

§5. Проективные преобразования

5.1. Линейные проективные изоморфизмы. Всякий линейный изоморфизм векторных пространств $F : U \simeq W$ корректно задаёт биекцию $\bar{F} : \mathbb{P}(U) \simeq \mathbb{P}(W)$ между одномерными подпространствами в U и W , которая называется *линейным проективным преобразованием* или *проективным изоморфизмом*.

ПРИМЕР 5.1 (перспектива между гиперплоскостями)

Для любой пары проективных гиперплоскостей $L_1, L_2 \subset \mathbb{P}_n = \mathbb{P}(V)$ и произвольной точки $p \notin L_1 \cup L_2$ центральная проекция гиперплоскости L_1 из точки p на гиперплоскость L_2 задаёт проективный изоморфизм между L_1 и L_2 , который мы будем обозначать $p : L_1 \simeq L_2$ и называть *перспективой* с центром в p .

В самом деле, пусть $L_1 = \mathbb{P}(U)$, $L_2 = \mathbb{P}(W)$ и $p = \mathbb{P}(k \cdot e)$. Тогда $V = W \oplus k \cdot e$, ибо $p \notin L_2$, и центральная проекция из p задаётся ограничением линейной проекции $V \rightarrow W$ вдоль одномерного подпространства $k \cdot e$ на подпространство $U \subset V$. Так как $p \notin L_1$, подпространство U имеет нулевое пересечение с ядром проекции и, стало быть, проектируется на W изоморфно.

ТЕОРЕМА 5.1

Для любых двух векторных пространств U, W одинаковой размерности $\dim U = \dim W = n + 1$ и упорядоченных наборов из $n + 2$ точек $p_0, p_1, \dots, p_{n+1} \in \mathbb{P}(U)$, $q_0, q_1, \dots, q_{n+1} \in \mathbb{P}(W)$, в каждом из которых никакие $n + 1$ точек не лежат в одной гиперплоскости, существует единственный с точностью до пропорциональности линейный изоморфизм $F : U \simeq W$, такой что $\bar{F}(p_i) = q_i$ при всех i .

Доказательство. Рассмотрим какие-нибудь ненулевые векторы u_i и w_i , представляющие точки p_i и q_i , и зафиксируем наборы векторов $\mathbf{u} = (u_0, u_1, \dots, u_n)$ и $\mathbf{w} = (w_0, w_1, \dots, w_n)$ в качестве базисов векторных пространств U и W . Отображение $\bar{F} : \mathbb{P}(U) \rightarrow \mathbb{P}(W)$ тогда и только тогда переводит точку p_i в точку q_i , когда $F(u_i) = \lambda_i w_i$ для некоторых ненулевых $\lambda_i \in \mathbb{k}$. Поэтому точки p_0, p_1, \dots, p_n переходят в точки q_0, q_1, \dots, q_n если и только если матрица $F_{\mathbf{w}\mathbf{u}}$ оператора F в выбранных нами базисах диагональна с ненулевыми элементами $\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_n$ на диагонали. В силу наложенных на точки условий все координаты x_i в разложении $u_{n+1} = x_0 u_0 + x_1 u_1 + \dots + x_n u_n$ вектора u_{n+1} по базису \mathbf{u} отличны от нуля, так как при занулении i -той координаты точка p_{n+1} и n точек p_ν с $\nu \neq i$ оказываются в одной гиперплоскости $x_i = 0$. Если $w_{n+1} = y_0 w_0 + y_1 w_1 + \dots + y_n w_n$ и $F(u_{n+1}) = \lambda w_{n+1}$ для некоторого ненулевого $\lambda \in \mathbb{k}$, то $y_i = \lambda \lambda_i x_i$ при всех $0 \leq i \leq n$, откуда $\lambda_i = \lambda^{-1} y_i / x_i$, т. е. матрица оператора F определяется однозначно с точностью до умножения на ненулевую константу λ^{-1} . □

Следствие 5.1

Два линейных изоморфизма тогда и только тогда задают равные проективные изоморфизмы, когда они пропорциональны. □

ПРИМЕР 5.2 (четырёхвершинник и эпиморфизм $S_4 \rightarrow S_3$)

Любые четыре точки $a, b, c, d \in \mathbb{P}_2$, никакие три из которых не коллинеарны, задают конфигурацию из трёх пар прямых, соединяющих непаресекающиеся пары точек (см. рис. 5◊1). Эта конфигурация называется *четырёхвершинником $abcd$* , а пары прямых, проходящих через непаресекающиеся пары точек, называются *противоположными сторонами* этого четырёхвершинника. Точки пересечений пар противоположных сторон

$$x = (ab) \cap (cd), \quad y = (ac) \cap (bd), \quad z = (ad) \cap (bc) \tag{5-1}$$

и проходящие через них три прямые называют *ассоциированным треугольником* xuz четырёхвершинника $abcd$. Согласно теор. 5.1 на стр. 53, каждая перестановка точек a, b, c, d однозначно задаёт проективное преобразование $\mathbb{P}_2 \xrightarrow{\sim} \mathbb{P}_2$, переводящее четырёхвершинник $abcd$ в себя, а значит, как-то переставляющее вершины x, y, z ассоциированного с ним треугольника. Возникающий таким образом гомоморфизм групп $\pi : S_4 \rightarrow S_3$ сюръективен, поскольку транспозиция точек a, b и транспозиция точек a, c приводят, соответственно, к транспозициям точек y, z и точек x, z , которые порождают группу треугольника xuz . Ядро гомоморфизма¹ π состоит из тождественной перестановки и трёх пар независимых транспозиций:

$$\ker \pi = \{(a, b, c, d), (b, a, d, c), (c, d, a, b), (d, c, b, a)\}.$$

Эта четырёхэлементная группа перестановок называется *группой Клейна* или *группой двугольника* и обозначается V_4 или D_2 .

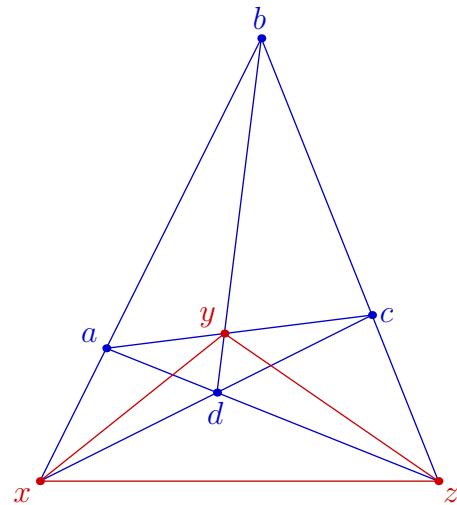


Рис. 5♦1. Четырёхвершинник.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 5.1 (линейные проективные группы)

Согласно теор. 5.1 линейные проективные автоморфизмы пространства $\mathbb{P}(V)$ образуют группу, изоморфную фактор группе полной линейной группы $GL(V)$ по подгруппе скалярных гомотетий $H = \{\lambda \cdot \text{Id} \mid \lambda \neq 0\} \subset GL(V)$. Эта фактор группа обозначается $PGL(V) = GL(V)/H$ и называется *линейной проективной группой* пространства V . Если при помощи выбора базиса отождествить линейную группу $GL(V)$ с группой невырожденных матриц GL_{n+1} , проективная группа $PGL(V)$ отождествится с группой PGL_{n+1} невырожденных матриц, рассматриваемых с точностью до пропорциональности.

ПРИМЕР 5.3 (дробно линейные преобразования прямой)

Группа $PGL_2(\mathbb{k})$ состоит из классов пропорциональности матриц $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ с $ad - bc \neq 0$.

