вообще говоря, некоммутативного. Формула (1-1) утверждает, что это произведение дистрибутивно по отношению к линейным комбинациям векторов, т. е. подчиняется стандартным правилам раскрытия скобок.

1.2.1. Матрицы Грама. С любыми двумя наборами векторов

$$\mathbf{u} = (u_1, u_2, \dots, u_n) \quad \text{и} \quad \mathbf{w} = (w_1, w_2, \dots, w_m), \quad \text{где} \quad u_i, w_j \in V,$$

связана матрица их попарных скалярных произведений $B_{\mathbf{u}\mathbf{w}} \stackrel{\text{def}}{=} \mathbf{u}^t \cdot \mathbf{w} \in \text{Mat}_{n \times m}(\mathbb{k})$ с элементами $b_{ij} = v_i \cdot w_j = \beta(u_i, w_j)$. Она называется *матрицей Грама* наборов \mathbf{u}, \mathbf{w} и формы β . Когда наборы совпадают: $\mathbf{u} = \mathbf{w}$, мы пишем просто $B_{\mathbf{u}}$ вместо $B_{\mathbf{u}\mathbf{u}}$. В этом случае $\det B_{\mathbf{u}} \in \mathbb{k}$ называется *определителем Грама* формы β и набора векторов \mathbf{u} .

Если наборы векторов \mathbf{u} и \mathbf{w} линейно выражаются через наборы \mathbf{e} и \mathbf{f} по формулам $\mathbf{u} = \mathbf{e} C_{\mathbf{e}\mathbf{u}}$ и $\mathbf{w} = \mathbf{f} C_{\mathbf{f}\mathbf{w}}$, то $B_{\mathbf{u}\mathbf{w}} = \mathbf{u}^t \mathbf{w} = (\mathbf{e} C_{\mathbf{e}\mathbf{u}})^t (\mathbf{f} C_{\mathbf{f}\mathbf{w}}) = C_{\mathbf{e}\mathbf{u}}^t \mathbf{e}^t \mathbf{f} C_{\mathbf{f}\mathbf{w}} = C_{\mathbf{e}\mathbf{u}}^t B_{\mathbf{e}\mathbf{f}} C_{\mathbf{f}\mathbf{w}}$. В частности, если $\mathbf{u} = \mathbf{w} C_{\mathbf{w}\mathbf{u}}$, то

$$B_{\mathbf{u}} = C_{\mathbf{w}\mathbf{u}}^t B_{\mathbf{w}} C_{\mathbf{w}\mathbf{u}}. \quad (1-2)$$

Если векторы $\mathbf{e} = (e_1, e_2, \dots, e_n)$ образуют базис в V , то скалярное произведение $\beta(u, w)$ любых двух векторов $u = \mathbf{e} x$ и $w = \mathbf{e} y$ однозначно выражается через столбцы x, y их координат в базисе \mathbf{e} по формуле

$$u \cdot w = \mathbf{u}^t \cdot \mathbf{w} = x^t \mathbf{e}^t \cdot \mathbf{e} y = x^t B_{\mathbf{e}} y. \quad (1-3)$$

Поскольку любая квадратная матрица $B_{\mathbf{e}} \in \text{Mat}_n(\mathbb{k})$ задаёт по этой формуле билинейную форму на пространстве V , сопоставление билинейной форме её матрицы Грама в произвольно зафиксированном базисе устанавливает биекцию между пространством билинейных форм на n -мерном векторном пространстве V и пространством матриц размера $n \times n$.

УПРАЖНЕНИЕ 1.4. Убедитесь, что эта биекция линейна.

¹Доказательство всех этих фактов см. в лекции http://gorod.bogomolov-lab.ru/ps/stud/geom_ru/1617/lec_04.pdf, раздел 4.4.3, стр. 64.

1.2.2. Корреляции. Задание билинейной формы $\beta : V \times V \rightarrow \mathbb{K}$ эквивалентно заданию линейного отображения

$$\beta^\wedge : V \rightarrow V^*, \quad v \mapsto \beta(*, v), \quad (1-4)$$

переводящего вектор $v \in V$ в линейную форму $u \mapsto \beta(u, v)$ на пространстве V , задаваемую правым скалярным умножением векторов из V на v . Линейное отображение (1-4) называется *правой корреляцией* билинейной формы β . Форма β однозначно восстанавливается из корреляции по формуле $\beta(u, w) = \beta^\wedge(w)u$. Если зафиксировать в пространствах V и V^* двойственные базисы $e = (e_1, e_2, \dots, e_n)$ и $e^* = (e_1^*, e_2^*, \dots, e_n^*)$, то матрица отображения β^\wedge в этих базисах совпадёт с матрицей Грама формы β в базисе e : $B_{e^* e}^\wedge = B_e$.

