

### §13. Мёбиусовы преобразования

**13.1. Сферы.** Напомню, что сферой радиуса  $r > 0$  с центром в точке  $c$  евклидова аффинного пространства  $\mathbb{A}^n$  называется квадрика  $S(r, c) \subset \mathbb{A}^n$ , задаваемая аффинным уравнением

$$(x - c, x - c) - r^2 = 0, \quad (13-1)$$

где  $(*, *)$  обозначает евклидово скалярное произведение на подлежащем аффинному пространству  $\mathbb{A}^n$  евклидовом векторном пространстве  $V \simeq \mathbb{R}^n$ . Мы будем называть уравнение (13-1) *приведённым* аффинным уравнением сферы  $S(r, c)$  и обозначать неоднородный квадратичный многочлен, стоящий в его левой части, через

$$s_{r,c}(x) \stackrel{\text{def}}{=} (x - c, x - c) - r^2. \quad (13-2)$$

Геометрически, уравнение (13-1) означает, что сфера  $S(r, c)$  является ГМТ  $x$ , удалённых от центра сферы на расстояние  $r$ . Каждая проходящая через  $c$  прямая с вектором скорости  $e \in V$  единичной длины пересекает сферу по точкам  $c \pm re$ . Отрезок с концами в таких точках называется *диаметром* сферы. Уравнение (13-1) равносильно тому, что  $(x - c + re, x - c - re) = 0$ . Таким образом, сфера представляет собою ГМТ, из которых её диаметр виден под прямым углом.

**ПРИМЕР 13.1 (ОПИСАННАЯ СФЕРА СИМПЛЕКСА)**

Если точки  $p_0, p_1, \dots, p_n \in \mathbb{A}^n$  не лежат в одной гиперплоскости, то через них проходит единственная сфера. Она называется *описанной сферой* симплекса  $[p_0, p_1, \dots, p_n]$ . Действительно, ГМТ, равноудалённых от двух точек  $p_0$  и  $p_i$ , описывается уравнением

$$(x - p_0, x - p_0) = (x - p_i, x - p_i),$$

которое эквивалентно линейному неоднородному уравнению

$$2(x, p_i - p_0) = (p_i, p_i) - (p_0, p_0). \quad (13-3)$$

Задаваемая этим уравнением гиперплоскость проходит через точку  $(p_i + p_0)/2$  перпендикулярно вектору  $p_i - p_0$  и называется *срединным перпендикуляром* к отрезку  $[p_0, p_i]$ . ГМТ, равноудалённых от всех точек  $p_0, p_1, \dots, p_n$ , является пересечением срединных перпендикуляров к  $n$  отрезкам  $[p_0, p_i]$ , где  $1 \leq i \leq n$ . Так как векторы  $p_i - p_0$  линейно независимы, система из  $n$  линейных уравнений (13-3) имеет единственное решение  $c$ . Это центр описанной сферы.

**13.1.1. Пересечение сферы с аффинным подпространством.** Если подпространство  $\Pi \subset \mathbb{A}^n$  находится на расстоянии  $\varrho$  от центра  $c$  сферы  $S(r, c)$ , то при  $\varrho > r$  пересечение  $\Pi \cap S(r, c)$  пусто, а при  $\varrho < r$  представляет собою лежащую в  $\Pi$  сферу радиуса  $\sqrt{r^2 - \varrho^2}$  с центром в ортогональной проекции  $c_\Pi$  точки  $c$  на подпространство  $\Pi$ . Чтобы убедиться в этом, положим в уравнении (13-1) переменную точку  $x$  равной  $c_\Pi + z$ , где вектор  $z = x - c_\Pi$  пробегает направляющее векторное пространство аффинного подпространства  $\Pi$ . Так как  $(z, c_\Pi - c) = 0$ , а  $(c_\Pi - c, c_\Pi - c) = \varrho^2$ , мы получаем на  $z$  уравнение  $(z, z) = r^2 - \varrho^2$ .

При  $\varrho = r$  сфера  $\Pi \cap S(r, c)$  вырождается в одну точку  $p_\Pi$ . Следовательно, в этом случае подпространство  $\Pi$  содержится в касательном пространстве к сфере в точке  $p_\Pi \in S(r, c)$ . Таким образом, в каждой точке  $p \in S$  касательное пространство  $T_p S(r, c)$  представляет собою

гиперплоскость, проходящую через точку  $p$  перпендикулярно вектору  $p - c$ , и задаётся линейным неоднородным уравнением

$$(x - c, p - c) = r^2. \quad (13-4)$$

УПРАЖНЕНИЕ 13.1. Убедитесь, что это согласуется с описанием касательного пространства к произвольной проективной квадрике, данным в н° 4.3.1 на стр. 44.

**13.1.2. Степень точки относительно сферы.** Значение  $s_{r,c}(p) = (p - c, p - c) - r^2$  квадратичного полинома (13-2) на произвольно взятой точке  $p \in \mathbb{A}^n$  называется *степенью* точки  $p$  относительно сферы  $S(r, c)$ . Степень обращается в нуль в точности на точках сферы  $S(r, c)$  и отрицательна внутри ограничиваемого сферой шара, достигая своего минимума  $-r^2$  в единственной точке — центре сферы. Каждая внешняя по отношению к шару точка  $p$  имеет положительную степень  $|p - c|^2 - r^2 = |p - q|^2$ , равную квадрату длины любого касательного отрезка  $[p, q]$ , опущенного из  $p$  на сферу, см. рис. 13◊1.

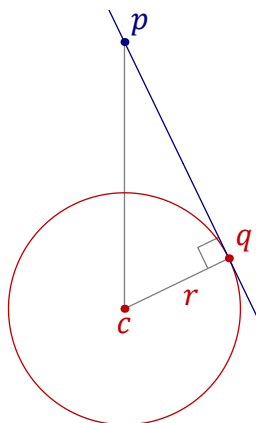


Рис. 13◊1.  $s_{r,c}(p) = |q - p|^2$ .

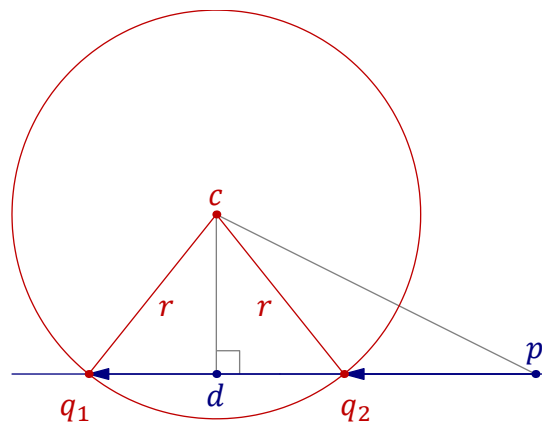


Рис. 13◊2.  $s_{r,c}(p) = (q_1 - p, q_2 - p)$ .

Вообще, если проходящая через точку  $p$  прямая пересекает сферу  $S(r, c)$  в точках  $q_1, q_2$  или касается её в точке  $q_1 = q_2$ , то центр  $d = (q_1 + q_2)/2$  отрезка  $[q_1, q_2]$  является ортогональной проекцией центра сферы на эту прямую<sup>1</sup> и по теореме Пифагора  $s_{r,c}(p) = |p - c|^2 - r^2 = |d - p|^2 + |d - c|^2 - r^2 = |d - p|^2 - |q_1 - d|^2 = (d - p + (q_1 - d), d - p - (q_1 - d)) = (q_1 - p, q_2 - p)$ , см. рис. 13◊2. Равенство

$$s_{r,c}(p) = (q_1 - p, q_2 - p) \quad (13-5)$$

известно как *теорема о степени точки относительно сферы*.

