

## §15. Гиперболическая геометрия

**15.1. Пространство Лобачевского.** Снабдим вещественное векторное пространство  $V = \mathbb{R}^{n+1}$  скалярным произведением Лоренца:

$$(x, y) \stackrel{\text{def}}{=} x_0 y_0 - x_1 y_1 - \dots - x_n y_n. \quad (15-1)$$

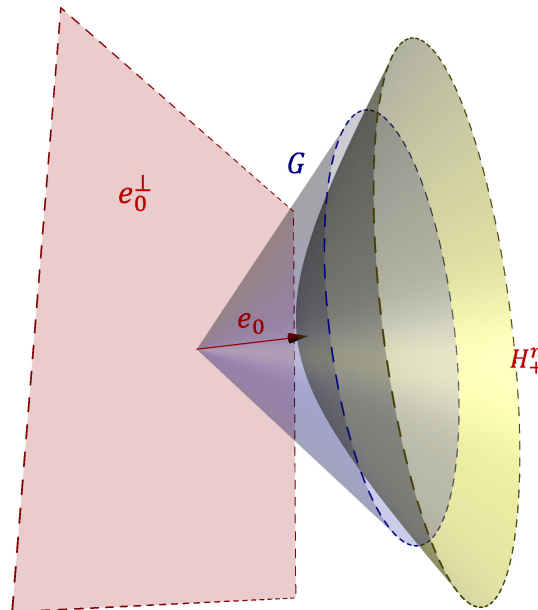
сигнатуры  $(1, n)$  и будем называть *лоренцевыми* такие ортогональные базисы пространства  $V$ , в которых скалярное произведение задаётся формулой (15-1). Изотропная проективная квадратика  $G = \{v \in \mathbb{P}(V) \mid (v, v) = 0\}$  непуста и разбивает проективное пространство  $\mathbb{P}_n = \mathbb{P}(V)$  на два непересекающихся подмножества, состоящие из анизотропных векторов с положительным и с отрицательным скалярным квадратом. Первое из них, являющееся проективизацией внутренности конуса  $G_+ \stackrel{\text{def}}{=} \{v \in V \mid (v, v) > 0\}$ , называется *n-мерным пространством Лобачевского* или *гиперболическим пространством* и обозначается  $\mathbb{L}_n$ . Изотропная квадратика  $G$  является асимптотической квадратикой аффинного двуполостного гиперboloида

$$H^n \stackrel{\text{def}}{=} \{v \in V \mid (v, v) = 1\},$$

состоящего из векторов лоренцевой длины 1. Сопоставляя каждому одномерному векторному подпространству из  $G_+$  точку его пересечения с *положительной полостью*

$$H_+^n \stackrel{\text{def}}{=} \{(x_0, x_1, \dots, x_n) \in V \mid (v, v) = 1 \ \& \ x_0 > 0\} \quad (15-2)$$

гиперboloида  $H^n$ , мы получаем гомеоморфизм пространства Лобачевского с  $H_+^n$ , см. рис. 15◊1.



**Рис. 15◊1.** Вектор  $e_0$  с  $(e_0, e_0) = 1$ , абсолют  $G = \{v \in V \mid (v, v) = 0\}$  и положительная пола  $H_+^n = H \cap x_0^+$  гиперboloида  $H = \{v \in V \mid (v, v) = 1\}$ .

Таким образом<sup>1</sup>,  $n$ -мерное пространство Лобачевского гомеоморфно пространству  $\mathbb{R}^n$ .

<sup>1</sup>См. предл. 9.4 на стр. 115.

**15.1.1. Гиперболическое расстояние.** Пересечения вещественных проективных прямых  $\ell = \mathbb{P}(U) \subset \mathbb{P}(V)$  с пространством Лобачевского  $\mathbb{L}_n$  называются *геодезическими*. Ограничение лоренцева скалярного произведения на двумерное векторное подпространство  $U \subset V$ , содержащее вектор  $p$  с положительным квадратом, имеет сигнатуру  $(1, 1)$ , поскольку подпространство  $U$  имеет одномерное пересечение с трансверсальной к  $p$  гиперплоскостью  $p^\perp$ , на которой лоренцево скалярное произведение отрицательно определено. Таким образом, каждая геодезическая  $(p_1 p_2)$  является проективизацией гиперболической плоскости и пересекает абсолют по двум различным вещественным точкам. Обозначая их через  $a_1, a_2$ , мы можем записать лоренцево скалярное произведение векторов  $u, w \in U$ , имеющих столбцы координат  $x, y \in \mathbb{R}^2$  в каком-либо базисе пространства  $U$  той же самой формулой, что и в н° 14.1.1 на стр. 175

$$(u, w) = \frac{c}{2} (\det(x, a_1) \det(y, a_2) + \det(y, a_1) \det(x, a_2))$$

где  $c \in \mathbb{R}$  — некая константа. Дословно та же выкладка, что и в форм. (15-3) на стр. 189, показывает, что любых двух точек  $p_1, p_2 \in \mathbb{L}_n$  отношение

$$\begin{aligned} \frac{(p_1, p_2)^2}{(p_1, p_1) \cdot (p_2, p_2)} &= \frac{1}{4} \left( \frac{\det(p_1, a_1) \det(p_2, a_2)}{\det(p_1, a_2) \det(p_2, a_1)} + 2 + \frac{\det(p_1, a_2) \det(p_2, a_1)}{\det(p_1, a_1) \det(p_2, a_2)} \right) = \\ &= \frac{1}{4} ([p_1, p_2, a_1, a_2]^{1/2} + [p_1, p_2, a_1, a_2]^{-1/2})^2 = \\ &= \left( \frac{e^\vartheta + e^{-\vartheta}}{2} \right)^2, \quad \text{где } \vartheta = \frac{1}{2} |\ln[p_1, p_2, a_1, a_2]| \in \mathbb{R}, \end{aligned} \quad (15-3)$$

не меняется при замене векторов, представляющих точки  $p_1, p_2$  на пропорциональные и при умножении лоренцева скалярного произведения на любую ненулевую константу. Однако, в отличие от эллиптического случая, число  $\vartheta$  теперь вещественно, и квадрат в последней строке формулы (15-3) является квадратом гиперболического косинуса однозначно определённого вещественного числа  $\vartheta \in [0, \infty)$ . Это число называется *гиперболическим расстоянием* между точками  $p_1, p_2 \in \mathbb{E}_n$  и обозначается  $|p_1, p_2|$ . Его можно вычислять по любой из формул

$$\operatorname{ch} |p_1, p_2| = \frac{|(p_1, p_2)|}{\sqrt{(p_1, p_1) \cdot (p_2, p_2)}}, \quad |p_1, p_2| = \frac{|\ln[p_1, p_2, a_1, a_2]|}{2}. \quad (15-4)$$

Если точки  $p_1, p_2$  представлены векторами  $w_1, w_2 \in H_+^n$ , лежащими на положительной полупрямой (15-2), то первая из этих формул упрощается до

$$\operatorname{ch} |p_1, p_2| = (w_1, w_2).$$

Модуль в формуле (15-4) исчезает, поскольку  $(w_1, w_2) > 0$ .

УПРАЖНЕНИЕ 15.1. Убедитесь, что  $(u, w) \geq 0$  для любых  $u, w \in H_+^n$ .

**15.1.2. Касательные векторы и углы.** Как и в евклидовом случае, лоренцево скалярное произведение на пространстве  $V$  задаёт для каждой точки  $p \in \mathbb{L}_n$  стандартную аффинную окрестность, ассоциированную с векторным пространством  $T_p \mathbb{L}_n = \operatorname{Hom}(p, p^\perp)$ , которое называется *касательным пространством* к  $\mathbb{L}_n$  в точке  $p$ . Эта окрестность состоит из всех одномерных подпространств  $q \subset \mathbb{P}(V)$ , являющихся графиками ненулевых линейных отображений  $\tau : p \rightarrow p^\perp$ , см. рис. 14-6 на стр. 178. Сопоставляя такому отображению  $\tau$  его значение

$$u_\tau = \tau(w) \in p^\perp$$

на единственном лежащем на  $H_+^n$  векторе  $w \in p$ , мы можем отождествить  $T_p \mathbb{L}_n$  с векторным пространством  $p^\perp$ , которое является направляющим векторным пространством касательной гиперплоскости  $T_w H_+^n$  к гиперблоиду (15-2) в точке  $w = p \cap H_+^n$ . Если  $p \in \mathbb{L}_n$ , то лоренцево скалярное произведение (15-1) ограничивается на векторное пространство  $p^\perp$  в анизотропную отрицательно определённую форму. Поэтому на каждом касательном пространстве  $T_p \mathbb{L}_n$  имеется естественная евклидова структура, в которой скалярное произведение касательных векторов  $\tau_1, \tau_2 : p \rightarrow p^\perp$  равно

$$(\tau_1, \tau_2)_p \stackrel{\text{def}}{=} -(\tau_1(w), \tau_2(w)) / (w, w), \quad (15-5)$$