УПРАЖНЕНИЕ 1.5. Убедитесь в этом!

Таким образом, сопоставление билинейной форме β её правой корреляции β^\wedge устанавливает изоморфизм пространства билинейных форм на V с пространством линейных отображений из V в V^* . Симметричным образом, задание билинейной формы $\beta : V \times V \rightarrow \mathbb{K}$ эквивалентно заданию *левой корреляции*

$${}^\wedge\beta : V \rightarrow V^*, \quad v \mapsto \beta(v, *), \quad (1-5)$$

переводящей вектор $v \in V$ в линейную форму левого скалярного умножения векторов из V на v : $u \mapsto v \cdot u = \beta(u, v)$.

УПРАЖНЕНИЕ 1.6. Убедитесь в том, что матрица левой корреляции в двойственных базисах e и e^* пространств V и V^* равна B_e^t , и что левая корреляция билинейной формы β является правой корреляцией *транспонированной формы* $\beta^t(u, w) \stackrel{\text{def}}{=} \beta(w, u)$.

1.2.3. Ядра, ранг и коранг. Векторные пространства

$$\begin{aligned} V^\perp &= \ker \beta^\wedge = \{u \in V \mid \forall v \in V \beta(v, u) = 0\} \\ {}^\perp V &= \ker \beta^* = \{u \in V \mid \forall v \in V \beta(u, v) = 0\} \end{aligned} \quad (1-6)$$

называются, соответственно, *правым* и *левым* ядром билинейной формы β . Вообще говоря, $V^\perp \neq {}^\perp V$, если форма β не является симметричной или кососимметричной. Однако

$$\dim V^\perp = \dim {}^\perp V.$$

В самом деле, $\dim \ker \beta^\wedge = \dim V - \dim \text{im } \beta^\wedge$, $\dim \ker \beta^* = \dim V - \dim \text{im } {}^\wedge\beta$, и размерности образов операторов β^\wedge , ${}^\wedge\beta$ равны рангам их матриц в каких-либо двойственных друг другу базисах e , e^* пространств V и V^* . Так как эти матрицы транспонированы друг другу по [упр. 1.6](#), они имеют одинаковый ранг, равный рангу матрицы Грама B_e базиса e по [упр. 1.5](#). Итак, оба пространства в (1-6) имеют размерность $\dim V - \text{rk } B_e$. Это число называется *корангом* билинейной формы β и обозначается $\text{cor } \beta$. Ранг матрицы Грама, равный размерности образа каждой из корреляций, не зависит от выбора базиса и называется *рангом* билинейной формы β и обозначается $\text{rk } \beta$.

1.2.4. Изометрии. Линейное отображение $f : V_1 \rightarrow V_2$ между векторными пространствами V_1 и V_2 , на которых заданы билинейные формы β_1 и β_2 , называется *изометрическим*¹, если для любых векторов $u, w \in V_1$ выполняется равенство $\beta_1(u, w) = \beta_2(f(u), f(w))$. Билинейные формы β_1 и β_2 называются *изоморфными*, если между пространствами V_1 и V_2 имеется изометрический линейный изоморфизм.

¹Или *гомоморфизмом* пространств с билинейными формами.

1.3. Невырожденные формы. Билинейная форма β называется *невырожденной*¹, если она удовлетворяет условиям следующего ниже [предл. 1.1](#). Формы, не удовлетворяющие этим условиям, называются *вырожденными* или *особыми*.

Предложение 1.1 (критерии невырожденности)

Следующие свойства билинейной формы β на конечномерном векторном пространстве V равносильны друг другу:

- 1) в V существует базис с ненулевым определителем Грама
- 2) любой базис в V имеет ненулевой определитель Грама
- 3) левая корреляция ${}^{\wedge}\beta : V \rightarrow V^*$ является изоморфизмом
- 4) правая корреляция $\beta^{\wedge} : V \rightarrow V^*$ является изоморфизмом
- 5) для любого ненулевого вектора $v \in V$ существует такой вектор $u \in V$, что $\beta(v, u) \neq 0$
- 6) для любого ненулевого вектора $v \in V$ существует такой вектор $u \in V$, что $\beta(u, v) \neq 0$
- 7) для любой линейной функции $\varphi : V \rightarrow \mathbb{k}$ существует такой вектор $v \in V$, что $\varphi(u) = \beta(v, u)$ для всех $u \in V$
- 8) для любой линейной функции $\varphi : V \rightarrow \mathbb{k}$ существует такой вектор $v \in V$, что $\varphi(u) = \beta(u, v)$ для всех $u \in V$

причём при выполнении этих условий вектор v в последних двух пунктах определяется формой φ однозначно.