ПРИМЕР 13.2 (радикальная гиперплоскость)

ГМТ, имеющих равные степени относительно сфер  $S(r_1, c_1)$  и  $S(r_2, c_2)$ , описывается уравнением  $(x - c_1, x - c_1) - r_1^2 = (x - c_2, x - c_2) - r_2^2$ , которое эквивалентно линейному уравнению

$$\left(x - \frac{c_1 + c_2}{2}, c_2 - c_1\right) = \frac{r_1 + r_2}{2} (r_1 - r_2) \quad (13-6)$$

задающему гиперплоскость, перпендикулярную вектору  $c_2 - c_1$  и удалённую от середины отрезка  $[c_1, c_2]$  на расстояние  $(r_1^2 - r_2^2)/2|c_2 - c_1|$  в направлении второй сферы. Эта гиперплоскость называется *радикальной гиперплоскостью* сфер  $S(r_1, c_1)$  и  $S(r_2, c_2)$ . Когда сферы пересекаются, т. е. при  $r_1 + r_2 \geq |c_2 - c_1|$ , радикальная гиперплоскость пересекает каждую из сфер в точности по сфере  $S(r_1, c_1) \cap S(r_2, c_2)$ .

<sup>1</sup>См. н° 13.1.1 на стр. 161.

**13.1.3. Сферы как комплексные проективные квадрики.** Рассмотрим евклидово векторное пространство  $V = \mathbb{R}^n$  как множество вещественных точек комплексного векторного пространства  $V_{\mathbb{C}} = \mathbb{C}^n$  с комплексно билинейной формой  $(*, *) : \mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}$ , продолжающей евклидово скалярное произведение на  $\mathbb{R}^n$ , и вложим  $\mathbb{C}^n$  в качестве стандартной аффинной карты  $x_0 = 1$  в комплексное проективное пространство  $\mathbb{P}_n = \mathbb{P}(W)$  с однородными координатами  $(x_0 : x_1 : \dots : x_n)$  — проективизацию векторного пространства  $W = \mathbb{C}e_0 \oplus V_{\mathbb{C}}$ . Проективное замыкание сферы  $S(r, c) \subset \mathbb{A}(V_{\mathbb{C}})$  с аффинным уравнением  $(x, x) - 2(x, c) + (c, c) - r^2 = 0$  задаётся однородным уравнением

$$(x, x) - 2x_0(x, c) + x_0^2((c, c) - r^2) = 0, \quad (13-7)$$

где через  $x = (x_1, \dots, x_n)$  и  $c = (c_1, \dots, c_n)$  по-прежнему обозначаются последние  $n$  координат, а через  $(*, *)$  — стандартное комплексно билинейное скалярное произведение на  $V_{\mathbb{C}}$ :

$$\left( (x_1, \dots, x_n), (y_1, \dots, y_n) \right) = x_1 y_1 + \dots + x_n y_n \in \mathbb{C}. \quad (13-8)$$

Все сферы (13-7) пересекают бесконечно удалённую гиперплоскость  $x_0 = 0$  по абсолютной квадрике

$$I \stackrel{\text{def}}{=} \{x \in \mathbb{P}(V_{\mathbb{C}}) \mid (x, x) = 0\}, \quad (13-9)$$

состоящей из (комплексных) изотропных векторов евклидова скалярного произведения (13-8).

**УПРАЖНЕНИЕ 13.2.** Пусть две проективные квадрики имеют общее гиперплоское сечение. Покажите, что у них есть и второе общее гиперплоское сечение<sup>1</sup>.

Применительно к сферам (13-7) утверждение из [упр. 13.2](#) очевидно: однородные уравнения

$$\begin{aligned} (x, x) - x_0(2(x, c_1) + x_0(c_1, c_1) - x_0 r_1^2) &= 0 \\ (x, x) - x_0(2(x, c_2) + x_0(c_2, c_2) - x_0 r_2^2) &= 0 \end{aligned}$$

при любых  $r_1, r_2 \in \mathbb{C}$  и  $c_1, c_2 \in V_{\mathbb{C}}$  совпадают друг с другом как при  $x_0 = 0$ , так и на гиперплоскости, вдоль которой совпадают друг с другом линейные множители, на которые умножается  $x_0$ . Второе гиперплоское сечение описывается уравнением

$$2(x, c_1) + x_0(c_1, c_1) - x_0 r_1^2 = 2(x, c_2) + x_0(c_2, c_2) - x_0 r_2^2,$$

которое преобразуется к тому же самому виду, что и уравнение (13-10) выше:

$$\left( x - x_0 \frac{c_1 + c_2}{2}, c_2 - c_1 \right) = x_0 \frac{r_1 + r_2}{2} (r_1 - r_2). \quad (13-10)$$

При  $c_1 \neq c_2$  и  $x_0 = 1$  оно задаёт радикальную гиперплоскость (13-10), а при  $c_1 = c_2$  — бесконечно удалённую гиперплоскость  $x_0 = 0$ . Таким образом, радикальной гиперплоскостью двух концентрических сфер разумно считать бесконечно удалённую гиперплоскость.

**УПРАЖНЕНИЕ 13.3.** Покажите, что все квадрики (13-7) с центром в данной точке  $c \in \mathbb{C}^n$  и произвольными  $r \in \mathbb{C}$  образуют пучок комплексных проективных квадрик, натянутый на двойную бесконечно удалённую гиперплоскость  $x_0^2 = 0$  и простой конус  $(x - c, x - c) = 0$  с вершиной  $c$  над абсолютной квадрикой (13-9), причём все остальные квадрики пучка, за исключением этих двух, являются гладкими.

<sup>1</sup>Возможно, совпадающее с первым.

ПРИМЕР 13.3 (ПРОСТРАНСТВО ПСЕВДОСФЕР)

Все квадратичные формы (13-7) с вещественными  $c \in V \simeq \mathbb{R}^n$  и  $r > 0$  лежат в вещественном векторном подпространстве  $\Sigma \subset S^2W^*$  размерности  $n + 2$ , состоящем из всех однородных вещественных квадратичных форм вида

$$q = \alpha \cdot (x, x) - 2x_0(x, c) + \beta \cdot x_0^2, \quad \text{где } \alpha, \beta \in \mathbb{R}, c \in V. \quad (13-11)$$

Проективизация  $\mathbb{S} \stackrel{\text{def}}{=} \mathbb{P}(\Sigma)$  называется пространством  $(n - 1)$ -мерных псевдосфер в  $\mathbb{R}^n$ . Таким образом,  $\mathbb{S} \simeq \mathbb{P}_{n+1}(\mathbb{R})$  представляет собою вещественное проективное пространство размерности  $n + 1$ . Стандартная аффинная карта  $U_\alpha \subset \mathbb{S}$  состоит из псевдосфер, которые можно записать приведённым уравнением

$$(x - x_0 c / \alpha, x - x_0 c / \alpha) - x_0^2 ((c, c) - \alpha \beta) / \alpha^2 = 0. \quad (13-12)$$

При  $(c, c) - \alpha \beta > 0$  такая квадратика является сферой с квадратом радиуса

$$r^2 = ((c, c) - \alpha \beta) / \alpha^2,$$

при  $(c, c) - \alpha \beta = 0$  — простым конусом с вершиной  $c$  над абсолютной квадратикой (13-9), который виден в  $\mathbb{R}^n$  как двойная точка  $c$ , а при  $(c, c) - \alpha \beta < 0$  псевдосфера (13-12) является гладкой проективной квадратикой без вещественных точек, которую мы будем называть *мнимой сферой*. На векторном пространстве  $\Sigma$  имеется каноническая квадратичная форма

$$\varrho(q) \stackrel{\text{def}}{=} (c, c) - \alpha \beta, \quad (13-13)$$

пропорциональная квадрату радиуса сферы и имеющая сигнатуру  $(n + 1, 1)$ . Задаваемая этой формой проективная квадратика  $R = V(\varrho)$  выглядит в аффинной карте  $U_\alpha$  как сферический параболоид  $(c, c) = \beta$ , состоящий из сфер нулевого радиуса. Внутренность  $(c, c) < \beta$  этого параболоида состоит из мнимых сфер, а внешность  $(c, c) > \beta$  — из настоящих сфер радиуса  $r = \sqrt{(c, c) - \beta}$ . Бесконечно удалённая гиперплоскость  $L_\infty = \mathbb{P}(\text{Ann } \alpha)$  карты  $U_\alpha$  состоит из псевдосфер (13-11), имеющих  $\alpha = 0$  и распадающихся в объединение бесконечно удалённой гиперплоскости  $x_0 = 0$  и гиперплоскости  $2(x, c) = \beta x_0$ , которая совпадает с бесконечно удалённой гиперплоскостью если и только если  $c = 0$ . Псевдосфера  $x_0^2 = 0$ , в которой бесконечно удалённая гиперплоскость  $L_\infty$  касается параболоида  $R$ , обозначается  $\infty \in \mathbb{S}$ .