где в правой части всюду используется лоренцево скалярное произведение на  $V$ . При отождествлении  $T_p \mathbb{L}_n$  с векторным пространством  $p^\perp$ , скалярное произведение (15-5) превращается во взятое с противоположным знаком ограничение лоренцева скалярного произведения с  $V$  на  $p^\perp$ :  $(\tau_1, \tau_2)_p = -(\mathbf{u}_{\tau_1}, \mathbf{u}_{\tau_2})$ . При этом длины касательных векторов и углы между ними вычисляются по формулам

$$|\tau| = \sqrt{-(\mathbf{u}_\tau, \mathbf{u}_\tau)}, \quad \cos \angle(\tau_1, \tau_2) = \frac{-(\mathbf{u}_{\tau_1}, \mathbf{u}_{\tau_2})}{\sqrt{(\mathbf{u}_{\tau_1}, \mathbf{u}_{\tau_1})(\mathbf{u}_{\tau_2}, \mathbf{u}_{\tau_2})}}. \quad (15-6)$$

Определённые таким образом длины касательных векторов согласуются с геодезическим расстоянием (15-4) между точками в следующем смысле. Рассмотрим зависящую от времени точку  $w(t)$ , гладко движущуюся по отрезку геодезической  $[p_1, p_2]$  из  $p_1$  в  $p_2$ . Тогда в каждый момент времени вектор скорости этой точки  $\tau(t) = \dot{w}(t)$  находится в касательном пространстве  $T_{w(t)}$  и интеграл от его длины  $|\tau(t)|$ , вычисленной по формуле (15-6), по промежутку времени, за который точка  $w(t)$  пройдёт из  $p_1$  в  $p_2$ , равен гиперболическому расстоянию  $|p_1, p_2|$ , вычисленному по формуле (15-4). Действительно, выберем в линейной оболочке векторов  $w_1, w_2 \in H_+^n$ , представляющих точки  $p_1, p_2 \in \mathbb{L}_n$ , такой лоренцев базис  $e_1, e_2$ , чтобы  $e_1 = \pm w_1$  и обе координаты вектора  $w_2$  были положительны, как на рис. 15◊2. Гладкое отображение

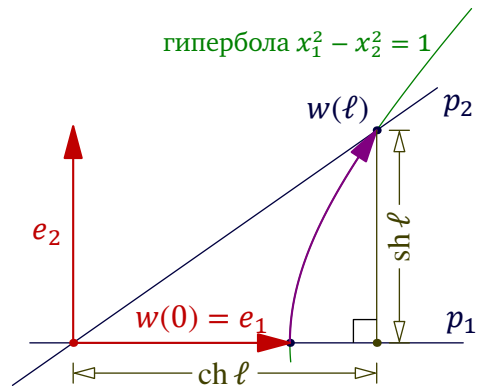


Рис. 15◊2. Геодезический отрезок.

$w : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{L}_n$ , такой лоренцев базис  $e_1, e_2$ , чтобы  $e_1 = \pm w_1$  и обе координаты вектора  $w_2$  были положительны, как на рис. 15◊2. Гладкое отображение

$$w : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{L}_n, \quad t \mapsto \mathbb{R}(e_1 \cdot \text{ch } t + e_2 \cdot \text{sh } t) \subset V, \quad (15-7)$$

задаёт в пространстве Лобачевского кривую, выходящую из точки  $p_1$  при  $t = 0$  и приходящую в точку  $p_2$  при  $t = \ell = |p_1, p_2|$ , см. рис. 15◊2.

УПРАЖНЕНИЕ 15.2. Убедитесь в этом

Вектор  $w(t) = e_1 \cdot \text{ch } t + e_2 \cdot \text{sh } t$ , представляющий точку этой кривой, в каждый момент времени имеет лоренцеву длину 1. Поэтому его производная  $\dot{w}(t) = e_1 \cdot \text{sh } t + e_2 \cdot \text{ch } t \in w(t)^\perp$  в каждый момент времени лоренцево ортогональна вектору  $w(t)$ , т. е. лежит в касательном пространстве  $T_{w(t)} \mathbb{L}_n = w(t)^\perp$ .

УПРАЖНЕНИЕ 15.3. Убедитесь в этом.

Согласно формуле (15-5), касательный вектор  $\dot{w}(t) \in T_w \mathbb{L}_n$  имеет длину  $|\dot{w}(t)| = 1$ . Поэтому длина кривой (15-7), понимаемая как интеграл от абсолютной величины скорости, равна

$$\int_0^{|p_1, p_2|} |\dot{w}(t)| dt = |p_1, p_2|.$$

Образ отрезка  $[0, \ell]$ , где  $\ell = |p_1, p_2|$ , при отображении (15-7) называется *геодезическим отрезком* и обозначается  $[p_1, p_2]$ . Геодезический отрезок можно воспринимать как заключённую между прямыми  $p_1$  и  $p_2$  дугу ветви единичной гиперболы  $x_1^2 - x_2^2 = 1$ , которую пробегает вектор  $w(t) = e_1 \cdot \text{ch } t + e_2 \cdot \text{sh } t$  при  $t \in [0, \ell]$ , где  $\ell = |p_1, p_2|$ . Однако евклидова длина этой дуги на аффинной плоскости  $\mathbb{A}(U)$  с евклидовой структурой, для которой векторы  $e_0, e_1$  образуют ортонормальный базис, отличается от гиперболического расстояния  $|p_1, p_2|$ , поскольку евклидова длина вектора  $\dot{w}(t) = e_1 \cdot \text{sh } t + e_2 \cdot \text{ch } t \in w(t)^\perp$  отличается от гиперболической длины, вычисленной по формуле (15-6), и равна  $\text{sh}^2 t + \text{ch}^2 t = 2 \text{ch}^2 t - 1$ , а интеграл от неё

$$\int_0^{|p_1, p_2|} (2 \text{ch}^2 t - 1) dt = \text{ch } |p_1, p_2| \cdot \text{sh } |p_1, p_2|.$$

УПРАЖНЕНИЕ 15.4. Убедитесь, что гиперболическое расстояние  $|p_1, p_2|$  равно удвоенной евклидовой площади криволинейного треугольника, образованного прямыми  $p_1, p_2$  и отрезком заключённой между ними ветви гиперболы  $x_1^2 - x_2^2 = 1$ , см. рис. 15◊3.

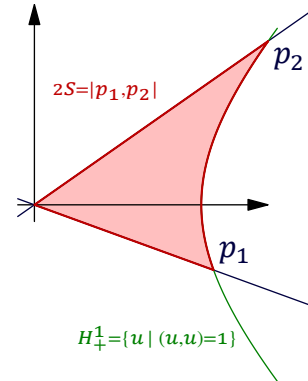


Рис. 15◊3. Гиперболическое расстояние как евклидова площадь.

ТЕОРЕМА 15.1

Геодезическое расстояние (15-4) задаёт на пространстве  $\mathbb{L}_n$  метрику. Каждый геодезический отрезок  $[p_1, p_2] \subset \mathbb{L}_n$  является ГМТ  $p \in \mathbb{L}_n$ , для которых  $|p_1, p| + |p, p_2| = |p_1, p_2|$ .

Доказательство. Любые три линейно независимых вектора  $p_1, p_2, p_3$  с концами на  $H_+^n$  порождают в  $\mathbb{P}(V)$  плоскость, не касающуюся абсолютной квадрики  $G$ . Поэтому ограничение лоренцева скалярного произведения на линейную оболочку этих векторов невырождено и имеет сигнатуру (1, 2). Таким образом, определитель Грама, составленный из попарных лоренцевых скалярных произведений  $g_{ij} = (p_i, p_j)$ , как и в эллиптическом пространстве<sup>1</sup>, неотрицателен:

$$\Gamma_{p_1 p_2 p_3} = \det \begin{pmatrix} 1 & g_{12} & g_{13} \\ g_{12} & 1 & g_{23} \\ g_{13} & g_{23} & 1 \end{pmatrix} = 1 + 2g_{12}g_{23}g_{13} - g_{12}^2 - g_{23}^2 - g_{13}^2 \geq 0 \quad (15-8)$$

и обращается в нуль если и только если  $p_2 \in (p_1 p_3)$ . В силу монотонного возрастания функции  $\text{ch } x$  на  $[0, \infty)$ , неравенство треугольника для точек  $p_1, p_2, p_3$  равносильно неравенству  $\text{ch}(|p_1, p_2| + |p_2, p_3|) \geq \text{ch } |p_1, p_3|$ , которое можно переписать как

$$\text{sh } |p_1, p_2| \cdot \text{sh } |p_2, p_3| \geq \text{ch } |p_1, p_3| - \text{ch } |p_1, p_2| \cdot \text{ch } |p_2, p_3|. \quad (15-9)$$

Поскольку левая часть здесь неотрицательна, при отрицательной правой части неравенство треугольника выполняется строго. Если же правая часть неотрицательна, возводя обе части неравенства в квадрат и пользуясь тем, что  $\text{ch}^2 t - \text{sh}^2 t = 1$ , получаем

$$(g_{12}^2 - 1)(g_{13}^2 - 1) \geq g_{12}^2 g_{23}^2 + g_{13}^2 - 2g_{12}g_{23}g_{13},$$

что превращается в (15-8) после раскрытия скобок и переноса правой части налево. Равенство в (15-9) влечёт равенство в (15-8). В этом случае все три точки лежат на одной геодезической, и равенство  $|p_1, p_2| + |p_2, p_3| = |p_1, p_3|$  равносильно тому, что  $p_2 \in [p_1, p_3]$ , см. рис. 15◊3 и рис. 15◊2.  $\square$

<sup>1</sup>Ср. с доказательством теор. 14.1 на стр. 177.