Она действует на \mathbb{P}_1 по правилу

$$A : (x_0 : x_1) \mapsto ((ax_0 + bx_1) : (cx_0 + dx_1)).$$

В стандартной аффинной карте $U_1 \simeq \mathbb{A}^1$ с аффинной координатой $t = x_0/x_1$, это действие имеет вид дробно линейного преобразования $t \mapsto (at + b)/(ct + d)$. Единственное дробно линейное преобразование, переводящее три заданных различных точки a, b, c в $\infty, 0, 1$, очевидно, таково:

$$t \mapsto \frac{t - b}{t - a} \cdot \frac{c - a}{c - b}. \quad (5-2)$$

Образ точки $d \in \mathbb{P}_1$ при таком преобразовании называется *двойным отношением* упорядоченной четвёрки точек a, b, c, d и обозначается

$$[a, b, c, d] \stackrel{\text{def}}{=} \frac{(a - c)(b - d)}{(a - d)(b - c)}.$$

¹Напомним, что ядром гомоморфизма групп $\varphi : G_1 \rightarrow G_2$ называется подгруппа $\ker \varphi \subset G_1$, состоящая из всех элементов группы G_1 , отображающихся в единицу группы G_2 .

ТЕОРЕМА 5.2

Над алгебраически замкнутым полем \mathbb{k} характеристики нуль всякое биективное отображение

$$\varphi : \mathbb{P}_1 \setminus \{\text{конечное множество}\} \xrightarrow{\cong} \mathbb{P}_1 \setminus \{\text{конечное множество}\},$$

которое может быть задано в некоторой аффинной карте с координатой t формулой

$$\varphi(t) = g(t)/h(t), \quad \text{где } g, h \in \mathbb{k}[t], \quad (5-3)$$

продолжается на всю прямую и является линейным проективным изоморфизмом.

Доказательство. Переходя к однородным координатам $(x_0 : x_1)$, для которых $t = x_0/x_1$, и меняя при необходимости конечное множество точек неопределённости отображения φ , перепишем формулу (5-3) в виде $\varphi : (x_0 : x_1) \mapsto (f(x_0, x_1) : g(x_0, x_1))$, где f и g — взаимно простые однородные многочлены от (x_0, x_1) одинаковой степени $\deg f = \deg g = d$. Точка $\vartheta = (\vartheta_0 : \vartheta_1) \in \mathbb{P}_1$ имеет при отображении φ ровно один прообраз если и только если однородный многочлен $\vartheta_1 \cdot f(x_0, x_1) - \vartheta_0 \cdot g(x_0, x_1)$ имеет на \mathbb{P}_1 ровно один корень $\zeta = \varphi^{-1}(\vartheta)$. Над алгебраически замкнутым полем такое возможно, только если этот корень d -кратный, т. е.

$$\vartheta_1 \cdot f(x) - \vartheta_0 \cdot g(x) = \det^d(x, \zeta).$$

Поскольку алгебраически замкнутое поле \mathbb{k} бесконечно, а отображение φ биективно вне конечного множества точек, прямая (fg) в пространстве \mathbb{P}_d однородных многочленов степени d от (x_0, x_1) имеет бесконечно много точек пересечения с кривой Веронезе¹ $C_d \subset \mathbb{P}_d$, состоящей из d -тых степеней линейных двучленов. Поскольку при $d \geq 2$ никакие три точки кривой C_d не лежат на одной прямой², мы заключаем, что $d = 1$ и $\varphi \in \text{PGL}_2(\mathbb{k})$. \square

5.2. Гомографии. Линейные проективные изоморфизмы между проективными прямыми называются *гомографиями*. Простейший пример гомографии — перспектива $o : \ell_1 \xrightarrow{\cong} \ell_2$ между двумя прямыми на плоскости, задаваемая центральной проекцией из какой-нибудь точки $o \notin \ell_1 \cup \ell_2$, как в прим. 5.1 выше, см. рис. 5◊2.

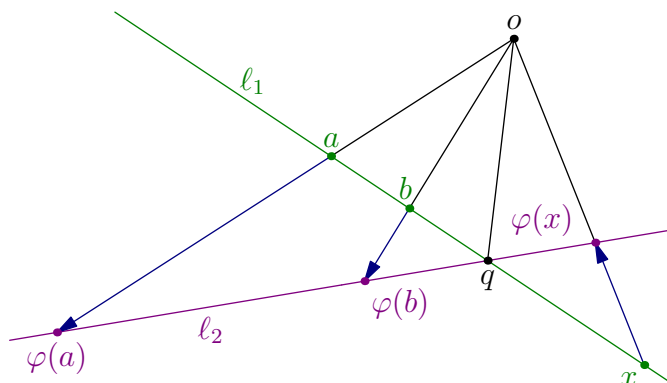


Рис. 5◊2. Перспектива.

Согласно теор. 5.1, каждая гомография однозначно определяется своим действием на три различные точки.

¹См. н° 4.4.6 на стр. 50.

²См. лем. 4.1 на стр. 51.

ЛЕММА 5.1

Гомография $\varphi : \ell_1 \xrightarrow{\sim} \ell_2$ между прямыми $\ell_1, \ell_2 \subset \mathbb{P}_2$ является перспективой если и только если она переводит точку пересечения прямых $\ell_1 \cap \ell_2$ в себя.

Доказательство. Обозначая через o точку пересечения прямых $(a, \varphi(a))$ и $(b, \varphi(b))$, соединяющих произвольные точки $a, b \in \ell_1 \setminus \ell_2$ с их образами $\varphi(a), \varphi(b)$, как на рис. 5◊2, видим, что перспектива $o : \ell_1 \xrightarrow{\sim} \ell_2$ действует на три точки a, b и $\ell_1 \cap \ell_2$ так же, как и φ . \square

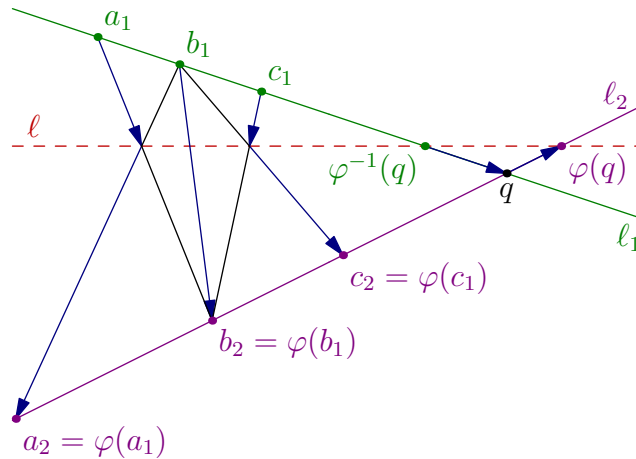


Рис. 5◊3. Перекрёстная ось.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 5.1 (ПЕРЕКРЁСТНАЯ ОСЬ ГОМОГРАФИИ)

Каждая гомография $\varphi : \ell_1 \xrightarrow{\sim} \ell_2$ между прямыми $\ell_1, \ell_2 \subset \mathbb{P}_2$ раскладывается в композицию $\varphi = b_1 \circ b_2$ двух перспектив $b_2 : \ell_1 \rightarrow \ell$ и $b_1 : \ell \rightarrow \ell_2$ с центрами в точках $b_1 \in \ell_1, b_2 \in \ell_2$. При этом точку b_1 можно выбрать на прямой ℓ_1 произвольно, точка $b_2 = \varphi(b_1)$, а прямая ℓ не зависит от выбора точки b_1 , проходит через точки $\varphi(\ell_1 \cap \ell_2)$ и $\varphi^{-1}(\ell_1 \cap \ell_2)$ и представляет собою ГМТ пересечения «перекрёстных прямых» $(x, \varphi(y)) \cap (y, \varphi(x))$, где $x \neq y$ независимо пробегает ℓ_1 . Более того, любое разложение гомографии φ в композицию $b_1 \circ b_2$ перспектив с центрами в точках $b_1 \in \ell_1, b_2 \in \ell_2$ имеет именно такой вид.