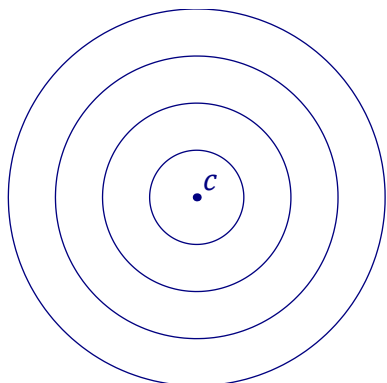


Рис. 13◊3. Пучок концентрических сфер.

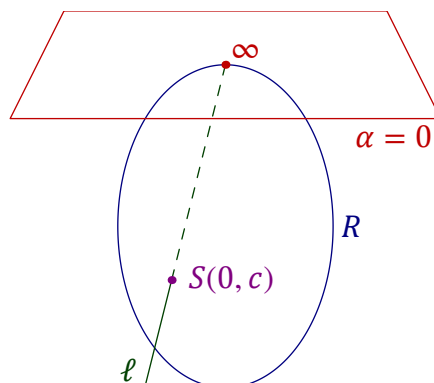


Рис. 13◊4. Соответствующая прямая в  $\mathbb{S}$ .

ПРИМЕР 13.4 (ПУЧКИ СФЕР)

Из предыдущего [прим. 13.3](#) вытекает, что все вещественные квадрики из пучка комплексных проективных квадратик, порождённого двумя настоящими сферами  $S(r_1, c_1)$  и  $S(r_2, c_2)$  в  $\mathbb{R}^n$ , образуют прямую  $\ell$  в пространстве псевдосфер  $\mathbb{S}$ . Эта прямая пересекает бесконечно удалённую гиперплоскость  $L_\infty \subset \mathbb{S}$  ровно в одной точке вида  $\xi x_0$ , где  $\xi \in W^*$  — однородная вещественная линейная форма от  $(x_0, x_1, \dots, x_n)$ . Если  $\xi = x_0$ , точка  $\ell \cap L_\infty = \infty = R \cap L_\infty$  является бесконечной точкой параболоида  $R$ , и прямая  $\ell$  пересекает параболоид  $R$  ещё ровно в одной, отличной от  $\infty$  точке, как на [рис. 13◊4](#). Вторая точка пересечения отвечает псевдосфере  $S(0, c)$  с уравнением  $(x - c, x - c) = 0$ , видимой в  $\mathbb{R}^n$  как двойная точка  $c$ . Согласно [упр. 13.3](#), такой пучок  $\ell$  является пучком концентрических сфер с центром в  $c$ , см. [рис. 13◊3](#).

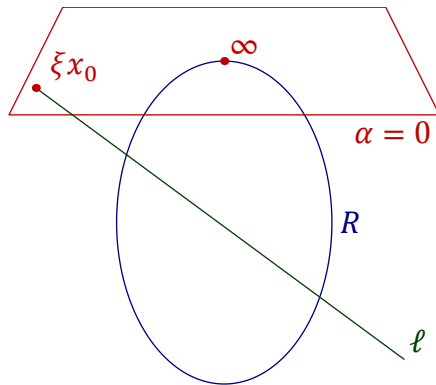


Рис. 13◊5. Пучок без простых конусов.

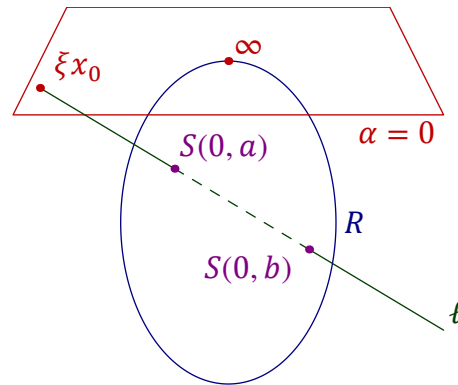


Рис. 13◊6. Пучок с двумя простыми конусами.

Если  $\ell \cap L_\infty \neq \infty$ , то в пучке  $\ell$  содержится ровно одна распавшаяся квадрика — объединение бесконечно удалённой гиперплоскости  $x_0 = 0$  и гиперплоскости  $\Pi = \text{Ann } \xi$ , которая является вторым, отличным от бесконечно удалённого, общим гиперплоским сечением всех сфер пучка и, тем самым, видна в аффинном пространстве  $A^n = A(V)$  как радикальная гиперплоскость любой пары сфер в пучке  $\ell$ . При этом пучок  $\ell$  может содержать либо ни одного, либо один, либо два простых конуса, отвечающих точкам пересечения прямой  $\ell$  с параболоидом  $R$ , как на [рис. 13◊5](#), [рис. 13◊9](#) и [рис. 13◊6](#) соответственно.

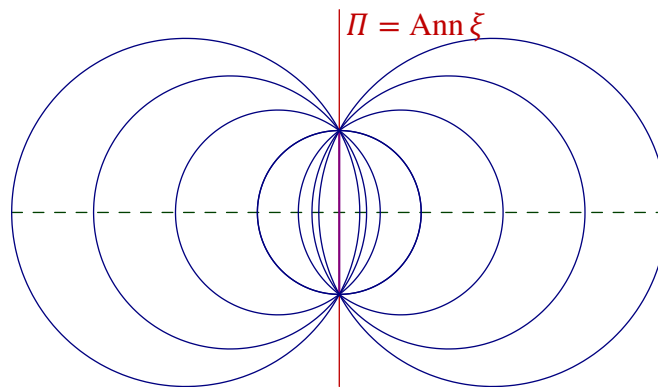


Рис. 13◊7. Пучок пересекающихся сфер.

В первом случае прямая  $\ell$  не пересекает  $R$  и состоит из всех сфер, пересекающих радикальную ось  $\Pi = \text{Ann } \xi$  порождающих пучок сфер  $S(r_1, c_1)$  и  $S(r_2, c_2)$  по фиксированной  $(n - 2)$ -мерной

сфере  $S(r_1, c_1) \cap S(r_2, c_2)$ . Такой пучок называется *пучком пересекающихся сфер*. Сферы  $S(r_1, c_1)$  и  $S(r_2, c_2)$  порождают пучок пересекающихся сфер если и только если  $r_1 + r_2 > |c_2 - c_1|$ . Базисное множество пучка пересекающихся сфер является объединением абсолютной квадрики и вещественной сферы  $S(r_1, c_1) \cap S(r_2, c_2)$ .