Доказательство. Поскольку $\dim V = \dim V^*$, биективность, инъективность и сюръективность линейного отображения $V \rightarrow V^*$ равносильны друг другу и тому, что это отображение задаётся невырожденной матрицей в каких-нибудь базисах. Поэтому условия (3), (5), (7) и условия (4), (6), (8), утверждающие, соответственно, биективность, обращение в нуль ядра и сюръективность для операторов ${}^{\wedge}\beta$ и β^{\wedge} , равносильны между собой и условию (1), означаящему, что транспонированные друг другу матрицы этих операторов обратимы. Условие (1) равносильно условию (2) в силу форм. (1-2) на стр. 4, из которой вытекает, что определители Грама двух базисов e и f связаны друг с другом по формуле $\det B_e = \det_f \cdot \det^2 C_{fe}$, где C_{fe} — матрица перехода² от базиса e к базису f . \square

Пример 1.1 (евклидова форма)

Симметричная билинейная форма на координатном пространстве \mathbb{k}^n с единичной матрицей Грама E в стандартном базисе называется *евклидовой*. Над полем $\mathbb{k} = \mathbb{R}$ она задаёт евклидову структуру на пространстве \mathbb{R}^n . Евклидова форма невырождена. Однако над отличными от \mathbb{R} полями её свойства могут отличаться от интуитивно привычных свойств евклидовой структуры. Например, над полем \mathbb{C} ненулевой вектор $e_1 - ie_2 \in \mathbb{C}^2$ имеет нулевой скалярный квадрат.

Упражнение 1.7. Приведите пример n -мерного подпространства в \mathbb{C}^{2n} , на которое евклидова форма ограничивается в тождественно нулевую форму.

¹А также *неособой* или *регулярной*.

²См. п. 1.1 на стр. 3.

Базисы, в которых матрица Грама евклидовой формы равна E называются *ортонормальными*. Ниже¹ мы увидим, что над алгебраически замкнутым полем \mathbb{k} характеристики $\text{char } \mathbb{k} \neq 2$ любая невырожденная симметричная билинейная форма изометрически изоморфна евклидовой.

ПРИМЕР 1.2 (ГИПЕРБОЛИЧЕСКАЯ ФОРМА)

Симметричная билинейная форма h на чётномерном координатном пространстве \mathbb{k}^{2n} , матрица Грама которой в стандартном базисе равна

$$H = \begin{pmatrix} 0 & E \\ E & 0 \end{pmatrix}, \quad (1-7)$$

где E — единичная матрица размера $n \times n$, называется *гиперболической*. Она невырождена и над алгебраически замкнутым полем изометрически изоморфна евклидовой форме: ортонормальный базис гиперболической формы состоит из векторов

$$\varepsilon_{2v-1} = (e_v - e_{n+v}) / \sqrt{-2} \quad \text{и} \quad \varepsilon_{2v} = (e_v + e_{n+v}) / \sqrt{2}, \quad 1 \leq v \leq n.$$

Над полями \mathbb{R} и \mathbb{Q} гиперболическая форма не изоморфна евклидовой, поскольку евклидовы скалярные квадраты всех ненулевых векторов положительны, тогда как ограничение гиперболической формы на линейную оболочку первых n базисных векторов тождественно нулевое. Базис, в котором матрица Грама гиперболической формы имеет вид (1-7), называется *гиперболическим базисом*.

ПРИМЕР 1.3 (СИМПЛЕКТИЧЕСКАЯ ФОРМА)

Кососимметричная форма на чётномерном координатном пространстве \mathbb{k}^{2n} , матрица Грама которой в стандартном базисе равна

$$J = \begin{pmatrix} 0 & E \\ -E & 0 \end{pmatrix}, \quad (1-8)$$

где E — единичная матрица размера $n \times n$, называется *симплектической*. Матрица J вида (1-8) называется *симплектической единицей*. Она имеет $J^2 = -E$ и $\det J = 1$. Таким образом, симплектическая форма невырождена. Базис, в котором матрица Грама кососимметричной формы равна J , называется *симплектическим базисом*. Ниже² мы покажем, что над *любым* полем \mathbb{k} характеристики $\text{char } \mathbb{k} \neq 2$ всякая невырожденная симметричная билинейная форма изометрически изоморфна симплектической. Это означает, в частности, что размерность пространства с невырожденной кососимметричной формой обязательно чётна.