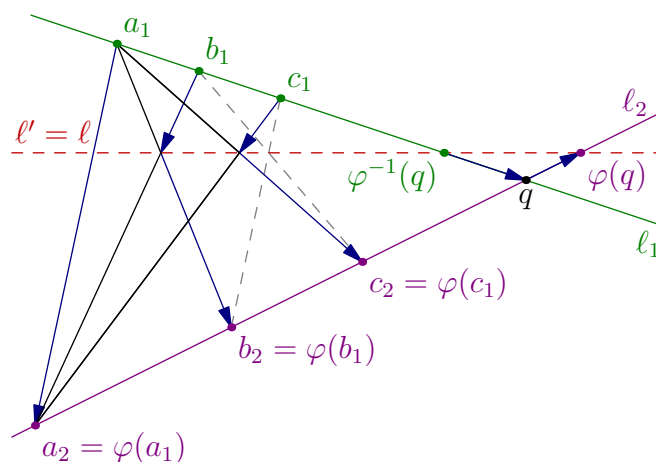


Рис. 5◊4. Равенство $\ell' = \ell$.

Доказательство **ПРЕДЛ. 5.1.** Рассмотрим какие-нибудь три различные точки $a_1, b_1, c_1 \in \ell_1$, отличные от точки $q = \ell_1 \cap \ell_2$, и обозначим через $a_2, b_2, c_2 \in \ell_2$ их образы, а через ℓ — прямую, проходящую через точки $(a_1 b_2) \cap (b_1, a_2)$ и $(c_1 b_2) \cap (b_1, c_2)$. Поскольку композиция перспектив $b_1 \circ b_2$ переводит точки a_1, b_1, c_1 в a_2, b_2, c_2 , она совпадает с φ , см. **рис. 5◊3** на стр. 56. Чтобы убедиться, что прямая ℓ не зависит от выбора точки b_1 повторим наше рассуждение, заменив в нём тройку a_1, b_1, c_1 тройкой c_1, a_1, b_1 , как на **рис. 5◊4** на стр. 56. Получим разложение $\varphi = a_1 \circ a_2$ в композицию перспектив $a_2 : \ell' \rightarrow \ell$ и $a_1 : \ell' \rightarrow \ell_2$, где прямая ℓ' проходит через точки $(a_1 c_2) \cap (c_1, a_2)$ и $(b_1 a_2) \cap (a_1, b_2)$. Заметим, что обе прямые ℓ и ℓ' проходят через точки¹ $\varphi(q)$ и $\varphi^{-1}(q)$, а также через отличную от них точку $(b_1 a_2) \cap (a_1, b_2)$. Поэтому $\ell = \ell'$. Все остальные утверждения теперь очевидны из **рис. 5◊3**. \square

УПРАЖНЕНИЕ 5.1. Для заданной пары прямых $\ell_1, \ell_2 \subset \mathbb{P}_2$ и гомографии $\varphi : \ell_1 \xrightarrow{\sim} \ell_2$, переводящей заданные три точки $a_1, b_1, c_1 \in \ell_1$ в заданные три точки $a_2, b_2, c_2 \in \ell_2$, постройте при помощи одной линейки образ $\varphi(x)$ произвольно заданной точки $x \in \ell_1$.

5.2.1. Гомографии между пучками прямых. Если рассмотренные выше прямые ℓ_1, ℓ_2 лежат на двойственной плоскости \mathbb{P}_2^\times , то они представляют собою два пучка прямых $\ell_i = p_i^\times$ с центрами в двух различных точках $p_1, p_2 \in \mathbb{P}_2$, а гомография $\varphi : p_1^\times \xrightarrow{\sim} p_2^\times$ является гомографией между этими пучками. Проективно двойственным к существованию перекрёстной оси для гомографии между двумя прямыми является следующее утверждение.

СЛЕДСТВИЕ 5.2

Для любой гомографии $\varphi : p_1^\times \xrightarrow{\sim} p_2^\times$ между пучками прямых с центрами в двух различных точках $p_1 \neq p_2$ все прямые, соединяющие пары точек вида $\ell_1 \cap \varphi(\ell_2)$ и $\ell_2 \cap \varphi(\ell_1)$, где прямые $\ell_1 \neq \ell_2$ независимо пробегают пучок p_1^\times , пересекаются в одной точке² \square

Предложение 5.2

Пусть гомография $\varphi : p_1^\times \xrightarrow{\sim} p_2^\times$ пучка прямых с центром в точке p_1 в пучок прямых с центром в точке $p_2 \neq p_1$ переводит три различные прямые $\ell'_1, \ell'_2, \ell'_3 \ni p_1$, отличные от прямой $(p_1 p_2)$, в прямые $\ell''_1, \ell''_2, \ell''_3 \ni p_2$, и пусть $q_i = \ell'_i \cap \ell''_i, i = 1, 2, 3$. Тогда ГМТ пересечения соответственных прямых $\ell \cap \varphi(\ell)$ это единственная коника, проходящая через пять точек p_1, p_2, q_1, q_2, q_3 . Эта коника распадается тогда и только тогда, когда гомография φ является перспективой³. Для неперспективной гомографии эта коника гладкая.

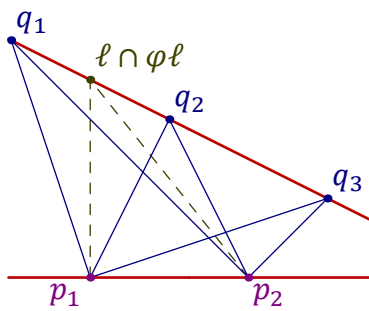


Рис. 5◊5. Перспектива $\varphi : p_1^\times \rightarrow p_2^\times$.

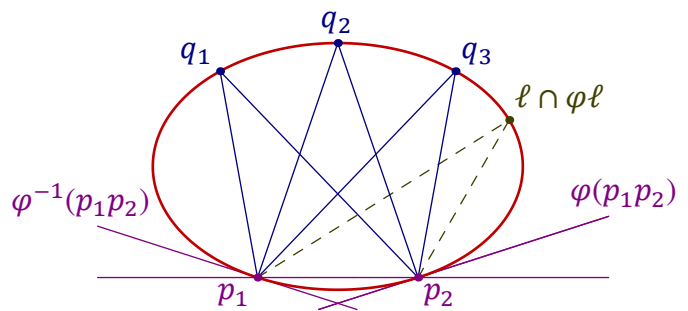


Рис. 5◊6. Неперспективная гомография $\varphi : p_1^\times \rightarrow p_2^\times$.

¹Которые могут совпадать, если гомография φ перспектива.

²Эта точка называется *перекрёстным центром* гомографии φ .

³Т. е. переводит прямую $(p_1 p_2) \in p_1^\times$ в прямую $(p_1 p_2) \in p_2^\times$.

Доказательство. Из условия вытекает, что никакие четыре из точек p_1, p_2, q_1, q_2, q_3 не коллинеарны. По предл. 4.2 на стр. 48 через них проходит единственная коника C .

УПРАЖНЕНИЕ 5.2. Убедитесь, что отображение $C : p_1^\times \rightarrow p_2^\times$, переводящее прямую $(p_1 p)$ в прямую $(p_2 p)$ для всех $p \in C_\varphi$, является гомографией.