**15.2. Модель  $B_1^n$ .** Гиперболическое пространство  $\mathbb{L}_n$  целиком наблюдаемо в стандартной аффинной карте  $U_0 = \{(x_0, x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^{n+1} \mid x_0 = 1\}$  проективного пространства  $\mathbb{P}_n = \mathbb{P}(V)$  в виде внутренности единичного шара  $B_1^n = G_+ \cap U_0$ :

$$B_1^n = \{(1, x_1, \dots, x_n) \in U_0 \mid x_1^2 + \dots + x_n^2 \leq 1\}.$$

При этом геодезические пространства  $\mathbb{L}_n$  видны в  $B_1^n$  в виде прямых, через любые две различные точки проходит единственная прямая, и кратчайший путь из одной точки в другую идёт по отрезку этой прямой. Та же картина имеет место в евклидовом пространстве  $U_0$  с евклидовой структурой, задаваемой взятым с противоположным знаком ограничением лоренцева скалярного произведения с  $V$  на направляющее подпространство  $e_0^\perp = \text{Ann } x_0$  карты  $U_0$ . Однако и расстояния, и углы в  $\mathbb{L}_n$  отличаются от расстояний и углов в евклидовом пространстве  $U_0$ . Так, точка  $w = \text{ch } \ell \cdot e_0 + \text{sh } \ell \cdot e_1 \in \mathbb{L}_n$ , находящаяся на гиперболическом расстоянии  $\ell$  от точки  $e_0$ , видна в аффинной карте  $U_0 = e_0 + e_0^\perp$  как точка  $u = e_0 + \text{th } \ell \cdot e_1$ , см. рис. 15◊4, удалённая от  $e_0$  на евклидово расстояние

$$\ell_{\text{ЕВК}} = \text{th } \ell, \tag{15-10}$$

и при  $\ell_{\text{ЕВК}} \rightarrow 1$ , когда точка  $u$  приближается к абсолюту, гиперболическое расстояние  $\ell \rightarrow \infty$ .

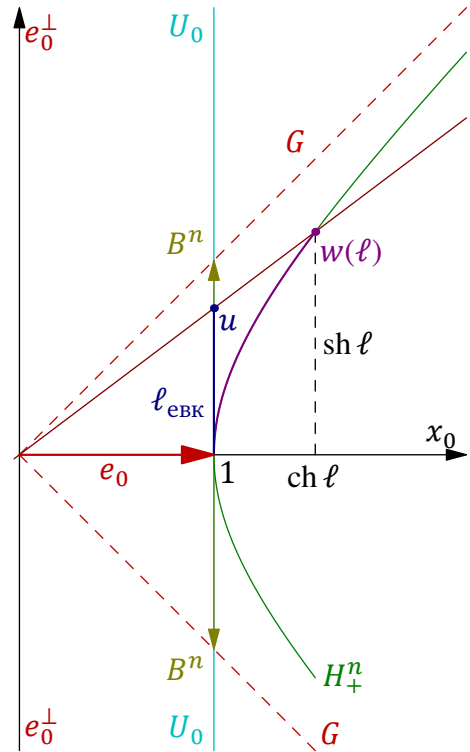


Рис. 15◊4.  $\ell_{\text{ЕВК}} : 1 = \text{sh } \ell : \text{ch } \ell$ .

**Пример 15.1 (ПАРАЛЛЕЛЬНЫЕ ПРЯМЫЕ)**

Плоскость Лобачевского  $\mathbb{L}_2$ , как и евклидова плоскость, разбивается каждой лежащей в ней прямой на две связные компоненты. Однако через любую точку  $a$ , не лежащую на произвольно заданной прямой  $\ell$ , проходит континуальное семейство прямых, не пересекающих прямую  $\ell$ , см. рис. 15◊5.

**Пример 15.2 (ГИПЕРБОЛИЧЕСКАЯ ТРИГОНОМЕТРИЯ)**

Рассмотрим три линейно независимых вектора  $w_0, w_1, w_2 \in \mathbb{L}_2$  с концами на  $H_+^2$ . Дополним вектор  $w_0$  до лоренцева базиса в линейной оболочке векторов  $w_0, w_1$  вектором  $u_1$  так, чтобы вектор  $w_1$  имел в этом базисе положительные координаты, и рассмотрим аналогичный лоренцев базис  $w_0, u_2$  в линейной оболочке векторов  $w_0, w_2$ . Тогда угол  $\alpha_0$  при вершине  $w_0$  в  $\Delta w_0 w_1 w_2$  имеет  $\cos \alpha_0 = -(u_1, u_2)$ , а векторы  $w_1, w_2$  выражаются через базисные по формулам<sup>1</sup>

$$\begin{aligned} w_1 &= \text{ch } |w_0, w_1| \cdot w_0 + \text{sh } |w_0, w_1| \cdot u_1 \\ w_2 &= \text{ch } |w_0, w_2| \cdot w_0 + \text{sh } |w_0, w_2| \cdot u_2. \end{aligned} \tag{15-11}$$

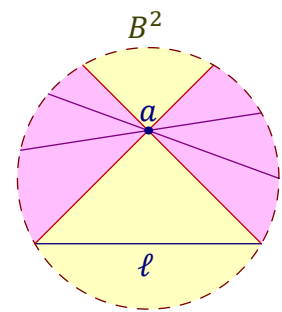


Рис. 15◊5.

Подставляя это в лоренцево произведение  $(w_1, w_2) = \text{ch } |w_1, w_2|$ , получаем гиперболическую теорему косинусов

<sup>1</sup>Ср. с доказательством форм. (14-11) на стр. 183.

$$\operatorname{ch} |w_1, w_2| = \operatorname{ch} |w_0, w_1| \cdot \operatorname{ch} |w_0, w_2| - \operatorname{sh} |w_0, w_1| \cdot \operatorname{sh} |w_0, w_2| \cdot \cos \alpha_0. \quad (15-12)$$

Из (15-11) вытекает также, что определитель матрицы координат векторов  $w_0, w_1, w_2$  в произвольно зафиксированном лоренцевом базисе  $e$  пространства  $V = \mathbb{R}^3$  равен

$$\det(w_0, w_1, w_2) = \operatorname{sh} |w_0, w_1| \operatorname{sh} |w_0, w_2| \det(w_0, u_1, u_2).$$

Так как квадрат последнего определителя равен определителю Грама<sup>1</sup> векторов  $w_0, u_1, u_2$ :

$$\det^2(w_0, u_1, u_2) = \Gamma_{w_0, u_1, u_2} = \det \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -\cos \alpha_0 \\ 0 & -\cos \alpha_0 & -1 \end{pmatrix} = \sin^2 \alpha_0,$$

в любом  $\Delta w_0 w_1 w_2$  с гиперболическими углами  $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2$  и длинами сторон  $\ell_i = |w_j, w_k|$  для всех циклических перестановок  $i, j, k$  номеров 0, 1, 2 выполнена *гиперболическая теорема синусов*

$$\det(w_0, w_1, w_2) = \operatorname{sh} \ell_i \operatorname{sh} \ell_j \sin \alpha_k, \quad (15-13)$$

где векторы  $w_i$ , представляющие вершины треугольника, предполагаются лежащими на единичном гиперboloиде  $H_+^2$ . Из формулы (15-13) вытекает равенство

$$\frac{\operatorname{sh} \ell_0}{\sin \alpha_0} = \frac{\operatorname{sh} \ell_1}{\sin \alpha_1} = \frac{\operatorname{sh} \ell_2}{\sin \alpha_2}, \quad (15-14)$$

также известное как *гиперболическая теорема синусов*.

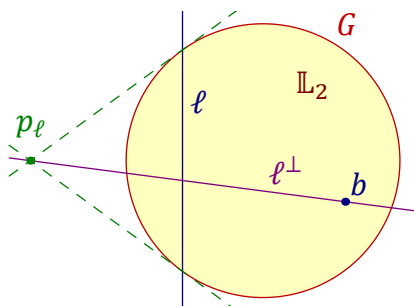


Рис. 15◊6. Перпендикуляр  $\ell^\perp$ , опущенный из точки  $b$  на прямую  $\ell$ .