УПРАЖНЕНИЕ 1.8. Убедитесь в том, что все кососимметричные квадратные матрицы нечётного размера вырождены.

1.3.1. Левый и правый двойственный базис. Если билинейная форма β на пространстве V невырождена, то у любого базиса $e = (e_1, e_2, \dots, e_n)$ в V есть *правый* и *левый* двойственные базисы $e^\vee = (e_1^\vee, e_2^\vee, \dots, e_n^\vee)$ и ${}^\vee e = ({}^\vee e_1, {}^\vee e_2, \dots, {}^\vee e_n)$, состоящие из прообразов векторов двойственного к e базиса $e^* = (e_1^*, e_2^*, \dots, e_n^*)$ в V^* относительно правой и левой корреляций соответственно. Они однозначно характеризуются соотношениями ортогональности

$$\beta(e_i, e_j^\vee) = \beta({}^\vee e_i, e_j) = \delta_{ij}, \quad (1-9)$$

¹См. сл. 1.1 на стр. 12.

²См. теор. 1.2 на стр. 12.

которые на матричном языке имеют вид $B_{ee^v} = B_{v_e e} = E$. Так как по формулам из п° 1.2.1

$$E = B_{ee^v} = B_e C_e v_e \quad \text{и} \quad E = B_{v_e e} = C_e^t v_e B_e,$$

матрицы перехода от базисов e^v и v_e к базису e обратны, соответственно, матрице Грама базиса e и транспонированной к ней матрице: $e^v = e B_e^{-1}$ и $v_e = e B_e^{-1t}$.

Знание двойственных к e базисов позволяет раскладывать произвольный вектор $v \in V$ по базису e в виде

$$v = \sum_i \beta(v, e_i^v) e_i = \sum_i \beta(v, e_i^v) e_i. \quad (1-10)$$

УПРАЖНЕНИЕ 1.9. Убедитесь в этом!

1.3.2. Изотропные подпространства. Подпространство $U \subset V$ называется *изотропным* для билинейной формы β , если эта форма ограничивается на него в тождественно нулевую форму, т. е. когда $\beta(u, w) = 0$ для всех $u, w \in U$. Например, каждое одномерное подпространство является изотропным для любой кососимметричной формы, а линейные оболочки первых n и последних n базисных векторов пространства \mathbb{k}^{2n} изотропны для гиперболической формы из прим. 1.2 и симплектической формы из прим. 1.3.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1.2

Размерность изотропного подпространства невырожденной билинейной формы на пространстве V не превосходит $\dim V/2$.

Доказательство. Изотропность подпространства $U \subset V$ означает, что корреляция $\beta^\wedge : V \simeq V^*$ отображает U внутрь $\text{Ann } U \subset V^*$. Так как корреляция невырожденной формы инъективна, $\dim U \leq \dim \text{Ann } U = \dim V - \dim U$, откуда $2 \dim U \leq \dim V$. \square

ЗАМЕЧАНИЕ 1.1. Примеры гиперболической и симплектической форм показывают, что оценка из предл. 1.2 в общем случае неумлучшаема.

1.3.3. Группа изометрий. Линейный оператор $f : V \rightarrow V$ является изометрией¹ билинейной формы β если и только если для произвольного базиса e в V набор векторов $f(e) = e F_e$ имеет ту же матрицу Грама $B_{f(e)} = f(e)^t \cdot e$, что и базис e , т. е.

$$F_e^t B_e F_e = B_e. \quad (1-11)$$

Если форма β невырождена, то беря определители обеих частей, получаем $\det^2 F_e = 1$, откуда $\det^2 F_e = \pm 1$. Поэтому любая изометрия конечномерного пространства с невырожденной билинейной формой обратима. Так как композиция изометрий и обратное к изометрии отображение тоже являются изометриями, изометрические преобразования пространства V образуют группу. Она обозначается $O_\beta(V)$ и называется *группой изометрий*² невырожденной билинейной формы β . Изометрии определителя 1 называются *специальными* и образуют в группе всех изометрий подгруппу, обозначаемую $SO_\beta(V)$.

Из равенства (1-11) вытекает, что обратная к изометрии f изометрия имеет матрицу

$$F_e^{-1} = B_e^{-1} F_e^t B_e. \quad (1-12)$$

¹См. п° 1.2.4 на стр. 5.

²А также ортогональной группой или группой автоморфизмов.