Гомография C из упр. 5.2 действует на три прямые ℓ'_i точно также, как φ , см. рис. 5◊6. Если коника C гладкая, то она переводит касательную прямую $T_{p_1} C_\varphi$ в прямую $(p_1 p_2)$, а прямую $(p_1 p_2)$ — в касательную $T_{p_2} C_\varphi$. Если коника C_φ распавшаяся, то $C_\varphi = (p_1 p_2) \cup (q_i q_j)$, точки q_1, q_2, q_3 коллинеарны, и гомография φ переводит прямую $(p_1 p_2)$ в себя, т. е. является перспективой, см. рис. 5◊5. \square

Пример 5.4 (Трассировка коники линейкой)

Из сл. 5.2 вытекает следующий способ построения одной линейкой образа прямой $\ell \ni p_1$ при гомографии $\varphi : p_1^\times \rightarrow p_2^\times$, если известны образы $\ell'_1, \ell'_2, \ell'_3 \ni p_2$ каких-либо трёх различных прямых $\ell'_1, \ell'_2, \ell'_3 \ni p_1$: строим перекрёстный центр o — точку пересечения прямой, проходящей через точки $\ell'_1 \cap \ell''_2, \ell'_2 \cap \ell''_1$, и прямой, проходящей через точки $\ell'_2 \cap \ell''_3, \ell'_3 \cap \ell''_2$, после чего прямая $\varphi(\ell) \ni p_2$ будет пересекать прямую ℓ'_1 в той же точке, что и прямая, проходящая через o и точку $\ell \cap \ell''_1$. Так как точки пересечения $\ell \cap \varphi(\ell)$ заматают конику C , проходящую через p_1, p_2 и три точки пересечений $q_i = \ell'_i \cap \ell''_i$, мы получаем возможность одной линейкой строить точки коники, проходящей через пять заданных точек. Это построение можно сделать куда более эффективным при помощи следующего наблюдения, см. рис. 5◊7.

Отождествим пучок p_1^\times с прямой $\ell_1 = (q_1 q_3)$, а пучок p_2^\times — с прямой $\ell_2 = (q_2 q_3)$, сопоставляя каждой прямой из пучка p_1^\times её пересечение с соответствующей прямой ℓ_i . Задаваемая коникой C гомография $\varphi : p_1^\times \rightarrow p_2^\times$ превращается при этом в гомографию $\varphi : \ell_1 \rightarrow \ell_2$, которая является композицией проекции $p_1 : \ell_1 \rightarrow C$ прямой ℓ_1 на конику C из точки p_1 и проекции $p_2 : C \rightarrow \ell_2$ коники C на прямую ℓ_2 из точки p_2 , и в то же время является перспективой с центром в точке $c = (p_1 q_2) \cap (p_2 q_1)$, поскольку последняя действует на точки q_3, q_1 и $r = \varphi^{-1}(q_2)$ прямой ℓ_1 так же, как и композиция указанных проекций, см. рис. 5◊7. Таким образом, каждая проходящая через точку c прямая ℓ пересекает прямые ℓ_1 и ℓ_2 в точках t_1 и $t_2 = \varphi(t_1)$ соответственно, а значит, точка $x(\ell) = (p_1 t_1) \cap (p_2 t_2)$ лежит на конике C , см. рис. 5◊7. Когда ℓ пробегает пучок прямых с центром в c , точка $x(\ell)$ рисует конику C .

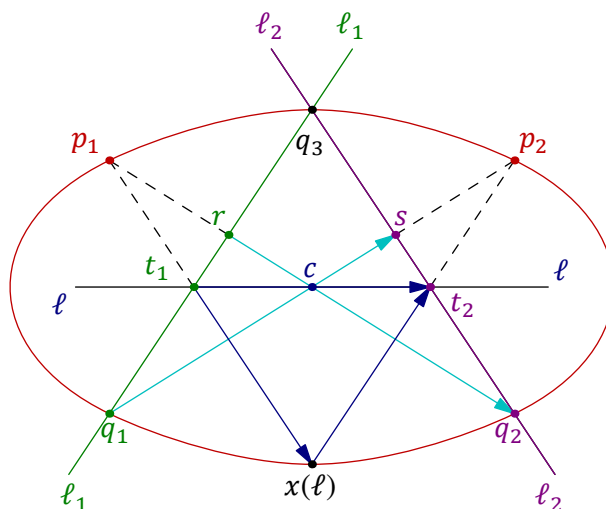


Рис. 5◊7. Трассировка коники линейкой.

ТЕОРЕМА 5.3 (ТЕОРЕМА ПАСКАЛЯ)

Шесть точек p_1, p_2, \dots, p_6 , никакие три из которых не коллинеарны, тогда и только тогда лежат на одной гладкой конике, когда коллинеарны три точки пересечений

$$x = (p_3p_4) \cap (p_6p_1), \quad y = (p_1p_2) \cap (p_4p_5), \quad z = (p_2p_3) \cap (p_5p_6)$$

пар «противоположных сторон» шестиугольника p_1, p_2, \dots, p_6 , см. рис. 5◊8.

Доказательство. Отождествляя рис. 5◊8 с рис. 5◊7, положим $\ell_1 = (p_3p_4)$ и $\ell_2 = (p_3p_2)$. Если $z \in (xy)$, то x переходит в z при перспективе

$$y: \ell_1 \rightarrow \ell_2, \quad (5-4)$$

которая, как мы видели в прим. 5.4, раскладывается в композицию проекций

$$(p_5: C \simeq \ell_2) \circ (p_1: \ell_1 \simeq C) \quad (5-5)$$

где C — гладкая коника, проходящая через p_1, p_2, \dots, p_5 . Поэтому $p_6 = (p_5z) \cap (p_3x) \in C$. Наоборот, если $p_6 \in C$ и $z = \ell \cap (p_5p_6)$, то z является образом точки $x \in \ell_1$ при композиции проекций (5-5), а значит, и при перспективе (5-4), откуда $z \in (xy)$. \square

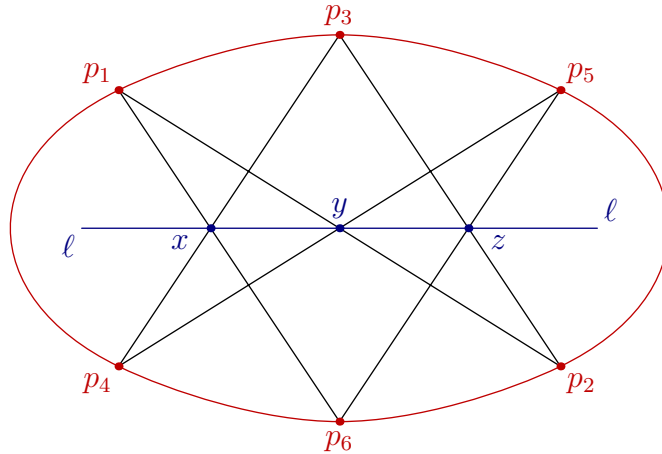


Рис. 5◊8. Гексограмма Паскаля.