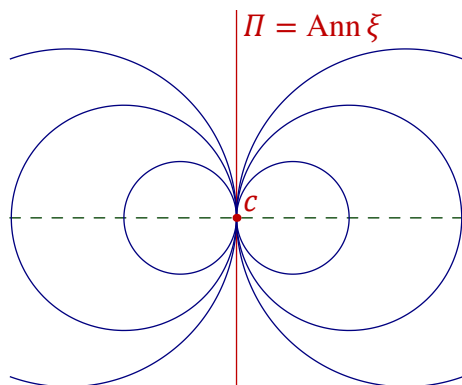
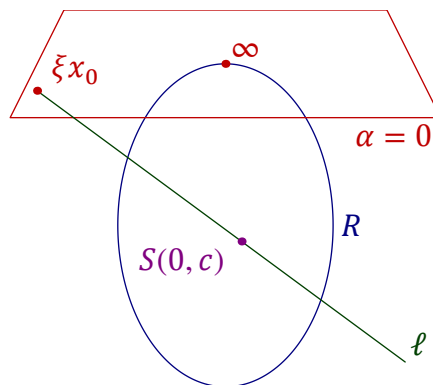


Рис. 13♦8. Пучок соприкасающихся сфер.

Рис. 13♦9. Соответствующая прямая в  $\mathbb{S}$ .

Второй случай является вырождением первого: при  $|c_2 - c_1| = r_1 + r_2$  базисная сфера пучка  $\ell$  вырождается в одну точку  $c = \Pi \cap (c_1 c_2)$ . Все сферы такого пучка касаются друг друга в этой точке  $c$ , имеют центры на прямой  $(c_1 c_2)$  и при  $r \rightarrow \infty$  стремятся к гиперплоскости  $\Pi$ , которая проходит через точку  $c$  перпендикулярно прямой  $(c_1 c_2)$ , см. рис. 13♦8. Отвечающая этому пучку прямая  $\ell$  касается параболоида  $R$  в псевдосфере  $S(0, c)$ , видимой в  $\mathbb{R}^n$  как двойная точка  $c$ , см. рис. 13♦9. Такой пучок  $\ell$  называется *пучком соприкасающихся сфер*.

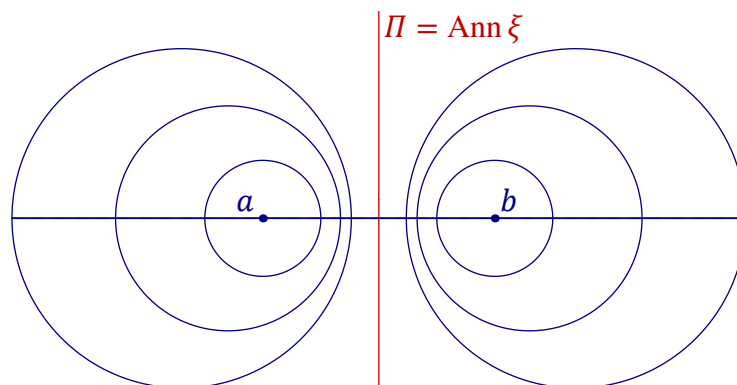


Рис. 13♦10. Пучок непересекающихся сфер.

Третий случай равносителен неравенству  $r_1 + r_2 < |c_2 - c_1|$  и отвечает прямой  $\ell$ , которая пересекает параболоид  $R$  в двух различных точках  $S(0, a)$ ,  $S(0, b)$ , видимых в  $\mathbb{R}^n$  как две различные двойные точки  $a, b \in (c_1, c_2)$ , см. рис. 13♦6. Такой пучок называется *пучком непересекающихся сфер*: никакие две сферы пучка не пересекаются<sup>1</sup>, но при этом любые две сферы имеют одну и ту же радикальную ось  $\Pi$ , к которой все сферы пучка стремятся при  $r \rightarrow \infty$ , см. рис. 13♦10. При подходе к точкам пересечения прямой  $\ell$  с параболоидом  $R$  радиусы сфер стремятся к нулю, а

<sup>1</sup>Вернее, пересекаются по двум мнимым сферам: абсолютной сфере  $I$  из форм. (13-9) на стр. 163 и радикальному гиперплосковому сечению  $\Pi \cap S(r_1, c_1) = \Pi \cap S(r_2, c_2) = S(r_1, c_1) \cap S(r_2, c_2)$ .

сами сферы вырождаются в двойные точки  $a$  и  $b$ . Если двигать прямую  $\ell$  в пространстве  $\mathbb{P}(\Sigma)$  так, чтобы две точки её пересечения с параболоидом  $R$  слились в одну точку касания, двойные точки  $a$  и  $b$  сольются в одну точку  $c$ , и мы вновь получим пучок соприкасающихся сфер.

**13.2. Инверсии.** Так как поляризация однородной квадратичной формы (13-7) имеет вид

$$\tilde{q}(x, y) = (x - x_0c, y - y_0c) - r^2x_0y_0,$$

полярное преобразование<sup>1</sup> относительно сферы  $S(r, c) \subset \mathbb{R}^n$  переводит центр  $c$  в бесконечно удалённую гиперплоскость  $x_0 = 0$ , а каждую отличную от центра точку  $p \in \mathbb{R}^n$  — в полярную ей аффинную гиперплоскость

$$P_p = \{x \in \mathbb{R}^n \mid (x - c, p - c) = r^2\}, \quad (13-14)$$

перпендикулярную прямой  $(pc)$  и находящуюся на расстоянии  $r^2 / |p - c|$  от центра сферы по ту же сторону, что и точка  $p$ . Сопряжённая точке  $p$  на прямой  $(pc)$  точка  $p' = (pc) \cap P_p$  обозначается  $\sigma_{r,c}(p)$  и называется *инверсной* точке  $p$  относительно сферы  $S(r, c)$ . Она однозначно характеризуется тем, что  $(p' - c, p - c) = r^2$ , и явно выражается через  $p$  по формуле

$$\sigma_{r,c}(p) = c + \frac{r^2(p - c)}{(p - c, p - c)}. \quad (13-15)$$

Инверсия задаёт на каждой проходящей через  $c$  проективной прямой инволюцию с неподвижными точками  $\ell \cap S(r, c)$ . Эта инволюция переставляет центр сферы с бесконечностью и естественно продолжается на одноточечную компактификацию  $\hat{\mathbb{R}}^n = \mathbb{R}^n \sqcup \infty$  евклидова пространства  $\mathbb{R}^n$  до инволютивного гомеоморфизма  $\sigma_{r,c}: \hat{\mathbb{R}}^n \simeq \hat{\mathbb{R}}^n$ , который переставляет друг с другом сопряжённые относительно сферы точки на каждой проходящей через центр сферы прямой, в частности, оставляет каждую точку сферы на месте и переставляет точки  $c$  и  $\infty$ . Таким образом, любая проходящая через центр сферы прямая переводится инверсией в себя с сохранением двойного отношения, и две точки такой прямой инверсны друг другу если и только если они гармоничны точкам пересечения этой прямой со сферой<sup>2</sup>. В частности, каждое проходящее через центр сферы аффинное подпространство  $\Pi$  переводится инверсией  $\sigma_{r,c}$  в себя, и ограничение инверсии на такое подпространство является в нём инверсией относительно сферы  $\Pi \cap S(r, c)$ .

**Предложение 13.1**

Инверсия  $\sigma_{r,c}$  переводит каждую не проходящую через  $c$  гиперплоскость  $\Pi$  в сферу с диаметром  $[p, c]$ , где  $p$  — полюс гиперплоскости  $\Pi$  относительно сферы  $S(r, c)$ , а каждую проходящую через  $c$  сферу  $Q$  — в гиперплоскость, полярную второму концу выпущенного из  $c$  диаметра сферы  $Q$ .

**Доказательство.** В силу того, что инверсия обратна самой себе, достаточно доказать только первое утверждение. Поскольку поляр  $P_x$  любой точки  $x \in \Pi$  проходит через полюс  $p$  этой гиперплоскости, отрезок  $[p, c]$  виден из инверсной к  $x$  точки  $x' = (cx) \cap P_x$  под прямым углом, см. рис. 13♦11.  $\square$

**Упражнение 13.4.** Проверьте прямым вычислением, что отображение (13-15) переводит гиперплоскость  $(x - c, p - c) = r^2$  и сферу  $(x - c, x - p) = 0$  друг в друга.