ПРИМЕР 1.4 (ИЗОМЕТРИИ ВЕЩЕСТВЕННОЙ ГИПЕРБОЛИЧЕСКОЙ ПЛОСКОСТИ)

Оператор $f : H_2 \rightarrow H_2$, имеющий в стандартном гиперболическом базисе $e_1, e_2 \in H_2$ матрицу

$$F = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix},$$

является изометрическим тогда и только тогда, когда

$$\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},$$

что равносильно уравнениям $ac = bd = 0$ и $ad + bc = 1$, имеющим два семейства решений:

$$F_\lambda = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda^{-1} \end{pmatrix} \quad \text{и} \quad \tilde{F}_\lambda = \begin{pmatrix} 0 & \lambda \\ \lambda^{-1} & 0 \end{pmatrix}, \quad \text{где } \lambda \in \mathbb{k}^* = \mathbb{k} \setminus \{0\}. \quad (1-13)$$

Над полем \mathbb{R} оператор F_λ является собственным, и при $\lambda > 0$ называется *гиперболическим поворотом*, т. к. каждый вектор $v = (x, y)$, обе координаты которого ненулевые, движется при действии на него операторов F_λ с $\lambda \in (0, \infty)$ по гиперболе $xy = \text{const}$. Если положить $\lambda = e^t$ и перейти к ортогональному базису из векторов $p = (e_1 + e_2) / \sqrt{2}$, $q = (e_1 - e_2) / \sqrt{2}$, то оператор F_λ запишется в нём матрицей, похожей на матрицу евклидова поворота

$$\begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} e^t & 0 \\ 0 & e^{-t} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \text{ch } t & \text{sh } t \\ \text{sh } t & \text{ch } t \end{pmatrix},$$

где $\text{ch } t \stackrel{\text{def}}{=} (e^t + e^{-t})/2$ и $\text{sh } t \stackrel{\text{def}}{=} (e^t - e^{-t})/2$ называются *гиперболическими косинусом* и *синусом* вещественного числа t . Оператор F_λ с $\lambda < 0$ является композицией гиперболического поворота и центральной симметрии. Несобственный оператор \tilde{F}_λ является композицией гиперболического поворота с отражением относительно пересекающей ветви оси гиперболы.

1.3.4. Биекция между формами и операторами. На пространстве V с билинейной формой $\beta : V \times V \rightarrow \mathbb{k}$ каждому линейному оператору $f : V \rightarrow V$ можно сопоставить билинейную форму $\beta_f(u, w) \stackrel{\text{def}}{=} \beta(u, fw)$ с матрицей Грама $e^t \cdot f(e) = e^t \cdot e F_e = B_e F_e$ в произвольно выбранном базисе e пространства V . Поскольку на языке матриц отображение $f \mapsto \beta_f$ заключается в левом умножении матрицы оператора на матрицу Грама: $F_e \mapsto B_e F_e$, оно линейно и обратимо, если форма β невырождена. Обратное отображение задаётся умножением матрицы оператора слева на обратную к матрице Грама матрицу. Поэтому каждая билинейная форма $\chi : V \times V \rightarrow \mathbb{k}$ на конечномерном векторном пространстве V с фиксированной невырожденной билинейной формой β имеет вид $\chi(u, w) = \beta(u, f_\chi w)$ для некоторого линейного оператора $f_\chi : V \rightarrow V$, однозначно определяемого формой χ . Матрица F_e оператора f_χ в произвольном базисе e пространства V выражается через матрицы Грама B_e и X_e форм β и χ в том же базисе по формуле $F_e = B_e^{-1} X_e$.

ПРИМЕР 1.5 (КАНОНИЧЕСКИЙ ОПЕРАТОР)

Биекция между формами и операторами сопоставляет транспонированной к β билинейной форме $\beta^t(u, w) \stackrel{\text{def}}{=} \beta(w, u)$ оператор $\kappa : V \rightarrow V$, который называется *каноническим оператором* невырожденной билинейной формы β . Он однозначно характеризуется свойством

$$\forall u, w \in V \quad \beta(w, u) = \beta(u, \kappa w), \quad (1-14)$$

а его матрица K_e в произвольном базисе e пространства V выражается через матрицу Грама B_e формы β по формуле $K_e = B_e^{-1} B_e^t$.

УПРАЖНЕНИЕ 1.10. Убедитесь, что при замене матрицы Грама по правилу $B \mapsto C^t B C$, где $C \in \text{GL}_n(\mathbb{k})$, матрица $K = B^{-1} B^t$ меняется по правилу $K \mapsto C^{-1} K C$, т. е. канонические операторы изоморфных билинейных форм подобны.