5.3. Двойное отношение. Рассмотрим проективную прямую $\mathbb{P}_1 = \mathbb{P}(\mathbb{k}^2)$ со стандартными однородными координатами $(x_0 : x_1)$ и стандартную аффинную карту U_1 на ней с координатой $x = x_0 / x_1$. Разность аффинных координат $a = a_0 / a_1$ и $b = b_0 / b_1$ любых двух точек, лежащих в карте U_1 , с точностью до ненулевого множителя совпадает с определителем однородных координат $(a_0 : a_1)$ и $b = (b_0 : b_1)$ этих же точек, поскольку

$$a - b = \frac{a_0}{a_1} - \frac{b_0}{b_1} = \frac{a_0 b_1 - a_1 b_0}{a_1 b_1} = \frac{\det(a, b)}{a_1 b_1}.$$

Для упорядоченной четвёрки различных точек $p_1, p_2, p_3, p_4 \in \mathbb{P}_1$ число

$$[p_1, p_2, p_3, p_4] = \frac{(p_1 - p_3)(p_2 - p_4)}{(p_1 - p_4)(p_2 - p_3)} = \frac{\det(p_1, p_3) \cdot \det(p_2, p_4)}{\det(p_1, p_4) \cdot \det(p_2, p_3)}. \quad (5-6)$$

называется *двойным отношением*¹ этих четырёх точек. Как мы видели в [прим. 5.3](#) на стр. 54, оно равно аффинной координате образа точки p_4 при единственной гомографии, переводящей точки p_1, p_2, p_3 в $\infty, 0, 1$ с сохранением порядка. Тем самым, двойное отношение четырёх различных точек может принимать любые значения кроме $\infty, 0$ и 1 .

Предложение 5.3

Две упорядоченных четвёрки точек тогда и только тогда переводятся одна в другую гомографией, когда их двойные отношения одинаковы.

Доказательство. Пусть гомографии φ_p и φ_q переводят упорядоченные тройки точек p_1, p_2, p_3 и q_1, q_2, q_3 в тройку $\infty, 0, 1$. Если $[p_1, p_2, p_3, p_4] = [q_1, q_2, q_3, q_4]$, то $\varphi_p(p_4) = \varphi_q(q_4)$ и гомография $\varphi_q^{-1} \circ \varphi_p$ переводит p_1, p_2, p_3, p_4 в q_1, q_2, q_3, q_4 . Наоборот, если существует гомография ψ , переводящая p_1, p_2, p_3, p_4 в q_1, q_2, q_3, q_4 , то гомография $\varphi_p \circ \psi^{-1}$ переводит четвёрку q_1, q_2, q_3, q_4 в четвёрку $\infty, 0, 1, [p_1, p_2, p_3, p_4]$, откуда $[p_1, p_2, p_3, p_4] = [q_1, q_2, q_3, q_4]$. \square

Следствие 5.3

Правая часть равенства (5-6) не зависит от выбора однородных координат, а средняя часть, содержащая разности аффинных координат точек, не зависит ни от выбора аффинной карты, ни от выбора локальной аффинной координаты в ней, при условии, что эта карта содержит все четыре точки, т. е. значения p_1, p_2, p_3, p_4 конечны.

Доказательство. Поскольку замена однородных координат является гомографией, первое утверждение следует из [предл. 5.3](#). Второе утверждение является следствием первого. \square

Упражнение 5.3. Докажите [сл. 5.3](#) прямым вычислением и убедитесь, что для точек $c, d \in \mathbb{P}_1$, лежащих в аффинной карте с нулём в точке b и бесконечностью в точке a , так что $c = b + \gamma a$, $d = b + \delta a$ для некоторых $\gamma, \delta \in \mathbb{k}$, двойное отношение $[a, b, c, d] = \delta / \gamma$.

Предложение 5.4

Биекция $\varphi : \mathbb{P}_1 \xrightarrow{\simeq} \mathbb{P}_1$ является гомографией если и только если она сохраняет двойные отношения.

Доказательство. Пусть φ переводит точки a, b и c в $\infty, 0$ и 1 . Если φ сохраняет двойные отношения, то каждая точка $t \in \mathbb{P}_1 \setminus \{a, b, c\}$ переходит в точку

$$\varphi(t) = [a, b, c, t] = \frac{(t-b)(c-a)}{(t-a)(c-b)}.$$

Таким образом, преобразование φ дробно линейно. \square

5.3.1. Специальные четвёрки точек. Одновременная перестановка двух непересекающихся пар точек в формуле (5-6) не меняет двойного отношения. Пусть

$$[p_1, p_2, p_3, p_4] = [p_2, p_1, p_4, p_3] = [p_3, p_4, p_1, p_2] = [p_4, p_3, p_2, p_1] = t, \quad (5-7)$$

означает аффинную координату образа точки p_4 при гомографии $\varphi : (p_1, p_2, p_3) \mapsto (\infty, 0, 1)$. Двойное отношение $[p_2, p_1, p_3, p_4]$ равно образу точки p_4 под действием композиции гомографий $\sigma_{12}\varphi : (p_1, p_2, p_3) \mapsto (0, \infty, 1)$, в которой $\sigma_{12} : (\infty, 0, 1) \mapsto (0, \infty, 1)$ действует на аффинную координату t по правилу $t \mapsto 1/t$. Тем самым,

$$[p_2, p_1, p_3, p_4] = [p_1, p_2, p_4, p_3] = [p_3, p_4, p_2, p_1] = [p_4, p_3, p_1, p_2] = 1/t \quad (5-8)$$

¹По-английски *cross-ratio*.

Аналогичным образом, точка p_4 переводится в точки $[p_3, p_2, p_1, p_4]$ и $[p_1, p_3, p_2, p_4]$ композициями гомографий $\sigma_{13}\varphi : (p_1, p_2, p_3) \mapsto (1, 0, \infty)$ и $\sigma_{23}\varphi : (p_1, p_2, p_3) \mapsto (\infty, 1, 0)$, где гомографии $\sigma_{13} : (\infty, 0, 1) \mapsto (1, 0, \infty)$ и $\sigma_{23} : (\infty, 0, 1) \mapsto (\infty, 1, 0)$ действуют по формулам $t \mapsto t/(t-1)$ и $t \mapsto 1-t$. Поэтому

$$\begin{aligned} [p_3, p_2, p_1, p_4] &= [p_2, p_3, p_4, p_1] = [p_1, p_4, p_3, p_2] = [p_4, p_1, p_2, p_3] = t/(t-1) \\ [p_1, p_3, p_2, p_4] &= [p_3, p_1, p_4, p_2] = [p_2, p_4, p_1, p_3] = [p_4, p_2, p_3, p_1] = 1-t. \end{aligned} \quad (5-9)$$

Гомографии $(p_1, p_2, p_3) \mapsto (1, \infty, 0)$ и $(p_1, p_2, p_3) \mapsto (0, 1, \infty)$ получаются применением вслед за φ гомографий $\tau : (\infty, 0, 1) \mapsto (1, \infty, 0)$ и $\tau^{-1} : (\infty, 0, 1) \mapsto (0, 1, \infty)$, действующих по формулам $t \mapsto (t-1)/t$ и $t \mapsto 1/(1-t)$. Поэтому

$$\begin{aligned} [p_2, p_3, p_1, p_4] &= [p_3, p_2, p_4, p_1] = [p_1, p_4, p_2, p_3] = [p_4, p_1, p_3, p_2] = (t-1)/t \\ [p_3, p_1, p_2, p_4] &= [p_1, p_3, p_4, p_2] = [p_2, p_4, p_3, p_1] = [p_4, p_2, p_1, p_3] = 1/(1-t). \end{aligned} \quad (5-10)$$

Формулы (5-7)-(5-10) описывают все возможные значения двойного отношения, возникающие при 24 перестановках точек p_1, p_2, p_3, p_4 . Если $t \in \mathbb{k}$ таково, что все шесть значений

$$t, \quad 1/t, \quad t/(t-1), \quad 1-t, \quad (t-1)/t, \quad 1/(1-t) \quad (5-11)$$

из правых частей формул (5-7)-(5-10) различны, то никакую перестановку точек p_i кроме четырёх перестановок¹ (p_1, p_2, p_3, p_4) , (p_2, p_1, p_4, p_3) , (p_3, p_4, p_1, p_2) , (p_4, p_3, p_2, p_1) невозможно осуществить дробно линейным преобразованием проективной прямой. Такие четвёрки точек называются *общими*.