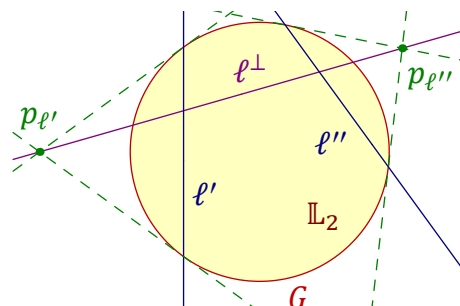


Рис. 15◊7. Общий перпендикуляр  $\ell^\perp$  к двум не пересекающимся прямым  $\ell', \ell''$ .

Пример 15.3 (перпендикуляры к прямым)

Прямая  $\ell \subset \mathbb{P}_2 = \mathbb{P}(\mathbb{R}^3)$  пересекает плоскость Лобачевского  $\mathbb{L}_2 \subset \mathbb{P}_2$  если и только если её полюс  $p_\ell$  относительно абсолютной коники  $G \subset \mathbb{P}_2$  не лежит в  $\mathbb{L}_2$ , см. рис. 15◊6. Две такие прямые перпендикулярны тогда и только тогда, когда они сопряжены относительно  $G$ , т. е. проходят через полюсы друг друга. В частности, через каждую точку  $b \in \mathbb{L}_2 \setminus \ell$  проходит единственная прямая,

<sup>1</sup>Согласно форм. (1-2) на стр. 6, определитель Грама любого набора векторов равен произведению определителя Грама лоренцева базиса на квадрат определителя матрицы координат рассматриваемых векторов в этом лоренцевом базисе.

перпендикулярная прямой  $\ell$ , а именно — прямая  $(bp_\ell)$ . В точке пересечения  $a = (bp_\ell) \cap \ell$  достигается строгий абсолютный минимум гиперболического расстояния от точки  $b$  точек прямой  $\ell$ , поскольку для любой отличной от  $b$  точки  $c \in \ell$  в силу формулы (14-11) выполняется неравенство  $\operatorname{ch} |b, c| = \operatorname{ch} |a, b| \cdot \operatorname{ch} |a, c| > \operatorname{ch} |a, b|$ , ибо  $\operatorname{ch} |a, c| > 1$ . В отличие от евклидовой плоскости, у любых двух пересекающихся  $\mathbb{L}_2$  но не пересекающихся внутри  $\mathbb{L}_2$  прямых  $\ell', \ell'' \subset \mathbb{P}_2$  имеется единственный общий перпендикуляр, а именно — поляр  $\ell^\perp = (p_{\ell'}, p_{\ell''})$  точки  $\ell' \cap \ell''$  относительно абсолютной коники  $G$ . При этом точки пересечения  $a' = \ell' \cap \ell^\perp$  и  $a'' = \ell'' \cap \ell^\perp$  образуют единственную пару точек, на которой достигается строгий абсолютный минимум расстояний между точками прямых  $\ell'$  и  $\ell''$  в том смысле, что  $|c', c''| > |a', a''|$  для всех  $c' \in \ell' \setminus a'$ ,  $c'' \in \ell'' \setminus a''$ .

ПРИМЕР 15.4 (МЕДИАТОР)

В гиперболическом пространстве  $\mathbb{L}_n$  равноудалённость точки  $q$  от двух заданных различных точек  $p_1, p_2$ , где все три точки представлены векторами с концами на  $H_+^n$ , выражается равенством<sup>1</sup>  $(p_1, q) = (p_2, q)$ , означающем, что  $q \in (p_1 - p_2)^\perp$ . Таким образом, ГМТ  $q \in \mathbb{L}_n$ , равноудалённых от двух заданных точек  $p_1 \neq p_2$ , высекается из  $\mathbb{L}_n$  проективной гиперплоскостью  $(p_1 - p_2)^\perp$ , полярной к точке  $p_1 - p_2$ , которая лежит вне  $\mathbb{L}_n$ .

УПРАЖНЕНИЕ 15.5. Покажите, что разность любых двух различных векторов  $u, w \in H_+^n$  лежит вне  $\mathbb{L}_n$ .

Как и в евклидовой геометрии, эта гиперплоскость перпендикулярна прямой  $(p_1 p_2)$  и проходит через точку  $(p_1 + p_2)/2 \in \mathbb{L}_n$ .

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 15.1

Если  $(n + 1)$  точек  $p_0, p_1, \dots, p_n \in \mathbb{L}_n$  не лежат в гиперплоскости, а точки  $a, b \in \mathbb{L}_n$  таковы, что  $|a, p_i| = |b, p_i|$  для всех  $0 \leq i \leq n$ , то  $a = b$ .

Доказательство. Если  $a \neq b$ , то согласно прим. 15.4 все точки  $p_i \in (a - b)^\perp$ . □

**15.3. Группа изометрий.** Гиперплоскость  $u^\perp \subset \mathbb{P}(V)$ , лоренцево ортогональная вектору  $u \in V$ , пересекает гиперболическое пространство  $\mathbb{L}_n$  если и только если  $(u, u) < 0$ . Отражение в такой гиперплоскости  $\sigma_u : V \rightarrow V, v \mapsto v - 2(u, e) \cdot u$  задаёт линейную проективную инволюцию  $\sigma_u : \mathbb{P}(V) \rightarrow \mathbb{P}(V)$ , оставляющую на месте точку  $u$  и все точки гиперплоскости  $u^\perp$ . Она переводит в себя абсолютную квадрику  $G \subset \mathbb{P}(V)$  и пространство Лобачевского  $\mathbb{L}_n$ . Возникающее таким образом изометрическое преобразование  $\sigma_u : \mathbb{L}_n \rightarrow \mathbb{L}_n$  отправляет точку  $p \in \mathbb{L}_n$  в такую точку  $\sigma_u(p) \in (pu)$ , что точки  $p$  и  $\sigma_u(p)$  гармоничны на прямой  $(pu)$  точкам  $u$  и  $u^* = (pu) \cap u^\perp$ , вторая из которых сопряжена точке  $u$  относительно абсолюта. Для любых двух различных точек  $p_1, p_2 \in \mathbb{L}_n$  существует единственная гиперплоскость, отражение в которой переводит эти точки друг в друга. Это в точности медиаторная гиперплоскость  $(p_1^+ - p_2^+)^\perp$ .

УПРАЖНЕНИЕ 15.6. Убедитесь в этом.

ТЕОРЕМА 15.2

Всякое изометрическое преобразование  $g : \mathbb{L}_n \rightarrow \mathbb{L}_n$  задаётся лоренцево ортогональным линейным оператором  $g : V \simeq V$ , который определяется преобразованием  $g$  однозначно с точностью до умножения на  $\pm 1$ . Каждое изометрическое преобразование является композицией не более  $n + 1$  отражений в гиперплоскостях. Для любых двух наборов из  $n + 1$  не содержащихся

<sup>1</sup>Обратите внимание, что в отличие от прим. 14.1 на стр. 180 в этом равенстве нет модулей.

в гиперплоскости точек  $p_i, q_i, 0 \leq i \leq n$ , таких что  $|p_i, p_j| = |q_i, q_j|$  для всех  $i, j$ , существует единственное изометрическое преобразование  $g : \mathbb{L}_n \simeq \mathbb{L}_n$ , переводящее точку  $p_i$  в точку  $q_i$  для каждого  $i$ .

Доказательство. Представим все точки векторами с концами на  $H_+^n$ . Тогда равенства  $|p_i, p_j| = |q_i, q_j|$  для всех  $i, j$  означают равенство матриц Грама этих наборов векторов. Поэтому существует линейный лоренцево ортогональный оператор  $g : V \rightarrow V$ , переводящий векторы  $p_i$  в векторы  $q_i$ . Согласно предл. 15.1, каждая точка  $z \in \mathbb{L}_n$  однозначно определяется своими расстояниями как до точек  $p_i$ , так и до точек  $q_i$ . Поэтому всякое изометрическое преобразование  $\mathbb{L}_n \rightarrow \mathbb{L}_n$ , переводящее точки  $p_i$  в точки  $q_i$ , совпадает с задаваемым оператором  $g$  преобразованием  $g : \mathbb{L}_n \rightarrow \mathbb{L}_n$ . Это доказывает первое и последнее утверждения теоремы. Единственность оператора  $g$  с точностью до знака проверяется той же выкладкой, что и в упр. 14.6 на стр. 181, а его разложение в композицию не более  $n + 1$  отражений — теми же рассуждениями, что и в теор. 2.2 на стр. 18, но с использованием упр. 15.6.  $\square$

УПРАЖНЕНИЕ 15.7. Аккуратно проделайте все эти рассуждения.