Так как $\beta(u, w) = \beta(w, \kappa u) = \beta(\kappa u, \kappa w)$ для всех $u, w \in V$, канонический оператор является изометрическим.

1.4. Ортогоналы и ортогональные проекции. С каждым подпространством U векторного пространства V с билинейной формой $\beta : V \times V \rightarrow \mathbb{k}$ связаны левый и правый ортогоналы

$$\begin{aligned} {}^\perp U &= \{v \in V \mid \forall u \in U \beta(v, u) = 0\}, \\ U^\perp &= \{v \in V \mid \forall u \in U \beta(u, v) = 0\}. \end{aligned} \quad (1-15)$$

Вообще говоря, это два разных подпространства в V .

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1.3

Если билинейная форма β на конечномерном пространстве V невырождена, то для всех подпространств $U \subset V$ выполняются равенства

$$\dim {}^\perp U = \dim V - \dim U = \dim U^\perp \quad \text{и} \quad ({}^\perp U)^\perp = U = {}^\perp(U^\perp).$$

Доказательство. Первые два равенства верны, так как ортогоналы (1-15) суть прообразы подпространства $\text{Ann } U \subset V^*$ при изоморфизмах $\beta, \beta^\wedge : V \xrightarrow{\sim} V^*$, и $\dim \text{Ann } U = \dim V - \dim U$. Вторые два равенства вытекают из первых, поскольку оба подпространства $({}^\perp U)^\perp$ и ${}^\perp(U^\perp)$ содержат U и имеют размерность $\dim U$. \square

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1.4

Пусть билинейная форма β на произвольном¹ векторном пространстве V ограничивается на конечномерное подпространство $U \subset V$ в невырожденную на этом подпространстве форму. Тогда $V = U \oplus U^\perp$, и проекция $v_U \in U$ каждого вектора $v \in V$ на подпространство U вдоль U^\perp однозначно определяется тем, что $\beta(u, v) = \beta(u, v_U)$ для всех $u \in U$. Вектор v_U выражается через произвольный базис $u = (u_1, u_2, \dots, u_n)$ пространства U по формуле

$$v_U = \sum_{i=1}^n \beta({}^\vee u_i, v) u_i, \quad (1-16)$$

где ${}^\vee u = ({}^\vee u_1, {}^\vee u_2, \dots, {}^\vee u_n)$ — левый двойственный к u относительно формы β базис в U .

Доказательство. Так как ограничение формы β на U невырождено, для любого вектора $v \in V$ существует единственный такой вектор $v_U \in U$, что линейная функция $u \mapsto \beta(u, v)$ на пространстве U задаётся правым скалярным умножением векторов из U на этот вектор v_U , т. е. для всех $u \in U$ выполняется равенство $\beta(u, v) = \beta(u, v_U)$. Поэтому разность $v - v_U \in U^\perp$. Таким образом, каждый вектор $v \in V$ представляется в виде суммы $v = v_U + (v - v_U)$ с $v_U \in U$ и $v - v_U \in U^\perp$. Поскольку в любом разложении $v = v'_U + w$ с $v'_U \in U$ и $w \in U^\perp$ для всех $u \in U$ выполняется равенство $\beta(u, v) = \beta(u, v'_U)$, имеем равенство $v'_U = v_U$, а значит и равенство

¹Возможно даже бесконечномерном.

$w = v - v'_U = v - v_U$, что доказывает первые два утверждения предложения. Последнее утверждение вытекает из форм. (1-10) на стр. 8: $v_U = \sum_i \beta^\vee(u_i, v_U) u_i = \sum_i \beta^\vee(u_i, v) u_i$. \square

УПРАЖНЕНИЕ 1.11. Докажите симметричное утверждение: $V = {}^\perp U \oplus U$, где проекция ${}_U v$ каждого вектора $v \in V$ на U вдоль ${}^\perp U$ находится по формуле ${}_U v = \sum \beta(v, u_i^\vee) u_i$ и однозначно определяется тем, что $\beta(v, u) = \beta({}_U v, u)$ для всех $u \in U$.

1.5. Симметричные и кососимметричные формы. Билинейная форма β называется *симметричной*, если $\beta(u, w) = \beta(w, u)$ для всех $u, w \in V$, и *кососимметричной* — если $\beta(v, v) = 0$ для всех $v \in V$. В последнем случае для любых $u, w \in V$ выполняется равенство

$$0 = \beta(u + w, u + w) = \beta(u, w) + \beta(w, u),$$

откуда $\beta(u, w) = -\beta(w, u)$.