<sup>1</sup>См. п.° 6.1 на стр. 69.

<sup>2</sup>См. предл. 6.1 на стр. 70.

## Предложение 13.2

Каждая не проходящая через центр инверсии сфера  $Q = S(t, p)$  переводится инверсией  $\sigma_{r,c}$  в сферу  $Q'$ , гомотетичную сфере  $Q$  относительно центра инверсии  $c$  с коэффициентом  $r^2/s_{t,p}(c)$ , где  $s_{t,p}(c) = (c - p, c - p) - t^2$  означает степень<sup>1</sup> центра инверсии  $c$  относительно сферы  $Q$ , см. рис. 13◊12. В частности, сфера  $Q$  переводится инверсией в себя если и только если она перпендикулярна сфере  $S(r, c)$ .

Доказательство. По теореме о степени точки относительно сферы<sup>2</sup> на каждой проходящей через  $c$  прямой, пересекающей сферу  $Q$  в точках  $x_1, x_2$ , выполняется равенство  $(x_1 - c, x_2 - c) = s_{t,p}(c)$ . Поэтому для гомотетичных точкам  $x_1, x_2$  относительно  $c$  с коэффициентом  $r^2/s_{t,p}(c)$  точек  $x'_1, x'_2$  справедливы равенства  $(x_1 - c, x'_2 - c) = r^2 = (x'_1 - c, x_2 - c)$ , означающие, что  $\sigma_{r,c}(x_1) = x'_2$ , а  $\sigma_{r,c}(x_2) = x'_1$ . Это доказывает первое утверждение. Равенство  $\sigma_{r,c}Q = Q$  равносильно тому, что коэффициент гомотетии  $r^2/s_{t,p}(c) = 1$ , что можно переписать как  $(p - c, p - c) = r^2 + t^2$ . Последнее означает, что расстояние между центрами сфер равно сумме квадратов их радиусов, т. е. что отрезок  $[c, p]$  виден из каждой точки пересечения сфер под прямым углом.  $\square$

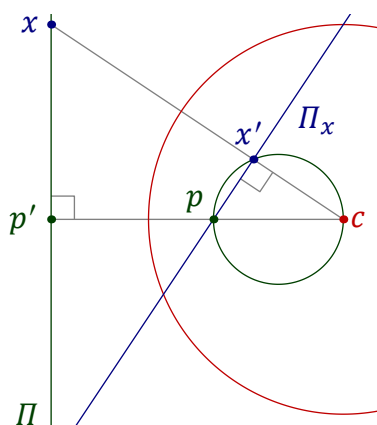


Рис. 13◊11. Инверсные сфера и гиперплоскость.

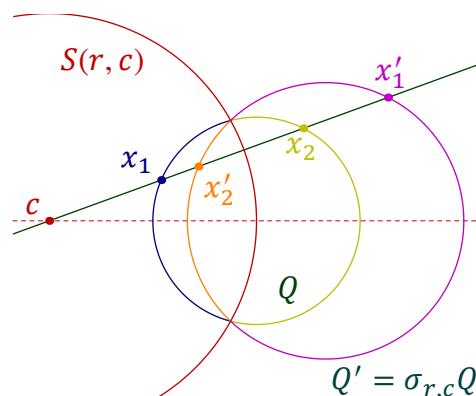


Рис. 13◊12. Инверсные сферы.

Предостережение 13.1. Центр сферы  $Q$  не обязан переходить при инверсии  $\sigma_{r,c}$  в центр сферы  $Q' = \sigma_{r,c}(Q)$ . Например, если сфера  $Q = S(t, p)$  перпендикулярна сфере  $S = S(r, c)$ , то её центр перейдёт в точку пересечения радикальной гиперплоскости с линией центров.

Упражнение 13.5. Убедитесь в этом и докажите, что прообразом центра сферы  $Q' = \sigma_{r,c}(Q)$  является точка  $c'$ , инверсная точке  $c$  относительно сферы  $Q$ .

## Следствие 13.1

Две различные точки тогда и только тогда инверсны относительно сферы  $S$  (соотв. симметричны относительно гиперплоскости  $\Pi$ ), когда все проходящие через них сферы и гиперплоскости перпендикулярны сфере  $S$  (соотв. гиперплоскости  $\Pi$ ), см. рис. 13◊13 (соотв. рис. 13◊14).

<sup>1</sup>См. п° 13.1.2 на стр. 162.

<sup>2</sup>См. формулу (13-5) на стр. 162.



Доказательство [сл. 13.1](#). Если точки  $a$  и  $b$  инверсны относительно сферы, то любая проходящая через них сфера  $Q$  и инверсная ей сфера  $Q'$  обе пересекают сферу  $S$  по одной и той же неподвижной относительно инверсии  $(n - 2)$ -мерной сфере  $S \cap Q = S \cap Q'$  и, стало быть, лежат в одном пучке пересекающихся сфер<sup>1</sup>, откуда  $Q = Q'$ , так как в любом пучке есть ровно одна квадрика, проходящая через заданную не базисную точку. Значит,  $Q$  и  $S$  перпендикулярны по [предл. 13.2](#). Каждая проходящая через  $a$  и  $b$  гиперплоскость походит и через лежащий на прямой  $(ab)$  центр сферы и, тем самым, тоже перпендикулярна сфере. Наоборот, поскольку для любой точки  $x \neq a, b$  существует сфера или гиперплоскость, проходящая через  $a$  и  $b$ , но не проходящая через  $x$ , двухточечное множество  $\{a, b\}$  является пересечением всех содержащих его сфер и гиперплоскостей. Если каждая из них переводится инверсией в себя, то и множество  $\{a, b\}$  переходит в себя.  $\square$

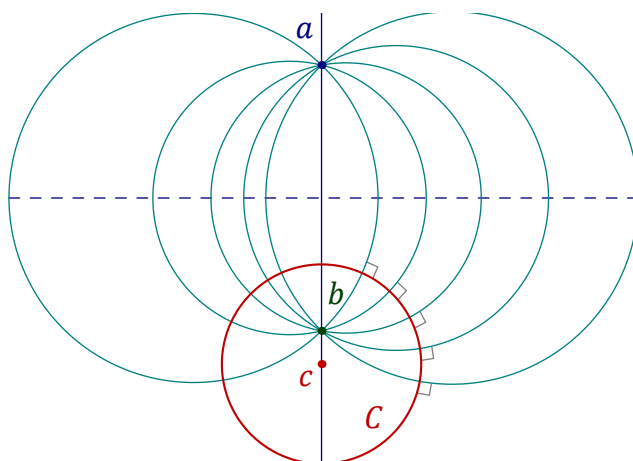


Рис. 13◊13. Отражение в сфере.

УПРАЖНЕНИЕ 13.6. Докажите [сл. 13.1](#) для отражения в гиперплоскости, см. [рис. 13◊14](#).

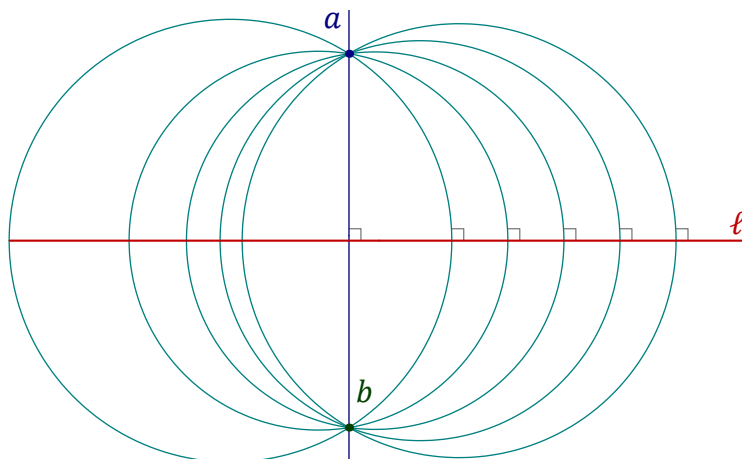


Рис. 13◊14. Отражение в гиперплоскости.