Следствие 15.1

Всякое изометрическое преобразование  $g : \mathbb{L}_n \rightarrow \mathbb{L}_n$  однозначно продолжается на абсолют до непрерывного преобразования  $g : \bar{\mathbb{L}}_n \rightarrow \bar{\mathbb{L}}_n$ , где  $\bar{\mathbb{L}}_n$  означает замыкание  $\mathbb{L}_n$  в  $\mathbb{P}_n = \mathbb{P}(V)$ , и однозначно восстанавливается по своему действию на абсолют.  $\square$

Пример 15.5 (Гиперболические сферы)

Гиперболическая сфера радиуса  $r$  с центром в точке  $p \in \mathbb{L}_n$  определяется как ГМТ  $x \in \mathbb{L}_n$  с  $|p, x| = r$ . Это гладкая вещественная проективная квадратика с уравнением<sup>1</sup>

$$(p, x)^2 - (x, x) \cdot (p, p) \cdot \text{ch}^2 r = 0. \quad (15-15)$$

Все такие квадратки лежат в пучке  $S_\lambda = P_p^2 - \lambda G$ , натянутом на двойную поляру  $P_p = p^\perp$  точки  $p$  относительно абсолюта — вырожденную квадратку ранга 1, задаваемую квадратичной формой  $q_0(x) = (p, x)^2$ , и абсолютную квадратку  $G$ , задаваемую квадратичной формой  $q_\infty(x) = (x, x)$ . Поляризация квадратичной формы  $q_\lambda = q_0 + \lambda q_\infty$ , задающей произвольную квадратку  $S_\lambda = P_p - \lambda G$  из этого пучка, имеет вид  $\tilde{q}_\lambda(x, y) = (p, x)(p, y) - \lambda(x, y)$ . Полярная линейная форма точки  $p$  относительно такой квадратки равна

$$\tilde{q}_\lambda(p, y) = (p, p)(p, y) - \lambda(p, y) = (p, y) \cdot ((p, p) - \lambda)$$

и тождественно зануляется при  $\lambda = (p, p)$ . Поэтому сфера нулевого радиуса  $S_{(p,p)} = P_p - (p, p) \cdot G$  особа в точке  $p$ .

УПРАЖНЕНИЕ 15.8. Убедитесь, что в комплексном проективном пространстве  $\mathbb{P}_n^{\mathbb{C}}$  квадратка  $S_{(p,p)}$  представляет собою простой конус с вершиной в  $p$ , образованный всеми (комплексными) касательными прямыми, опущенными из  $p$  на  $G$ .

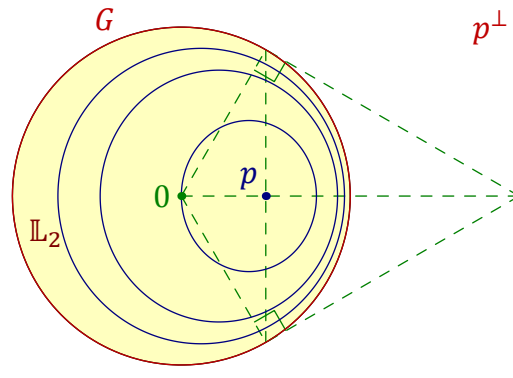


Рис. 15.8. Пучок окружностей с центром  $p$ .

<sup>1</sup>См. первую из форм. (15-4) на стр. 189.



Группа  $\Gamma_p$  всех изометрических преобразований  $\mathbb{L}_n \rightarrow \mathbb{L}_n$ , оставляющих точку  $p$  на месте, переводит в себя каждую из трёх квадрик  $S_{(p,p)}$ ,  $S_0 = \Pi_p$ ,  $S_\infty = G$ , а значит, и каждую квадрику из натянутого на них пучка. Поскольку группа  $\Gamma_p$  транзитивно действует на проходящих через точку  $p$  прямых, каждая гиперболическая сфера  $S_\lambda = \Pi_p - \lambda G$  представляет собою одну орбиту группы  $\Gamma_p$ . Гиперболический радиус  $r$  сферы  $S_\lambda$  связан с параметром пучка  $\lambda$  соотношением

$$\lambda = (p, p) \cdot \operatorname{ch}^2 r. \quad (15-16)$$

В частности, множество вещественных точек сферы  $S_\lambda$  непусто при  $\lambda \geq (p, p)$ , и при  $\lambda = (p, p)$  гиперболическая сфера вырождается в одну двойную точку  $p$ . Если отождествить плоскость Лобачевского  $\mathbb{L}_2$  с единичным кругом в аффинной карте  $U_0$  и ввести в нём декартовы координаты  $(x, y)$  так, чтобы  $p = (c, 0)$ , то лоренцев скалярный квадрат точки  $p$  будет равен  $(p, p) = 1 - c^2$ , а пучок гиперболических окружностей с центром в  $p$  будет выглядеть как пучок эллипсов<sup>1</sup> с уравнениями  $(cx - 1)^2 - \lambda(x^2 + y^2 - 1) = 0$ , см. рис. 15◊8.

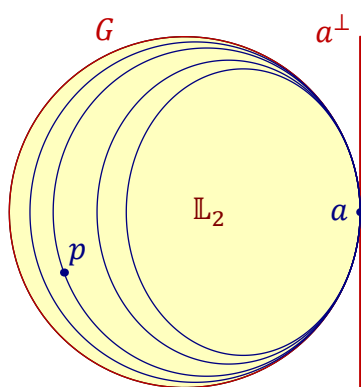


Рис. 15◊9. Пучок орициклов с полюсом в точке  $a$  на абсолютном.

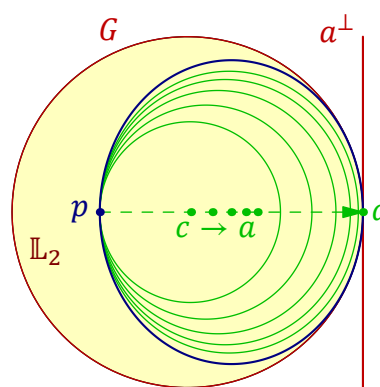


Рис. 15◊10. Орицикл как предел проходящих через  $p$  окружностей неограниченного радиуса.

#### ПРИМЕР 15.6 (Орициклы)

Квадрики из пучка, порождённого абсолютном  $G$  и двойной касательной плоскостью  $T_a G$  в некоторой точке  $a \in G$  на абсолютном, называются *орициклами* с полюсом  $a$ . Через любую точку  $p \in \mathbb{L}_n$  и любую точку  $a \in G$  проходит единственный орицикл с полюсом в  $a$ , см. рис. 15◊9. Его можно воспринимать как предел проходящих через точку  $p$  сфер, центры  $c$  которых удаляются от точки  $p$  в направлении  $a$ , а радиусы<sup>2</sup> неограниченно возрастают, см. рис. 15◊10. В отличие от евклидовой геометрии, в геометрии Лобачевского такие сферы не «уплощаются» в пределе до перпендикулярной к прямой  $(pa)$  гиперплоскости, проходящей через точку  $p$ , а стремятся к гладкой квадрике — орициклу с полюсом в  $a$ .

УПРАЖНЕНИЕ 15.9. Покажите, что каждый орицикл с полюсом  $a$  пересекает в  $\mathbb{L}_n$  все проходящие через  $a$  геодезические под прямым углом.

<sup>1</sup>На комплексной проективной плоскости  $\mathbb{P}_2^{\mathbb{C}}$  это пучок коник с двумя базисными точками и двумя особыми кониками, как на рис. 7◊3 на стр. 85.

<sup>2</sup>Т. е. гиперболические расстояния  $|p, c|$ , где  $c$  это центр соответствующей сферы.

**15.3.1. Дифференциал гиперболической изометрии.** Как и в эллиптическом случае, ортогональный оператор  $g : V \simeq V$  задаёт для каждой точки  $p \in \mathbb{L}_n$  ортогональное линейное отображение касательных пространств

$$dg : T_p \mathbb{L}_n \simeq T_{g(p)} \mathbb{L}_n, \quad \tau \mapsto g\tau g^{-1}, \quad (15-17)$$

переводящее касательный вектор  $\tau : p \mapsto p^\perp$  в касательный вектор

$$dg(\tau) : gp \mapsto gp^\perp, \quad gw \mapsto g\tau(w).$$

Ортогональный линейный оператор (14-10) называется *дифференциалом* изометрического преобразования  $g : \mathbb{P}(V) \simeq \mathbb{P}(V)$  в точке  $p \in \mathbb{P}(V)$ .