При значениях $t = -1, 2, 1/2$, которые, соответственно, удовлетворяют равенствам $t = 1/t$, $t = t/(t-1)$, $t = 1-t$, двойное отношение $[p_1, p_2, p_3, p_4] = t$ не меняется, соответственно, при транспозициях² $(1, 2)$, $(1, 3)$, $(1, 4)$ и пробегает при всевозможных перестановках точек всего три различных значения. Если t является корнем уравнения³ $t^2 - t + 1 = 0$, то $t = (t-1)/t$ и $t = 1/(1-t)$, а двойное отношение не меняется при всех циклических перестановках точек p_1, p_2, p_3 , принимая всего два различных значения при произвольных перестановках точек.

Четвёрка точек с двойным отношением, равным одному из пяти только что перечисленных специальных значений, называется *специальной*. Таким образом, при перестановках точек, образующих специальную четвёрку, двойное отношение принимает либо три, либо два различных значения. Геометрически, специальность четвёрки точек означает существование гомографии, осуществляющей перестановку этих точек, отличную от четырёх клейновских перестановок.

5.3.2. Гармонические пары точек. Четвёрка точек $\{a, b; c, d\} \in \mathbb{P}_1$ называется *гармонической*, если двойное отношение $[a, b, c, d] = -1$. Геометрически это условие означает, что в аффинной карте, для которой точка a является бесконечностью, точка b является центром тяжести точек c и d . При его выполнении говорят также, что пары точек $\{a, b\}$ и $\{c, d\}$ *гармоничны* по отношению друг к другу. Выше мы видели, что гармоничность двух пар точек равносильна тому, что их двойное отношение не меняется при перестановке точек в одной из этих пар⁴. Так

¹Составляющих группу Клейна из прим. 5.2 на стр. 53.

²А также остальных восьми перестановках из подгруппы, порождённой такой транспозицией и четырьмя клейновскими перестановками.

³Т.е. является отличным от -1 кубическим корнем из единицы в поле \mathbb{k} .

⁴См. формулу (5-8) на стр. 60.

как двойное отношение не меняется при перестановке пар между собой как единого целого, гармоничность является симметричным бинарным отношением на множестве неупорядоченных пар точек на \mathbb{P}_1 .

ПРИМЕР 5.5 (ГАРМОНИЧЕСКИЕ ПАРЫ ПРЯМЫХ В ЧЕТЫРЁХВЕРШИННИКЕ, ПРОДОЛЖЕНИЕ ПРИМ. 5.2)

Покажем, что в каждом из трёх пучков прямых с центрами в вершинах x, y, z треугольника, ассоциированного с четырёхвершинником $abcd$, пара сторон четырёхвершинника гармонична паре сторон треугольника xuz , см. рис. 5◊9. Для этого запараметризуем пучок всех проходящих через точку x прямых точками прямой (ad) и одновременно — точками прямой (bc) . Мы должны проверить, что прямая (xy) пересекает прямые (ad) и (bc) по таким точкам x', x'' , что $[a, d, z, x'] = [b, c, z, x''] = -1$. Поскольку центральные проекции из x и из y являются дробно линейными изоморфизмами между прямыми (ad) и (bc) , возникают следующие равенства двойных отношений соответственных точек: $[a, d, z, x'] = [b, c, z, x''] = [d, a, z, x']$. Так как при перестановке первых двух точек двойное отношение не поменялось, оно равно -1 .

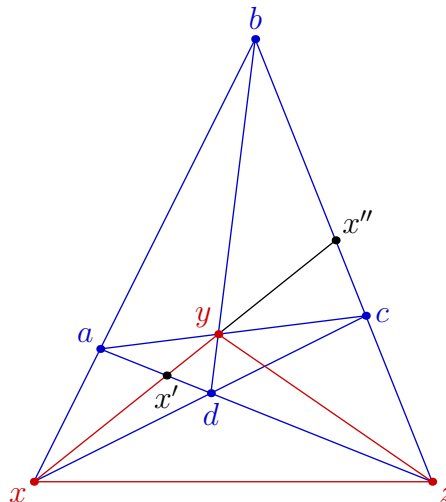


Рис. 5◊9.

5.3.3. Двойное отношение на невырожденной конике. Имеется несколько способов определить двойное отношение $[p_1, p_2, p_3, p_4]_C$ четырёх точек p_1, p_2, p_3, p_4 на невырожденной конике $C \subset \mathbb{P}_2$. Можно выбрать пятую точку $p_5 \in C$, отличную от четырёх данных, и положить $[p_1, p_2, p_3, p_4]_C$ равным двойному отношению четырёх прямых $(p_5 p_i)$, $1 \leq i \leq 4$, в пучке $p_5^\times \subset \mathbb{P}_2^\times$ всех прямых, проходящих через точку p_5 , или двойному отношению проекций точек p_1, p_2, p_3, p_4 из точки p_5 на какую-нибудь прямую $\ell \subset \mathbb{P}_2$. А можно, как в прим. 4.11 на стр. 51, изоморфно отобразить содержащую конику плоскость \mathbb{P}_2 на плоскость $\mathbb{P}(S^2 \mathbb{k}^2)$ неупорядоченных пар точек на $\mathbb{P}_1 = \mathbb{P}(\mathbb{k}^2)$ так, чтобы коника C биективно отобразилась на состоящую из двойных точек конику Веронезе $C_2 = \{a^2 \in S^2 \mathbb{k}^2 \mid a \in U\}$. Если точки $p_i \in C$ переходят при этом в квадраты $a_i^2 \in C_2$ точек $a_i \in \mathbb{P}_1 = \mathbb{P}(\mathbb{k}^2)$, мы полагаем $[p_1, p_2, p_3, p_4]_C = [a_1, a_2, a_3, a_4]$. Покажем, что эти способы корректны¹ и дают одинаковый результат, предполагая для простоты, что основное поле \mathbb{k} алгебраически замкнуто и имеет характеристику нуль², чтобы можно было применять теор. 5.2 на стр. 55.

Прямые, проходящие через фиксированную точку $p_5 \in \mathbb{P}_2$, образуют прямую $p_5^\times \subset \mathbb{P}_2^\times$, и для любой прямой $\ell \subset \mathbb{P}_2$ отображение $p_5^\times \rightarrow \ell$, переводящее прямую из пучка p_5^\times в точку её пересечения с прямой ℓ , является гомографией, т. е. линейно и биективно.

УПРАЖНЕНИЕ 5.4. Убедитесь в этом.

Поскольку гомографии сохраняют двойное отношение, двойное отношение прямых $(p_5 p_i)$ в пучке p_5^\times равно двойному отношению проекций точек p_i из точки p_5 на любую прямую ℓ . В

¹Т. е. не зависят ни от выбора точки $p_5 \in C \setminus \{p_1, p_2, p_3, p_4\}$, ни от выбора прямой ℓ , на которую проектируются точки p_i , ни от выбора линейного проективного изоморфизма данной коники C с коникой Веронезе C_2 .

²В действительности, это верно для непустой неособой коники над любым полем характеристики $\text{char} \mathbb{k} \neq 2$.

частности, последнее одинаково для всех прямых ℓ , не проходящих через точку p_5 .

Для любых двух точек $a, b \in C$ и не проходящей через них прямой ℓ композиция проекции прямой ℓ на конику C из точки a и проекции коники C обратно на прямую ℓ из точки b биективна и в однородных координатах на прямой ℓ задаётся рациональными функциями согласно форм. (4-10) на стр. 45. По теор. 5.2 эта композиция является гомографией и сохраняет двойные отношения. Таким образом, двойное отношение проекций точек p_i на прямую из точки $p_5 \in C$ не зависит от выбора точки p_5 .