Соглашение 13.1. Имея в виду [сл. 13.1](#) мы, допуская известную вольность, будем иногда называть инверсии относительно сферы  $S$  *отражениями в сфере*  $S$ .

<sup>1</sup>См. [прим. 13.4](#) на стр. 165.

**13.2.1. Конформность.** Будем называть *касательным векторным пространством* к аффинной гиперплоскости  $\Pi \subset \mathbb{R}^n$  в точке  $p \in \Pi$  направляющее векторное подпространство этой гиперплоскости, а *касательным векторным пространством* к сфере  $S = S(r, c) \subset \mathbb{R}^n$  в точке  $p \in S$  — векторное подпространство  $(p - c)^\perp \subset \mathbb{R}^n$ , ассоциированное с аффинной касательной гиперплоскостью  $T_p S = p + (p - c)^\perp$ . Под углом между пересекающимися фигурами  $\Phi$  и  $\Psi$ , каждая из которых является сферой или гиперплоскостью, мы понимаем евклидов угол между касательными векторными пространствами к этим фигурам в любой точке  $p \in \Phi \cap \Psi$ , т. е. наименьший из двух смежных углов между перпендикулярными этим касательным пространствам одномерными векторными подпространствами в  $\mathbb{R}^n$ .

УПРАЖНЕНИЕ 13.7. Убедитесь, что этот угол не зависит от выбора точки  $p \in \Phi \cap \Psi$ .

#### Предложение 13.3

Каждое отражение в сфере или гиперплоскости сохраняет углы между сферами и гиперплоскостями.

Доказательство. Случай отражения в гиперплоскости очевиден, поскольку такое отражение является ортогональным линейным преобразованием. Рассмотрим инверсию  $\sigma_{r,c}$ . Пусть точка  $a \neq c$  не лежит на сфере  $S(r, c)$ , и  $b = \sigma_{r,c}(a)$ . Сферы, касающиеся заданной гиперплоскости  $\Pi$  в точке  $a$  образуют пучок  $\ell_\Pi$  соприкасающихся сфер и пересекают любую проходящую через  $a$  сферу или гиперплоскость под одним и тем же углом. Инверсия переводит пучок  $\ell_\Pi$  в пучок соприкасающихся сфер, касающихся касательной гиперплоскости  $T_b \sigma_{r,c}(\Pi)$  фигуры<sup>1</sup>  $\sigma_{r,c}(\Pi)$  в точке  $b$  и также образующих одинаковые углы с каждой проходящей через  $b$  сферой или гиперплоскостью. В пучке  $\ell_\Pi$  существует единственная сфера  $Q$ , проходящая через точки  $a$  и  $b$ . Как мы видели в доказательстве сл. 13.1, эта сфера переводится в себя инверсией  $\sigma_{r,c}$ , а также отражением в срединном перпендикуляре к отрезку  $[a, b]$ . Поэтому две проходящие через  $a$  и  $b$  сферы с касательными гиперплоскостями  $T_a Q_1 = \Pi_1$  и  $T_a Q_2 = \Pi_2$  имеют в точке  $b$  касательные гиперплоскости  $T_b Q_1 = \Pi'_1$  и  $T_b Q_2 = \Pi'_2$ , симметричные гиперплоскостям  $\Pi_1$  и  $\Pi_2$  относительно срединного перпендикуляра к отрезку  $[a, b]$  и, стало быть, пересекающиеся под тем же углом.

Если точка  $z \in S(r, c)$ , то углы между сферами и плоскостями, проходящими через  $z$  сохраняются при инверсии  $\sigma_{r,c}$ , поскольку последняя является композицией инверсии  $\sigma_{r/2,c}$  относительно не проходящей через  $z$  сферы  $S(r/2, c)$  и гомотетии с центром  $c$  и коэффициентом 4.  $\square$

УПРАЖНЕНИЕ 13.8. Убедитесь в справедливости последнего утверждения и докажите, что угол между любыми двумя проходящими через центр инверсии сферами равен углу между гиперплоскостями, инверсными этим сферам.

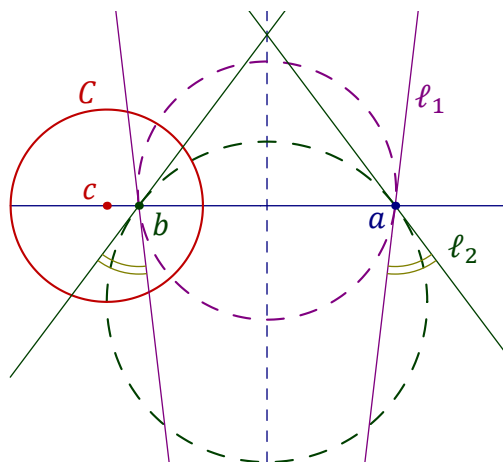


Рис. 13.15. Сохранение углов.

<sup>1</sup> Согласно предыдущему, эта фигура является сферой или гиперплоскостью.

Следствие 13.2

Пусть каждая из двух фигур  $\Phi, \Psi \in \mathbb{R}^n$  является сферой или гиперплоскостью. Обозначим через  $\sigma_\Phi, \sigma_\Psi : \widehat{\mathbb{R}}^n \rightarrow \widehat{\mathbb{R}}^n$  соответствующие отражения или инверсии. Тогда  $\sigma_\Phi \sigma_\Psi \sigma_\Phi^{-1} = \sigma_{\sigma_\Phi(\Psi)}$ , т. е. любые две симметричные относительно  $\Psi$  точки переводятся отражением  $\sigma_\Phi$  в две точки, симметричные относительно  $\sigma_\Phi(\Psi)$ .

Доказательство. Согласно сл. 13.1 на стр. 168 симметричность точек  $a$  и  $b$  относительно  $\Psi$  означает, что все проходящие через  $a$  и  $b$  сферы и гиперплоскости перпендикулярны  $\Psi$ . Сохраняющее углы отражение  $\sigma_\Phi$  биективно отображает множество таких сфер и гиперплоскостей в множество перпендикулярных  $\Phi(\Psi)$  сфер и гиперплоскостей, проходящих через точки  $\Phi(a)$  и  $\Phi(b)$ .  $\square$

Определение 13.1 (конформные отображения)

Непрерывно дифференцируемое отображение  $f : U \rightarrow W$  между двумя открытыми подмножествами  $U, W$  евклидова пространства  $\mathbb{R}^n$  называется *конформным*, если в каждой точке  $p \in U$  производное линейное отображение  $D_p f : T_p U \rightarrow T_{f(p)} W$  является композицией скалярного растяжения<sup>1</sup> и ортогонального линейного отображения, сохраняющего евклидово скалярное произведение на касательных пространствах  $T_p U \simeq T_{f(p)} W \simeq \mathbb{R}^n$ .

Упражнение 13.9. Убедитесь, что инверсия  $\sigma_{r,c} : \mathbb{R}^n \setminus c \rightarrow \mathbb{R}^n \setminus c$  является конформным отображением, причём её производное отображение в произвольной точке  $p \neq c$  является композицией отражения в гиперплоскости  $(p - c)^\perp$  и скалярного растяжения с коэффициентом  $r^2 / (p - c, p - c)$ .