**15.4. Гиперболическая форма объёма.** Точно также, как и в н° 15.4 на стр. 197, с каждым ненулевым вектором  $w$  из пространства  $V$  с лоренцевым скалярным произведением связана кососимметричная  $n$ -линейная форма на  $V$ , значение которой на векторах  $v_1, v_2, \dots, v_n \in V$  определяется равенством

$$w \wedge v_1 \wedge v_2 \wedge \dots \wedge v_n = \omega_w(v_1, v_2, \dots, v_n) \cdot e_0 \wedge e_1 \wedge e_2 \wedge \dots \wedge e_n, \quad (15-18)$$

где векторы  $e = (e_0, e_1, \dots, e_n)$  составляют лоренцев базис<sup>1</sup> пространства  $V$ . С точностью до знака, форма (15-18) не зависит от выбора лоренцева базиса, и абсолютная величина её значения на параллелепипеде из подпространства  $w^\perp \subset V$  равна умноженному на  $|w|$  евклидову  $n$ -мерному объёму этого параллелепипеда вне зависимости от выбора лоренцева базиса в  $V$ . Если вектор  $w$  лежит на<sup>2</sup>  $H_+^n$  векторное подпространство  $w^\perp$  является направляющим векторным пространством касательной гиперплоскости  $T_w H_+^n \subset \mathbb{A}(V)$ , и ограничение на него формы  $|\omega_w|$  задаёт в этой гиперплоскости евклидов объём. В координатах относительно лоренцева базиса  $e$  задаваемая равенством (15-18) дифференциальная форма

$$\omega(x) : (v_1, v_2, \dots, v_n) \mapsto \omega_x(v_1, v_2, \dots, v_n) \quad (15-19)$$

записывается в точности также, как и на эллиптическом пространстве<sup>3</sup>:

$$\omega(x) = \sum_{v=0}^n (-1)^v x_v \cdot dx_0 \wedge \dots \wedge \widehat{dx}_v \wedge \dots \wedge dx_n, \quad (15-20)$$

Если задана гладкая биекция  $f : \Omega \rightarrow \Phi$  некоторой области  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  евклидова пространства  $\mathbb{R}^n$  на область  $\Phi \subset H_+^n$ , то подъём  $f^* \omega$  формы  $\omega$  с  $H_+^n$  на  $\mathbb{R}^n$  в каждой точке  $z \in \Omega$  пропорционален форме евклидова объёма на  $\mathbb{R}^n$ . Абсолютная величина коэффициента пропорциональности является неотрицательной функцией на области  $\Omega$

$$\varrho(z) = |\omega_{f(z)}(df(u_1), df(u_2), \dots, df(u_n))|,$$

где  $u_1, u_2, \dots, u_n$  — произвольный ортонормальный базис в  $\mathbb{R}^n$ , и интеграл от этой функции называется *объёмом гиперболической области*  $\Phi = f(\Omega) \subset H_+^n$ :

$$\text{Vol}(\Phi) \stackrel{\text{def}}{=} \int_{\Omega} \varrho(z) dz_1 \dots dz_n.$$

<sup>1</sup>См. н° 15.1 на стр. 188.

<sup>2</sup>См. формулу (15-2) на стр. 188.

<sup>3</sup>См. формулу (14-16) на стр. 184.

Как и в н° 14.4.2 на стр. 186, форму (15-20) можно по однородности распространить до *инвариантной формы объёма* на касательном пространстве  $T_p \mathbb{L}_n$  в точке  $p \in \mathbb{L}_n$  правилом

$$\text{Vol}_p : (\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_n) \mapsto \frac{|\omega_w(\tau_1(w), \tau_2(w), \dots, \tau_n(w))|}{|w|^{n+1}}, \quad (15-21)$$

которое не зависит от выбора ненулевого представителя  $w \in p$  и при  $w \in H_+^n$  и  $u_i = \tau_i(w)$  превращается в форму (15-19)

$$\text{Vol}_p(\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_n) = \omega_w(u_1, u_2, \dots, u_n).$$

Как и в эллиптическом случае, форма (15-21) обладает тем свойством, что для любого лоренцево ортогонального линейного оператора  $g : V \simeq V$  выполняется равенство

$$\text{Vol}_{g(p)}(dg(\tau_1), dg(\tau_2), \dots, dg(\tau_n)) = \text{Vol}_p(\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_n),$$

где  $dg : T_p \mathbb{P}(V) \rightarrow T_{g(p)} \mathbb{P}(V)$  это дифференциал<sup>1</sup> преобразования  $g : \mathbb{P}(V) \simeq \mathbb{P}(V)$ .

Пример 15.7 (подъём гиперболического объёма на евклидов шар  $B_1^n \subset U_0$ )

Обозначим через  $t_i = x_i/x_0$  стандартные координаты в аффинной карте  $U_0 \subset \mathbb{P}(\mathbb{R}^{n+1})$ , которую мы будем рассматривать как евклидово пространство со скалярным произведением

$$(u, w)_0 \stackrel{\text{def}}{=} -(u, w) = u_1 w_1 + u_2 w_2 + \dots + u_n w_n,$$

противоположным по знаку к ограничению лоренцева скалярного произведения с  $\mathbb{R}^{n+1}$  на  $e_0^\perp$ . Лежащий на единичном гиперboloиде вектор  $x(t) \in H_+^n$ , который представляет ту же самую точку пространства  $\mathbb{L}_n$ , что и вектор  $t \in B^n \subset U_0$ , имеет вид  $x(t) = x_0 \cdot (e_0 + t)$  и лоренцев скалярный квадрат  $1 = (x(t), x(t)) = x_0^2 \cdot (1 + (t, t))$ , откуда  $x_0 = (1 + (t, t))^{-\frac{1}{2}}$ . Так как  $x_i = t_i x_0$ , дифференциал  $dx_i = x_0 dt_i + t_i dx_0$ . Поэтому

$$\begin{aligned} dx_1 \wedge dx_2 \wedge \dots \wedge dx_n &= x_0^n dt_1 \wedge dt_2 \wedge \dots \wedge dt_n + \\ &+ x_0^{n-1} \sum_{i=1}^n (-1)^{i-1} t_i dx_0 \wedge dt_1 \wedge \dots \wedge \widehat{dt}_i \wedge \dots \wedge dt_n, \\ dx_0 \wedge dx_1 \wedge \dots \wedge \widehat{dx}_i \wedge \dots \wedge dx_n &= x_0^{n-1} dx_0 \wedge dt_1 \wedge \dots \wedge \widehat{dt}_i \wedge \dots \wedge dt_n. \end{aligned}$$

Подставляя это в форму объёма (15-20), заключаем, что её подъём с гиперboloида  $H_+^n$  на евклидов шар  $B^n \subset U_0$  имеет вид

$$\begin{aligned} \omega(t) &= x_0 dx_1 \wedge dx_2 \wedge \dots \wedge dx_n + \sum_{i=1}^n (-1)^i x_i dx_0 \wedge dx_1 \wedge \dots \wedge \widehat{dx}_i \wedge \dots \wedge dx_n = \\ &= x_0^{n+1} dt_1 \wedge dt_2 \wedge \dots \wedge dt_n + \\ &+ x_0^n \sum_{i=1}^n (-1)^{i-1} t_i dx_0 \wedge dt_1 \wedge \dots \wedge \widehat{dt}_i \wedge \dots \wedge dt_n + \\ &+ x_0^n \sum_{i=1}^n (-1)^i t_i dx_0 \wedge dt_1 \wedge \dots \wedge \widehat{dt}_i \wedge \dots \wedge dt_n = \frac{dt_1 \wedge dt_2 \wedge \dots \wedge dt_n}{(1 - (t, t)_0)^{\frac{n+1}{2}}}. \end{aligned}$$

<sup>1</sup>См. н° 15.3.1 на стр. 197.

Таким образом, коэффициент растяжения гиперболического объёма по отношению к евклидову в точке  $t \in B^n$  зависит только от евклидовой нормы  $|t|^2 = (t, t)_0$  вектора  $t$  и равен

$$\varrho(t) = (1 - |t|^2)^{-\frac{n+1}{2}}. \quad (15-22)$$

ПРИМЕР 15.8 (ПЛОЩАДЬ ГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО ТРЕУГОЛЬНИКА)