Поскольку композиция вложения Веронезе $v_2 : \mathbb{P}(\mathbb{k}^2) \rightarrow \mathbb{P}(S^2\mathbb{k}^2)$, $a \mapsto a^2$, с проекцией коники Веронезе $C_2 = \text{im } v_2$ из любой точки $a^2 \in C_2$ на любую прямую $\ell \subset \mathbb{P}(S^2\mathbb{k}^2)$ биективна и задаётся в координатах рациональным функциями, она тоже является гомографией и сохраняет двойные отношения. Поэтому для коники Веронезе двойное отношение проекций любых четырёх двойных точек $a_1^2, a_2^2, a_3^2, a_4^2 \in C_2$ на любую прямую $\ell \subset \mathbb{P}(S^2\mathbb{k}^2)$ из любой точки на C_2 совпадает с двойным отношением $[a_1, a_2, a_3, a_4]$ самих точек a_i на прямой $\mathbb{P}(\mathbb{k}^2)$.

Наконец, пусть заданы два линейных проективных изоморфизма $\varphi, \psi : \mathbb{P}_2 \xrightarrow{\sim} \mathbb{P}(S^2\mathbb{k}^2)$, биективно отображающих данную невырожденную конику $C \subset \mathbb{P}_2$ на конику Веронезе и переводящих точки $p_i \in C$ в точки $a_i^2 = \varphi(p_i)$ и $b_i^2 = \psi(p_i)$. Композиция $\eta = \varphi \circ \psi^{-1}$ является линейным проективным автоморфизмом пространства $\mathbb{P}(S^2\mathbb{k}^2)$ и переводит конику Веронезе в себя. Ограничение автоморфизма η на любую прямую ℓ является гомографией между прямыми ℓ и $\eta(\ell)$ и сохраняет двойные отношения. Если точки $q_1, q_2, q_3, q_4 \in \ell$ являются образами точек $b_1^2, b_2^2, b_3^2, b_4^2 \in C_2$ при проекции из точки $c^2 \in C_2$, то их образы $\eta(q_i)$ будут образами точек $a_i^2 = \eta(b_i^2)$ при проекции из точки $\eta(c^2)$ на прямую $\eta(\ell)$. Поскольку двойное отношение точек q_i такое же, как и у точек $\eta(q_i)$, вычисленные любым из трёх описанных выше способов двойные отношения точек a_i^2 и точек b_i^2 на конике Веронезе тоже будут одинаковы.

Предложение 5.5

Гладкая коника C , проходящая через пять точек p_1, p_2, \dots, p_5 , никакие три из которых не коллинеарны, представляет собою ГМТ p , таких что в пучке прямых с центром в p двойное отношение четырёх прямых (p, p_i) , $1 \leq i \leq 4$, равно двойному отношению четырёх прямых (p_5, p_i) , $1 \leq i \leq 4$, в пучке прямых с центром в точке p_5 .

Доказательство. Мы уже видели выше, что все точки $p \in C$ обладают требуем свойством. Для любой другой точки p , обладающей этим свойством, обозначим через Q конику, проходящую через точки p, p_1, p_2, p_3 и p_5 . Отображение $\gamma_Q : p^\times \rightarrow p_5^\times$ из пучка прямых с центром в точке p в пучок прямых с центром в p_5 , переводящее прямую (pq) в прямую (p_5q) для всех $q \in Q$, биективно и рационально, а значит является гомографией. Гомография γ_Q переводит три прямые (pp_i) , $1 \leq i \leq 3$, в три прямые (p_5p_i) , $1 \leq i \leq 3$. Поскольку $[(p, p_1), (p, p_2), (p, p_3), (p, p_4)] = [(p_5, p_1), (p_5, p_2), (p_5, p_3), (p_5, p_4)]$, прямая (pp_4) переходит в прямую (p_5p_4) , откуда $p_4 \in Q$. Но единственная коника, проходящая через пять точек p_1, p_2, \dots, p_5 , это коника C . Поэтому $Q = C$ и $p \in C$. \square

5.4. Гомографии на невырожденной конике. Биективное преобразование $\varphi : C \xrightarrow{\sim} C$ невырожденной коники C называется *гомографией*, если оно сохраняет двойные отношения. Согласно предл. 5.4 на стр. 60 это требование равносильно тому, что для некоторой сохраняющей двойные отношения биекции $\psi : C \xrightarrow{\sim} \mathbb{P}_1$ преобразование $\psi\varphi\psi^{-1} : \mathbb{P}_1 \xrightarrow{\sim} \mathbb{P}_1$ является гомографией на \mathbb{P}_1 . Если это условие выполняется для какой-нибудь сохраняющей двойные отношения биекции между C и \mathbb{P}_1 , то по тому же предл. 5.4 оно выполняется для любых таких биекций.

Как и гомография на прямой, гомография на конике однозначно определяется своим действием на какие-нибудь три различные точки.

Пример 5.6 (инволюции)

Гомография $\sigma : C \rightarrow C$ называется *инволюцией*, если она обратна самой себе, т. е. $\sigma^2 = \text{Id}_C$. Тожественная инволюция $\sigma = \text{Id}_C$ называется *тривиальной*. Пусть точки a_1, a_2, b_1, b_2 на конике C различны и инволюция $\sigma : C \rightarrow C$ переставляет одноимённые точки $a_1 \leftrightarrow a_2$ и $b_1 \leftrightarrow b_2$ как на рис. 5◊10. Обозначим точку пересечения прямых $(a_1 a_2)$ и $(b_1 b_2)$ через s . Пучок прямых с центром в s задаёт биективное преобразование $\sigma_s : C \simeq C$, переставляющее точки пересечения коники C с каждой проходящей через s прямой.

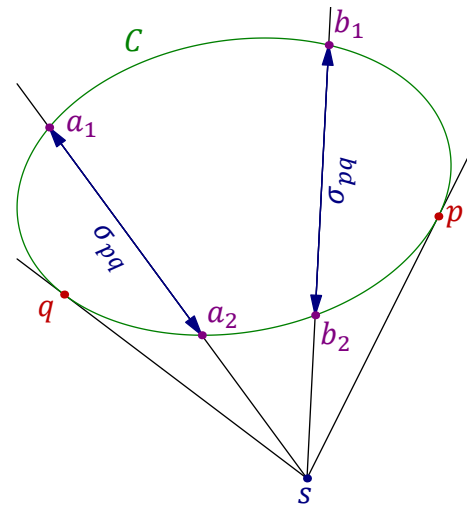


Рис. 5◊10. Инволюция на конике.

Упражнение 5.5. Убедитесь, что это преобразование рационально.

Следовательно, σ_s является гомографией, а значит, совпадает с инволюцией σ , поскольку действует на четыре точки a_1, a_2, b_1, b_2 также, как и σ . В частности, неподвижными точками инволюции σ являются две точки, образующие видимый из точки s контур коники C .

Таким образом, над алгебраически замкнутым полем \mathbb{k} с $\text{char}(\mathbb{k}) \neq 2$ каждая нетривиальная инволюция на проективной прямой или на невырожденной конике имеет ровно две различных неподвижных точки, и для любой пары различных точек существует единственная инволюция оставляющая каждую из точек на месте. Геометрически, инволюция $\sigma_{pq} : \mathbb{P}_1 \simeq \mathbb{P}_1$ с неподвижными точками $p, q \in \mathbb{P}_1$ переставляет друг с другом такие точки a, b , что точки a^2 и b^2 коники Веронезе $C_2 \subset \mathbb{P}_2$ лежат на одной прямой с точкой $pq \in \mathbb{P}_2$.