УПРАЖНЕНИЕ 1.12. Убедитесь, что над полем характеристики $\text{char } \mathbb{k} \neq 2$ равенство $\beta(u, w) = -\beta(w, u)$ всех $u, w \in V$ равносильно равенству $\beta(v, v) = 0$ для всех $v \in V$. Убедитесь также, что формы $\beta(u, w)$ и $\beta^t(u, w) = \beta(w, u)$ пропорциональны ровно в двух случаях: когда $\beta^t = \pm\beta$.

Если $\text{char } \mathbb{k} = 2$, каждая кососимметричная форма автоматически симметрична, но не наоборот. Если $\text{char } \mathbb{k} \neq 2$, пространства симметричных и кососимметричных билинейных форм имеют нулевое пересечение, и каждая билинейная форма β однозначно раскладывается в сумму

$$\beta = \beta_+ + \beta_-$$

симметричной и кососимметричной форм

$$\beta_+(v, w) = \frac{\beta(v, w) + \beta(w, v)}{2} \quad \text{и} \quad \beta_-(v, w) = \frac{\beta(v, w) - \beta(w, v)}{2}.$$

Левая и правая корреляции симметричной билинейной формы совпадают друг с другом, и мы будем обозначать этот оператор через $\hat{\beta} \stackrel{\text{def}}{=} \beta^\wedge = {}^\wedge \beta : V \rightarrow V^*$ и называть просто *корреляцией*. Напомню, корреляция переводит вектор $v \in V$, в линейную функцию

$$\hat{\beta}(v) : V \rightarrow \mathbb{k}, \quad u \mapsto \beta(u, v) = \beta(v, u).$$

Для кососимметричной формы β мы полагаем $\hat{\beta} \stackrel{\text{def}}{=} \beta^\wedge = -{}^\wedge \beta$.

1.5.1. Ортогоналы и проекции. Если форма β на пространстве V (косо) симметрична, то левый и правый ортогоналы к любому подпространству $U \subset V$ совпадают друг с другом и обозначаются через U^\perp . Если (косо) симметричная форма β ограничивается на подпространство $U \subset V$ в невырожденную на этом подпространстве форму, то $V = U \oplus U^\perp$ по [предл. 1.4](#). В этом случае подпространство U^\perp называется *ортогональным дополнением* к подпространству U . Проекция v_U вектора $v \in V$ на U вдоль U^\perp называется *ортогональной проекцией* на U относительно формы β . Вектор v_U однозначно характеризуется тем, что его левое и правое скалярное произведение со всеми векторами из U такие же, как и у вектора v .

Если форма β невырождена на всём пространстве V , то $\dim U^\perp = \dim V - \dim U$ и $U^{\perp\perp} = U$ для всех подпространств $U \subset V$ по [предл. 1.4](#). В этом случае ограничение формы β на подпространство $U \subset V$ невырождено тогда и только тогда, когда невырождено её ограничение на U^\perp .

ТЕОРЕМА 1.1 (ТЕОРЕМА ЛАГРАНЖА)

Каждое конечномерное векторное пространство с симметричной билинейной формой β над любым полем \mathbb{k} характеристики $\text{char } \mathbb{k} \neq 2$ обладает базисом с диагональной матрицей Грама¹.

¹Такие базисы называются *ортогональными*.

Доказательство. Если $\dim V = 1$ или форма β нулевая, то матрица Грама любого базиса диагональна. Если форма β ненулевая, то найдётся вектор $e \in V$ с $\beta(e, e) \neq 0$, ибо в противном случае $2\beta(u, w) = \beta(u + w, u + w) - \beta(u, u) - \beta(w, w) = 0$ для всех $u, w \in V$. Возьмём такой вектор e в качестве первого вектора искомого базиса. Поскольку ограничение формы β на одномерное подпространство $U = \mathbb{k} \cdot e$ невырождено, пространство V распадается в прямую ортогональную сумму $U \oplus U^\perp$. По индукции, в U^\perp есть базис с диагональной матрицей Грама. Добавляя к нему e , получаем искомый базис в V . \square

ПРИМЕР 1.6 (ОРТОГОНАЛЬНЫЙ БАЗИС ГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО ПРОСТРАНСТВА)

В гиперболическом пространстве¹ \mathbb{k}^{2n} с гиперболическим базисом $(e_1, \dots, e_n, e_{n+1}, \dots, e_{2n})$ над произвольным полем \mathbb{k} характеристики $\text{char}(\mathbb{k}) \neq 2$ в качестве ортогонального базиса можно, например, взять векторы $p_i = e_i + e_{n+i}$ и $q_i = e_i - e_{n+i}$ со скалярными квадратами $h(p_i, p_i) = 2$ и $h(q_i, q_i) = -2$.