Рассмотрим на плоскости Лобачевского  $\mathbb{L}_2$  прямоугольный  $\Delta abc$  с прямым углом в вершине  $c$  и гиперболическими углами  $\alpha$  и  $\beta$  в вершинах  $a$  и  $b$ . Поместим в вершину  $a$  начальный вектор лоренцева базиса в  $\mathbb{R}^3$  и обозначим через  $u$  и  $w$  изображения вершин  $b$  и  $c$  в проходящей через конец вектора  $a \in \mathbb{R}^3$  стандартной аффинной карте  $U_0 = a + a^\perp$  на  $\mathbb{P}_2 = \mathbb{P}(\mathbb{R}^3)$ , см. рис. 15◊11. Поскольку прямые  $(bc)$  и  $(ac)$  сопряжены в  $\mathbb{P}_2$  относительно абсолютной коники  $G$ , их изображения  $(aw)$  и  $(uw)$  в карте  $U_0$  перпендикулярны друг другу в евклидовой структуре на  $a^\perp$ , а так как гиперболические углы между касательными векторами к  $\mathbb{P}_2$  в точке  $a$  совпадают с евклидовыми углами в пространстве  $a^\perp$ , евклидов угол между прямыми  $(au)$  и  $(aw)$  равен гиперболическому углу  $\alpha$  в  $\Delta abc$ . Обозначим через  $\ell$  евклидову длину катета  $[a, w]$  евклидова  $\Delta auw$ . По форм. (15-10) на стр. 192 она выражается через гиперболическую длину  $|a, c|$  соответствующего катета в  $\Delta abc$  как  $\ell = \text{th } |a, c|$ . Гиперболическая площадь  $\Delta abc$  равна интегралу от функции (15-22) по  $\Delta auw$ :

$$S(\Delta abc) = \int_{\Delta auw} (1 - r^2)^{-\frac{3}{2}} dt_1 dt_2,$$

где  $(t_1, t_2)$  — декартовы координаты в карте  $U_0$ , а  $r^2 = t_1^2 + t_2^2$  — квадрат евклидова расстояния до нуля. Переходя к полярным координатам

$$\begin{aligned} t_1 &= r \cos \varphi & dt_1 &= \cos \varphi dr - r \sin \varphi d\varphi \\ t_2 &= r \sin \varphi & dt_2 &= \sin \varphi dr + r \cos \varphi d\varphi \\ dt_1 \wedge dt_2 &= r dr \wedge d\varphi, \end{aligned}$$

получаем

$$\begin{aligned} S(\Delta acb) &= \int_0^\alpha d\varphi \int_0^{\frac{\ell}{\cos \varphi}} (1 - r^2)^{-\frac{3}{2}} r dr = \int_0^\alpha ((1 - \ell^2 / \cos^2 \varphi)^{-\frac{1}{2}} - 1) d\varphi = \\ &= \int_0^\alpha \frac{\cos \varphi d\varphi}{\sqrt{1 - \ell^2 - \sin^2 \varphi}} - \alpha = \arcsin \left( \frac{\sin \alpha}{\sqrt{1 - \ell^2}} \right) - \alpha. \end{aligned}$$

УПРАЖНЕНИЕ 15.10. Убедитесь, что  $\sin \alpha / \sqrt{1 - \ell^2} = \cos \beta$ .

Итак, гиперболическая площадь прямоугольного треугольника с углами  $\alpha, \beta$  равна

$$S(\Delta acb) = \arcsin(\cos \beta) - \alpha = \frac{\pi}{2} - \beta - \alpha.$$

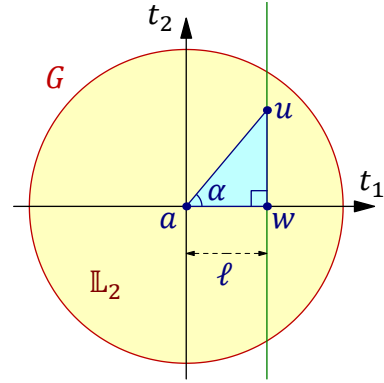


Рис. 15◊11. Изображение гиперболического  $\Delta abc$  в карте  $U_0 = a + a^\perp$ , где  $\ell = \text{th } |a, c|$ .

Разрезая произвольный треугольник на два прямоугольных треугольника высотой, заключаем, что гиперболическая площадь треугольника с углами  $\alpha, \beta, \gamma$  равна  $\pi - \alpha - \beta - \gamma$ . В частности, сумма углов треугольника в гиперболической геометрии всегда строго меньше  $\pi$ . Из соображений непрерывности, формула для площади остаётся справедливой и для треугольников с вершинами на абсолюте, не имеющих никаких других точек на абсолюте, кроме вершин.

**15.5. Конформные модели гиперболического пространства.** Так называют изображения пространства Лобачевского точками евклидова пространства, в которых евклидовы углы между геодезическими равны гиперболическим углам, однако сами геодезические изображаются не в виде евклидовых прямых, как это было в рассмотренной выше *линейной модели*  $B^n \subset U_0$ , а в виде некоторых коник и прямых специального вида. Одна из таких моделей получается из изображения пространства Лобачевского  $\mathbb{L}_n \subset \mathbb{P}(\mathbb{R}^{n+1})$  внутренностью единичного шара  $B^n \subset U_0$  представленным на рис. 15◊12 на стр. 200 биективным квадратичным преобразованием  $\mathcal{K} : B^n \rightarrow B_0^n$  этого шара в точно такой же единичный шар

$$B_0^n \stackrel{\text{def}}{=} \{(0, x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^{n+1} \mid x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2 = 1\} \subset \mathbb{A}(e_0^\perp), \quad (15-23)$$

но лежащий в проходящей через нуль гиперплоскости  $e_0^\perp$ , параллельной карте  $U_0$ . Преобразование  $\mathcal{K}$  осуществляется в два шага. Сначала параллельно спроектируем шар  $B^n$  в направлении вектора  $-e_0$  на положительную полушару  $x_0 \geq 0$  единичной *евклидовой* сферы

$$S^n = \{(x_0, x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^{n+1} \mid x_0^2 + x_1^2 + \dots + x_n^2 = 1\}. \quad (15-24)$$

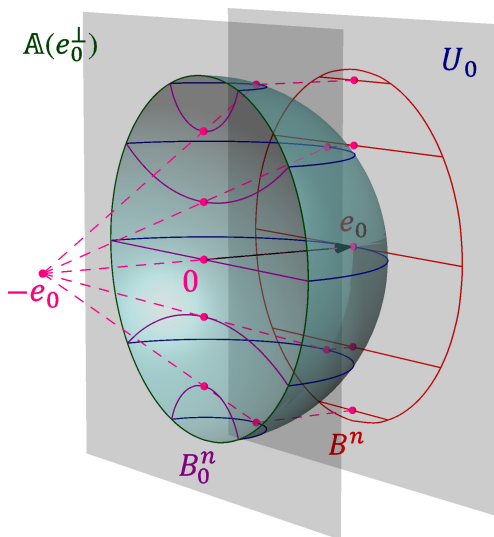


Рис. 15◊12. Квадратичное преобразование  $\mathcal{K} : B^n \rightarrow B_0^n$ .

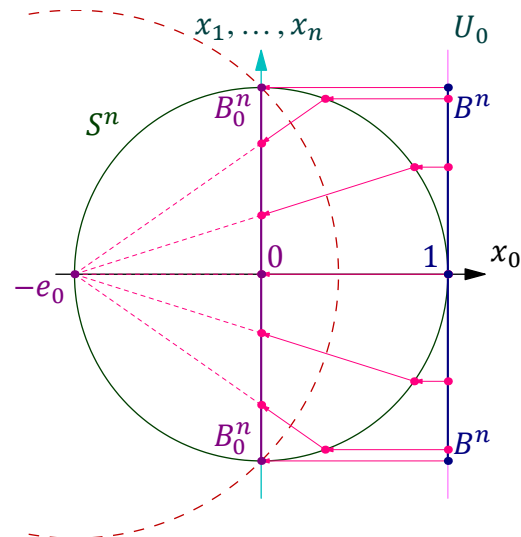


Рис. 15◊13. Вид сбоку на рис. 15◊12.

Затем отобразим эту полушару на параллельную карте  $U_0$  экваториальную плоскость  $\mathbb{A}(e_0^\perp)$  стереографической проекцией из диаметрально противоположной к  $e_0$  точки  $-e_0 \in S^n$ . На первом шаге лежащие в шаре  $B^n$  отрезки прямых из  $U_0$  переходят в дуги окружностей, пересекающих экваториальную плоскость  $\mathbb{A}(e_0^\perp)$  под прямым углом, как на рис. 15◊12. Как мы видели в п° 13.3 на стр. 171, следующая далее стереографическая проекция является ограничением на

сферу  $S^n$  инверсии  $\sigma_{\sqrt{2}, -e_0}$  относительно большей сферы, изображённой на рис. 15◊13 красным пунктиром. Она имеет центр в точке  $-e_0$  и пересекает аффинную гиперплоскость  $\mathbb{A}(e_0^\perp)$  по той же самой  $(n - 1)$ -мерной единичной сфере с центром в нуле

$$S^{n-1} = S^n \cap \mathbb{A}(e_0^\perp) = \{(0, x_1, x_2, \dots, x_n) \in e_0^\perp \mid x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2 = 1\}, \quad (15-25)$$

что и сфера (15-24). Поскольку стереографическая проекция сохраняет углы и переводит окружности в окружности или прямые, геодезические пространства  $\mathbb{L}_n$  изобразятся в шаре  $B_0^n$  в виде его диаметров, а также всевозможных дуг окружностей, пересекающих граничную сферу  $S^{n-1}$  под прямым углом. При этом прямыми изобразятся в точности те геодезические, что проходят через точку  $e_0 \in \mathbb{L}_n$ , которая переводится преобразованием  $\kappa$  в центр шара  $B_0^n$ .