Упражнение 5.6. Убедитесь, что $\sigma_{pq}(a) = b$ для четырёх различных точек a, b, p, q если и только если a, b и p, q гармоничны, и напишите явную формулу для координат неподвижных точек p, q инволюции σ_{pq} , если известны координаты точек $a, b, \sigma_{pq}(a), \sigma_{pq}(b)$.

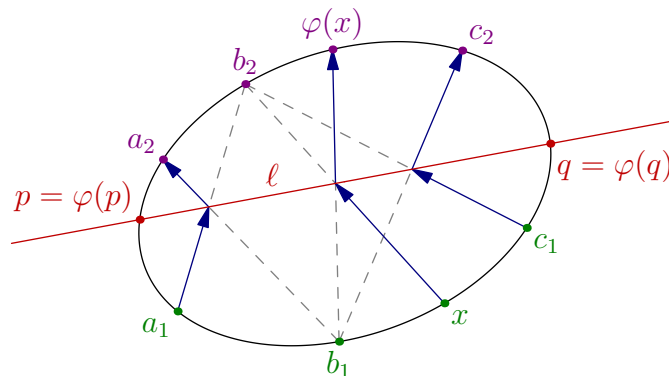


Рис. 5◊11. Перекрёстная ось гомографии на конике.

Пример 5.7 (перекрёстная ось гомографии на конике)

Гомография $\varphi : C \rightarrow C$, переводящая три различные точки $a_1, b_1, c_1 \in C$ в точки $a_2, b_2, c_2 \in C$ является композицией проекций $b_2 : C \rightarrow \ell$ и $b_1 : \ell \rightarrow C$, где прямая ℓ соединяет точки пересечения $(a_1 b_2) \cap (b_1 a_2)$ и $(c_1 b_2) \cap (b_1 c_2)$ пар перекрёстных прямых на рис. 5◊11. Поскольку неподвижные точки гомографии φ суть точки пересечения $\ell \cap C$, прямая ℓ не зависит от выбора точек $a_1, b_1, c_1 \in C$, а φ имеет либо ровно две неподвижные точки, либо ровно одну, и последнее означает, что прямая ℓ касается коники C в этой неподвижной точке. Таким образом, прямая ℓ представляет собой ГМТ пересечения всех перекрёстных прямых $(x, \varphi(y)) \cap (y, \varphi(x))$, где $x \neq y$ независимо пробегают конику C . Отсюда получается ещё одно доказательство теоремы Паскаля¹: три точки пересечений пар противоположных сторон вписанного в C шестиугольника $a_1 c_2 b_1 a_2 c_1 b_2$, будучи точками пересечений перекрёстных прямых гомографии, которая переводит точки a_1, b_1, c_1 в точки a_2, b_2, c_2 , лежат на перекрёстной оси ℓ этой гомографии.

Перекрёстная ось гомографии $\varphi : C \rightarrow C$ легко строится одной линейкой, если известно действие φ на какие-нибудь три точки. Это позволяет одной линейкой построить образ $\varphi(z)$ любой точки $z \in C$, а также указать неподвижные точки гомографии φ . В частности, две касательные к невырожденной конике $C \subset \mathbb{P}_2$, опущенные из заданной точки $s \in \mathbb{P}_2$, тоже можно построить одной линейкой, найдя неподвижные точки инволюции $\sigma_s : C \rightarrow C$, задаваемой пучком прямых с центром в s , см. рис. 5◊12. Более простое построение можно извлечь из упр. 5.7.

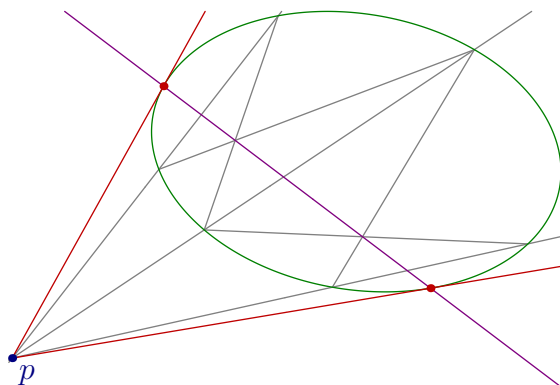


Рис. 5◊12. Построение касательных.

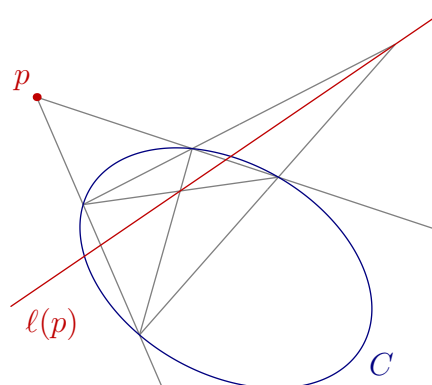


Рис. 5◊13. Построение поляры.

УПРАЖНЕНИЕ 5.7 (ПОСТРОЕНИЕ ШТЕЙНЕРА). Обоснуйте показанное на рис. 5◊13 построение² одной линейкой поляры³ $\ell(p)$ данной точки p относительно данной коники C .

¹См. теор. 5.3 на стр. 59.

²Принадлежащее Якобу Штейнеру (1796 – 1863), см. Я. Штейнер. «Геометрические построения, выполняемые с помощью прямой линии и неподвижного круга», Харьковская математическая библиотека, Харьков, 1910 (или любое другое издание).

³См. 4-4 на стр. 43.

Ответы и указания к некоторым упражнениям

Упр. 5.1. Строим перекрёстную ось ℓ , соединяющую точки $(a_1 b_2) \cap (b_1, a_2)$ и $(c_1 b_2) \cap (b_1, c_2)$, и берём в качестве $\varphi(x)$ точку пересечения прямой ℓ_2 с прямой, соединяющей точки b_1 и $\ell \cap (x, b_2)$.

Упр. 5.2. Зафиксируем не проходящую через p_1, p_2 прямую ℓ . Отображения $\pi_i: p_i^\times \rightarrow \ell, i = 1, 2$, переводящие прямую $\ell' \in p_i^\times$ в точку $\ell \cap \ell'$, являются гомографиями, поскольку для любого базиса a, b прямой ℓ переводят линейную форму $\xi \in V^*$, задающую прямую ℓ' , в точку с однородными координатами $(\xi(b) : -\xi(a))$, линейно зависящими от ξ . Отображение $\gamma: \ell \rightarrow \ell$, являющееся композицией проекции $p_1: \ell \simeq C$ прямой ℓ на конику C из точки p_1 и проекции $p_2: C \simeq \ell$ коники C на прямую ℓ из точки p_2 , биективно и, согласно форм. (4-10) на стр. 45, задаётся в однородных координатах многочленами. По теор. 5.2 на стр. 55 оно является гомографией. Отображение $C: p_1^\times \rightarrow p_2^\times$ является композицией $\pi_2^{-1} \gamma \pi_1$.

Упр. 5.3. При замене однородных координат все определители в правой части 5-6 на стр. 59 умножатся на определитель матрицы замены координат, что не поменяет правой дроби, ну а средняя дробь всегда равна правой в силу вычисления, предворявшего формулу 5-6. Последнее утверждение проверяется выкладкой

$$\frac{\det(a, c)}{\det(a, d)} \cdot \frac{(b, d)}{\det(b, c)} = \frac{\det(a, b + \gamma a)}{\det(a, b + \delta a)} \cdot \frac{(b, b + \delta a)}{\det(b, b + \gamma a)} = \frac{\delta}{\gamma}.$$

Упр. 5.4. См. решение упр. 5.2

Упр. 5.5. Преобразование, переставляющее изотропные точки на проходящей через s прямой, это отражение в ортогональной гиперплоскости s^\perp к анизотропному вектору $s \notin C$, ср. с прим. 4.7 на стр. 44.