СЛЕДСТВИЕ 1.1

Над алгебраически замкнутым полем \mathbb{k} характеристики $\text{char}(\mathbb{k}) \neq 2$ две симметричных билинейных формы изометрически изоморфны если и только если их матрицы Грама имеют одинаковый ранг.

Доказательство. Над алгебраически замкнутым полем каждый ненулевой диагональный элемент матрицы Грама ортогонального базиса можно сделать единичным, заменив соответствующий ему базисный вектор e_i на $e_i / \sqrt{\beta(e_i, e_i)}$. \square

ТЕОРЕМА 1.2 (ТЕОРЕМА ДАРБУ)

Над произвольным полем \mathbb{k} любой характеристики всякое конечномерное векторное пространство V с невырожденной кососимметричной билинейной формой ω изометрически изоморфно симплектическому пространству². В частности, размерность пространства V чётна.

Доказательство. Для начала построим в V базис, матрица Грама которого состоит из расположенных на главной диагонали 2×2 -блоков вида

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}. \quad (1-17)$$

В качестве первого базисного вектора возьмём произвольный ненулевой вектор $e_1 \in V$. Так как форма ω невырождена, найдётся такой вектор $w \in V$, что $\omega(e_1, w) = a \neq 0$. Положим $e_2 = w/a$. Поскольку $\omega(e_1, e_1) = 0$, векторы e_1 и e_2 не пропорциональны и порождают двумерное подпространство $U \subset V$. Матрица Грама ограничения формы ω на это подпространство в базисе (e_1, e_2) имеет вид (1-17). Так как ограничение формы ω на U невырождено, $V = U \oplus U^\perp$ и ограничение формы ω на U^\perp тоже невырождено. Индукция по $\dim V$ позволяет считать, что в подпространстве U^\perp требуемый базис уже имеется. Добавляя к нему e_1, e_2 , получаем искомый базис $e_1, e_2, \dots, e_{2k-1}, e_{2k}$ в $V = U \oplus U^\perp$. Симплектический базис формы ω получается из построенного перестановкой векторов: сначала надо написать подряд все векторы с нечётными номерами, а потом — с чётными. \square

¹См. прим. 1.2 на стр. 7.

²См. прим. 1.3 на стр. 7.

1.5.2. Ядро. Левое и правое ядро (косо)симметричной формы β совпадают друг с другом и называются просто *ядром* этой формы. Мы обозначаем это пространство через

$$\ker \beta \stackrel{\text{def}}{=} \ker \hat{\beta} = \ker \beta^\wedge = \ker {}^\wedge \beta = \{w \in V \mid \forall v \in V \beta(v, w) = 0\}.$$

Предложение 1.5

Ограничение (косо) симметричной формы β на любое дополнительное к ядру $\ker \beta$ подпространство $U \subset V$ невырождено.

Доказательство. Пусть подпространство $U \subset V$ таково, что $V = \ker \beta \oplus U$, а вектор $w \in U$ удовлетворяет для всех $u \in U$ соотношению $\beta(u, w) = 0$. Записывая произвольный вектор $v \in V$ в виде $v = e + u$, где $e \in \ker \beta$ и $u \in U$, получаем $\beta(v, w) = \beta(e, w) + \beta(u, w) = 0$, откуда $w \in U \cap \ker \beta = 0$. \square

Предостережение 1.1. Для произвольной билинейной формы, которая не является симметричной или кососимметричной, [предл. 1.5](#), вообще говоря, неверно.

Ответы и указания к некоторым упражнениям

Упр. 1.5. В клетке (i, j) матрицы $B_{e^*, e}^\wedge$ отображения $\beta^\wedge : e_j \mapsto \beta(*, e_j)$ стоит i -тая координата линейной функции $u \mapsto \beta(u, e_j)$ в базисе e^* , равная значению этой функции на базисном векторе e_i , т. е. скалярному произведению $\beta(e_i, e_j)$.

Упр. 1.7. Линейная оболочка векторов $e_\nu + ie_{n+\nu}$ с $1 \leq \nu \leq n$.

Упр. 1.8. Если матрица $B \in \text{Mat}_n(\mathbb{K})$ кососимметрична, то $\det B = \det B^t = \det(-B) = (-1)^n \det B$.

Упр. 1.9. Пусть $v = \sum x_i e_i$. Скалярно умножая v слева на ${}^\vee e_i$, получаем $\beta({}^\vee e_i, v) = x_i$. Скалярно умножая v справа на e_i^\vee , получаем $\beta(v, e_i^\vee) = x_i$.