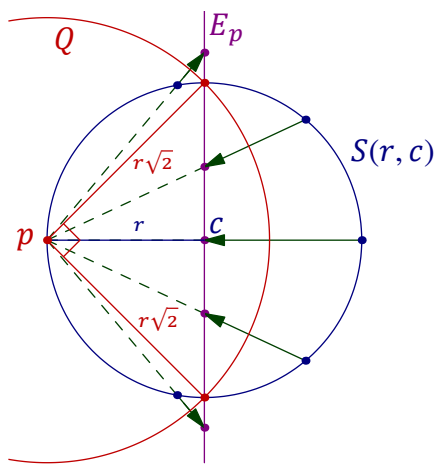


Рис. 13♦16. Стереографическая проекция.

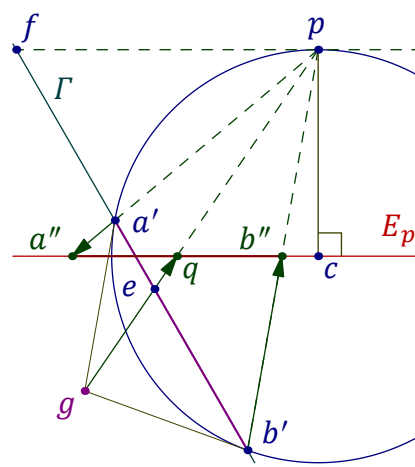


Рис. 13♦17. Соответственные сферы.

**13.3. Стереографическая проекция и инверсии на сфере.** Стереографическая проекция сферы  $S = S(r, c)$  из лежащей на ней точки  $p$  на проходящую через центр сферы перпендикулярно вектору  $p - c$  экваториальную гиперплоскость  $E_p = \{x \mid (x - c, p - c) = 0\}$

$$\pi_p : S(r, c) \setminus p \rightarrow E_p \tag{13-16}$$

<sup>1</sup>Коэффициент которого может зависеть от точки  $p \in U$ .

является ограничением на сферу  $S$  инверсии  $\sigma_Q$  относительно перпендикулярной сферу  $S$  по её экватору  $E_p \cap S$  сферы  $Q$  радиуса  $r\sqrt{2}$  с центром в точке  $p$ , см. рис. 13◊16. Таким образом, стереографическая проекция переводит каждую лежащую на  $S$  сферу  $S' = \Gamma \cap S$ , высекаемую из  $S$  какой-либо гиперплоскостью  $\Gamma$ , в лежащую в гиперплоскости  $E_p$  гиперплоскость или сферу, высекаемую из  $E_p$  образом  $\sigma_Q(\Gamma)$  гиперплоскости  $\Gamma$  при инверсии  $\sigma_Q$ , который является гиперплоскостью или сферой: первое происходит если гиперплоскость  $\Gamma$  проходит через точку  $p$ , а второе — если не проходит, и во втором случае полюс  $g$  гиперплоскости  $\Gamma$  относительно сферы  $S$  спроектируется из точки  $p$  в центр сферы  $\pi_p(S') = \sigma_Q(\Gamma) \cap E_p$ .

УПРАЖНЕНИЕ 13.10. Убедитесь в этом (см. рис. 13◊17).

Наоборот, каждая гиперплоскость  $\Gamma' \subset E_p$  является стереографической проекцией сферы, высекаемой из  $S$  гиперплоскостью  $\Gamma$ , проходящей через  $\Gamma'$  и  $p$ , а каждая сфера  $S'' = S(t, q) \subset E_p$ , пересекающая прямую  $(qc)$  в точках  $a' = \pi_p(a)$  и  $b' = \pi_p(b)$ , как на рис. 13◊17, является стереографической проекцией сферы  $S' = \Gamma \cap S$  с диаметром  $[a, b]$ , высекаемой из  $S$  гиперплоскостью  $\Gamma$ , полюс  $g$  которой проектируется из точки  $p$  в центр  $q$  сферы  $S'$  и которая является прообразом сферы с диаметром  $[a', b']$  при инверсии  $\sigma_Q$ .

При этом углы между лежащими на  $S$  сферами равны углам между их образами в гиперплоскости  $E_p$  и наоборот.

Каждая точка  $q$ , лежащая снаружи от ограничиваемого сферой  $S = S(r, c)$  шара, задаёт на сфере  $S$  инволюцию  $\sigma_q : S \rightarrow S$ , переставляющую между собою точки пересечения сферы  $S$  с проходящими через  $q$  прямыми<sup>1</sup>. Эта инволюция тождественно действует на сфере  $S \cap \Pi_q$ , высекаемой из сферы  $S$  полярной гиперплоскостью  $\Pi_q$  точки  $q$ , и совпадает с ограничением на сферу  $S$  инверсии относительно сферы  $Q = S(t, q)$ , которая перпендикулярно пересекает сферу  $S$  по неподвижной относительно  $\sigma_q$  сфере  $S \cap \Pi_q$ , имеет центр в точке  $q$  и квадрат радиуса  $t^2 = s_{r,c}(q) = |q-c|^2 - r^2$ , равный степени точки  $q$  относительно сферы  $S$ , см. рис. 13◊18.

Инволюция  $\sigma_q$  называется *инверсией сферы  $S$* , а точка  $q$  — *центром инверсии  $\sigma_q$* .

Дополним стереографическую проекцию (13-16) до гомеоморфизма

$$\pi_p : S(r, c) \simeq \hat{E}_p, \quad p \mapsto \infty, \quad x \mapsto (px) \cap E_p \text{ при } x \neq p, \quad (13-17)$$

где  $\hat{E}_p = E_p \sqcup \infty$  — одноточечная компактификация экваториальной гиперплоскости  $E_p$ , и будем рассматривать отражения в лежащих внутри  $E_p$  гиперплоскостях как оставляющие на месте точку  $\infty$  инволюции пространства  $\hat{E}_p$ .

Предложение 13.4

Полненная стереографическая проекция (13-17) устанавливает биекцию между инверсиями сферы  $S = S(r, c)$  и отражениями пополненного евклидова пространства  $\hat{E}_p$  в лежащих в нём сферах и гиперплоскостях, переводя каждую инверсию  $\sigma_q : S \simeq S$  в композицию

$$\pi_p \sigma_q \pi_p^{-1} : \hat{E}_p \simeq \hat{E}_p, \quad (13-18)$$

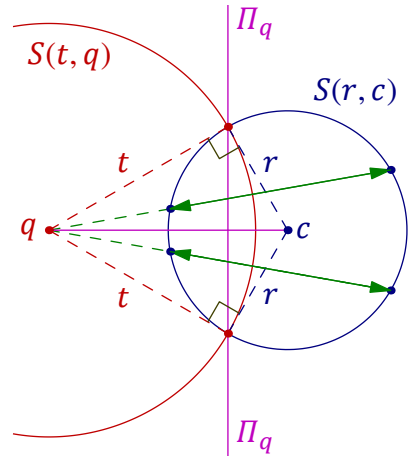


Рис. 13◊18. Инверсия  $\sigma_q : S(p, r) \rightarrow S(p, r)$ .

<sup>1</sup>Ср. с прим. 5.6 на стр. 66.

которая является отражением в стереографическом образе лежащей на  $S$  сферы  $P_q \cap S$ , высекаемой полярной гиперплоскостью  $P_q$  точки  $q$  относительно сферы  $S$ .

Доказательство. Композиция (13-18) оставляет на месте каждую точку фигуры  $\Phi = \pi_p(P_q \cap S)$  и действует на точки экваториальной гиперплоскости  $E_p$  как композиция инверсий

$$\sigma_{r\sqrt{2},p} \sigma_{t,q} \sigma_{r\sqrt{2},p}^{-1} = \sigma_\Psi,$$

которая по сл. 13.2 на стр. 170 представляет собою отражение в фигуре  $\Psi = \sigma_{r\sqrt{2},p}(Q)$ , где  $Q = S(t, q)$  — сфера с центром  $q$  и квадратом радиуса  $t^2 = s_{r,c}(q)$ , как на рис. 13♦18 выше. Фигура  $\Psi$  является сферой, если  $p \in P_q$ , или гиперплоскостью, если  $p \notin P_q$ , и  $\Psi \cap E_p = \Phi$ . Поскольку инверсия  $\sigma_\Psi$  переводит гиперплоскость  $E_p$  в себя, сфера или гиперплоскость  $\Psi$  автоматически перпендикулярна гиперплоскости  $E_p$ , и отражение  $\sigma_\Psi$  действует на  $E_p$  как отражение  $\sigma_\Phi$ .  $\square$

УПРАЖНЕНИЕ 13.11. Убедитесь напрямую, что инверсия  $\sigma_{r\sqrt{2},p}$  переводит сферу  $Q$  в перпендикулярную гиперплоскости  $E_p$  гиперплоскость, если  $p \in P_q$ , или в сферу с центром на гиперплоскости  $E_p$ , если  $p \notin P_q$ .

**13.4. Группы Мёбиуса.** Вложим евклидово пространство  $U = \mathbb{R}^{n-1}$  в евклидово пространство  $V = \mathbb{R}^n$  с координатами  $(x_1, \dots, x_n)$  в качестве гиперплоскости  $x_n = 0$  и обозначим через  $S = S(1, 0) \subset \mathbb{R}^n$  единичную сферу с центром в нуле. Рассмотрим пространство  $V = \mathbb{R}^n$  как аффинную карту  $x_0 = 0$  в проективном пространстве  $\mathbb{P}_n = \mathbb{P}(\mathbb{R}^{n+1})$  с однородными координатами  $(x_0 : x_1 : \dots : x_n)$  и обозначим через

$$s(x) = -x_0^2 + x_1^2 + \dots + x_n^2 \quad (13-19)$$

однородную квадратичную форму сигнатуры  $(n, 1)$  на пространстве  $W = \mathbb{R}^{n+1}$ , задающую проективное замыкание  $\bar{S} = V(s) \subset \mathbb{P}_n$  сферы  $S$ , которое совпадает с  $S$ , так как у сферы нет вещественных точек на бесконечности. Инволюция  $\sigma_q : S \rightarrow S$  действует на проективной квадрике  $S$  как отражение гиперплоскости  $q_S^\perp \subset W$ , ортогональной относительно формы  $s$  анизотропному вектору  $q$  с положительным скалярным квадратом  $s(q) > 0$ .

УПРАЖНЕНИЕ 13.12. Убедитесь, что такие отражения порождают группу  $O(n, 1) \subset GL_{n+1}(\mathbb{R})$  линейных преобразований  $W \rightarrow W$ , сохраняющих квадратичную форму (13-19).

Поскольку сфера  $S$  содержит  $n + 2$  точки, никакие  $n + 1$  из которых не лежат в одной гиперплоскости, каждый линейный проективный автоморфизм пространства  $\mathbb{P}_n$  однозначно задаётся своим действием на сферу. Мы заключаем, что порождённая отражениями  $\sigma_q$  группа преобразований проективной квадрики  $S$  изоморфна проективизации  $PO(n, 1)$  ортогональной группы квадратичной формы (13-19). Эта группа называется *сферической мёбиусовой группой*  $(n-1)$ -мерной сферы и обозначается  $M(S^{n-1})$ .

Согласно предл. 13.4, сферическая мёбиусова группа  $M(S^{n-1})$  изоморфна группе преобразований пополненного евклидова пространства  $\widehat{\mathbb{R}}^{n-1}$ , порождённой отражениями в сферах и гиперплоскостях. Эта группа называется *несобственной мёбиусовой группой* евклидова пространства  $\mathbb{R}^{n-1}$  и обозначается  $M(\mathbb{R}^{n-1})$  или просто  $M_{n-1}$ . Её подгруппа  $SM_{n-1} \subset M_{n-1}$ , состоящая из всех преобразований, сохраняющих ориентацию пространства  $\mathbb{R}^{n-1}$ , называется *собственной мёбиусовой группой* или просто *группой Мёбиуса* пространства  $\mathbb{R}^{n-1}$ .

УПРАЖНЕНИЕ 13.13. Убедитесь, что композиция  $\sigma_{r_2,c} \circ \sigma_{r_1,c}$  отражений в двух концентрических сферах является гомотетией с центром  $c$  и коэффициентом  $r_2^2 / r_1^2$ .

Так как параллельные переносы и повороты являются композициями отражений в гиперплоскостях, мы заключаем, что мёбиусова группа  $M_n$  евклидова пространства  $\mathbb{R}^n$  содержит все движения и подобия.

### Ответы и указания к некоторым упражнениям

- Упр. 13.2. Пусть квадрики  $Q = V(q)$  и  $F = V(f)$  пересекают гиперплоскость  $\Pi = \mathbb{P}(\text{Ann } \xi)$  по одной и той же квадрике  $G = V(g) = Q \cap \Pi = F \cap \Pi$ . Поскольку при  $\xi = 0$  обе квадратичные формы  $q, f$  превращаются в квадратичную форму  $g$ , они имеют вид  $q = g + \xi\psi, f = g + \xi\varphi$  для некоторых линейных форм  $\psi, \varphi$ . Но тогда ограничения форм  $q, f$  на гиперплоскость  $\text{Ann}(\psi - \varphi)$ , на которой  $\psi = \varphi$ , тоже совпадают друг с другом.
- Упр. 13.3. Первое утверждение очевидно из 13-7 на стр. 163, второе вытекает из лем. 7.1 на стр. 83: простой конус и двойная плоскость имеют в любом пучке кратности  $\geq 1$  и  $\geq n$  соответственно, поэтому никаких других особых квадрик в рассматриваемом пучке больше нет.
- Упр. 13.5. Первое проверяется прямым вычислением, второе вытекает из сл. 13.2 на стр. 170: инверсия  $\sigma$  относительно  $S$  переводит инверсные относительно  $Q$  точки  $c$  и  $c'$  в точки  $\infty$  и  $\sigma(c')$  инверсные относительно  $Q'$ .
- Упр. 13.7. Группа движений пространства  $\mathbb{R}^n$ , переводящих каждую из фигур  $\Phi, \Psi$  в себя, транзитивно действует на пересечении  $\Phi \cap \Psi$  и переводит касательные пространства в касательные пространства, сохраняя углы.
- Упр. 13.8. Первое утверждение вытекает прямо из определения инверсии и гомотетии. Второе утверждение очевидно из того, что гиперплоскость, в которую переходит сфера, проходящая через центр инверсии, параллельна касательному пространству к сфере в центре инверсии.
- Упр. 13.9. По правилу дифференцирования дробей, производная от отображения (13-15)

$$p \mapsto c + \frac{r^2(p - c)}{(p - c, p - c)}$$

действует на касательный вектор  $w \in \mathbb{R}^n$  по правилу

$$\begin{aligned} w \mapsto \frac{r^2}{(p - c, p - c)^2} (w(p - c, p - c) - 2(p - c, w)(p - c)) = \\ = \frac{r^2}{(p - c, p - c)} \left( w - 2 \frac{(p - c, w)}{(p - c, p - c)} (p - c) \right) \end{aligned}$$

(ср. с упр. 10.4 на стр. 124 и п° 2.2 на стр. 18).

- Упр. 13.10. На рис. 13◊17 на стр. 171 проекция прямой  $(a'b')$  на прямую  $(a''b'')$  из точки  $p$  сохраняет двойные отношения. Обозначим через  $e$  и  $f$  точки пересечения прямой  $(a'b')$  соответственно с прямой  $(pg) = (pq)$  и с касательной гиперплоскостью к сфере в точке  $p$ . Тогда  $[\infty, q, a'', b''] = [e, f, a', b'] = -1$ , поскольку точки  $e$  и  $f$  сопряжены относительно сферы  $S(r, c)$ . Таким образом, точка  $g$  спроектируется из  $p$  в середину отрезка  $[a, b]$ .