УПРАЖНЕНИЕ 15.11. Обозначим через  $\varrho$  и  $\varrho_0$  евклидовы расстояния от центров шаров  $B^n$  и  $B_0^n$  до точек  $w \in B^n$  и  $w_0 = \kappa(w) \in B_0^n$  соответственно. Покажите, что они связаны соотношениями  $\varrho = 2\varrho_0 / (1 + \varrho_0^2)$  и  $\varrho_0 = (1 - \sqrt{1 - \varrho^2}) / \varrho$ .

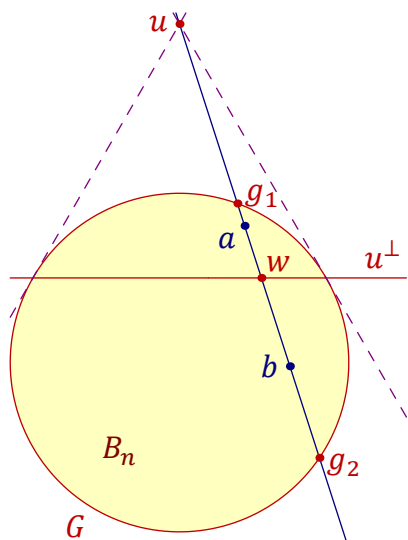


Рис. 15◊14.

$[a, b, u, w] = -1 = [g_1, g_2, u, w]$  на прямой  $(ab)$  при отражении  $\sigma_u$ .

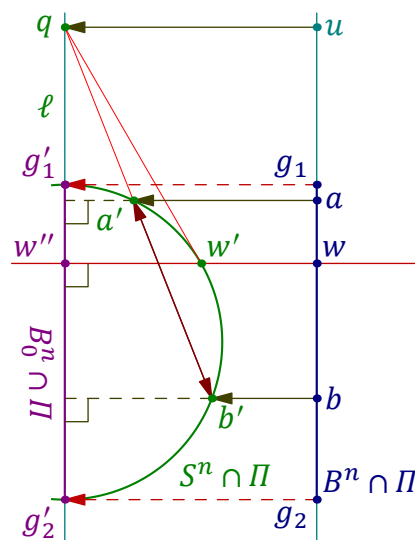


Рис. 15◊15. Параллельная проекция точек  $a, b, u, w$  на полуокружность  $S^n \cap \Pi$ .

ЛЕММА 15.1

Отражение  $\sigma_u : \mathbb{L}_n \rightarrow \mathbb{L}_n, w \mapsto w - 2(w, u) \cdot u / (u, u)$ , в ортогональной гиперплоскости  $u^\perp \subset V$  к вектору  $u$  с концом в карте  $U_0$  и отрицательным лоренцевым квадратом  $(u, u) < 0$  действует в модели  $B_0^n$  как инверсия  $\sigma_{q,d} : B_0^n \rightarrow B_0^n$  в пространстве  $\mathbb{A}(e_0^\perp)$  относительно перпендикулярной границе этого шара  $(n - 1)$ -мерной сферы с центром в точке  $q = u - (u, e_0) \cdot e_0$ , которая является параллельной проекцией точки  $u$  на  $\mathbb{A}(e_0^\perp)$  вдоль вектора  $-e_0$ .

Доказательство. Отражение  $\sigma_u : \mathbb{P}_n \simeq \mathbb{P}_n$  переводит в себя каждую проходящую через  $u$  прямую  $\ell \subset \mathbb{P}_n = \mathbb{P}(\mathbb{R}^{n+1})$  и действует на ней как линейная инволюция с неподвижными точками  $u$  и  $w = \ell \cap u^\perp$ . Поэтому точки  $a, b \in B^n$  переводятся друг друга отражением  $\sigma_u$  если и только если проективная прямая  $(ab)$  проходит через точку  $u$  и на этой прямой точки  $a, b$  гармоничны точкам  $u$  и  $w = (ab) \cap u^\perp$ , см. рис. 15◊14, где изображён вид на аффинную гиперплоскость  $U_0$  вдоль

вектора  $-e_0$ . Параллельная проекция точек  $u$ ,  $a$  и  $b$  на полусферу  $x_0 \geq 0$  сферы  $S^n$  происходит внутри двумерной аффинной плоскости  $\Pi \subset \mathbb{R}^{n+1}$ , которая проходит через аффинную прямую  $(ab) \cap U_0$  параллельно вектору  $-e_0$ . Плоскость  $\Pi$  изображена на рис. 15♦15. Она пересекает сферу  $S^n$  по окружности с диаметром  $\ell = B_0^n \cap \Pi$ . Инволюция  $\sigma_u : (ab) \rightleftharpoons (ab)$  задаёт инволюцию  $\sigma : p^\times \rightarrow p^\times$  на пучке  $p^\times$  параллельных прямых, перпендикулярных прямой  $\ell$ . Центр  $p$  этого пучка является полюсом прямой  $\ell$  относительно окружности  $\Pi \cap S^n$  и лежит на бесконечности плоскости  $\Pi$  в направлении вектора  $e_0$ . Неподвижными точками инволюции являются проходящие через точки  $u$  и  $w$  прямые  $(pu) = (uq)$  и  $(pw)$ . Так как отражение  $\sigma_u : (ab) \rightleftharpoons (ab)$  переставляет между собою изотропные точки  $\{g_1, g_2\} = G \cap (ab)$  прямой  $(ab)$ , изображённые на рис. 15♦15 красным пунктиром прямые гармоничны в пучке  $p^\times$  неподвижным прямым  $(qu)$ ,  $(pw)$ . Поэтому  $[g_1, g_2, q, w''] = -1$ , т. е. точки  $q$  и  $w''$  сопряжены относительно  $S^n \cap \Pi$ , а прямая  $(w'w'')$  является полярной точки  $q$  относительно  $S^n \cap \Pi$ . Следовательно, прямая  $(qa')$  пересекает абсолютную сферу  $G$  и прямую  $(pb)$  по одной и той же точке  $b'$ , ибо эта точка вместе с точкой  $a'$  образует гармоническую пару с парой точек пересечения прямой  $(qa')$  с прямыми  $(pu)$  и  $(pw)$ . Таким образом, проекция шара  $B_n$  на положительную полусферу  $x_0 \geq 0$  единичной сферы  $S^n$  переводит зеркальные относительно  $u^\perp$  точки  $a$ ,  $b$  в точки  $a'$ ,  $b' \in S^n$ , коллинеарные точке  $q$ . Согласно н° 13.3 на стр. 171, стереографическая проекция сферы  $S^n$  из точки  $-e_0$  на экваториальную гиперплоскость  $\mathbb{A}(e_0^\perp)$  переводит инверсию сферы  $S^n$  с центром в точке  $q$  в инверсию гиперплоскости  $\mathbb{A}(e_0^\perp)$  относительно  $(n-1)$ -мерной сферы с центром в  $q$  и радиусом, квадрат которого равен степени точки  $q$  относительно единичной сферы  $S^n$ .  $\square$

#### Следствие 15.2

Группа изометрических преобразований пространства  $\mathbb{L}_n$  в модели  $B_0^n$  это группа преобразований единичного шара  $B_0^n$ , порождённая всевозможными инверсиями объёмлющего евклидова пространства  $\mathbb{A}(e_0^\perp)$ , имеющими центр вне шара  $B_0^n$  и переводящими этот шар в себя. В частности, изометрические преобразования сохраняют евклидовы углы между геодезическими.  $\square$

#### Следствие 15.3

Евклидовы углы между геодезическими в модели  $B_0^n$  равны гиперболическим углам.

Доказательство. Евклидовы углы между проходящими через точку  $e_0$  прямыми в карте  $U_0$  совпадают с гиперболическими углами между этими прямыми. Преобразование  $\mathcal{H} : B^n \rightarrow B_0^n$  переводит эти прямые в диаметры шара  $B_0^n$ , сохраняя евклидовы углы. Поскольку группа изометрий пространства  $\mathbb{L}_n$  позволяет перевести любую точку с парой отложенных от неё касательных векторов единичной длины в любую другую точку с парой отложенных от неё касательных векторов единичной длины с тем же самым гиперболическим углом между ними, эта группа транзитивно действует на парах геодезических, пересекающихся под заданным гиперболическим углом. Так как группа гиперболических изометрий действует на шаре  $B_0^n$  преобразованиями, сохраняющими евклидовы углы между геодезическими, и в центре шара гиперболические углы совпадают с евклидовыми, точно такое же совпадение имеет место и в любой другой точке.  $\square$

#### Пример 15.9 (гиперболические сферы в конформной модели $B_0^n$ )

Гиперболическая сфера<sup>1</sup> радиуса  $r$  с центром в точке  $p = e_0 + q \in B^n$ , где  $q \in e_0^\perp$ , состоит из

<sup>1</sup>См. прим. 15.5 на стр. 195.

точек  $x = e_0 + w \in B_n$ , где  $w \in e_0^\perp$ , удовлетворяющих уравнению<sup>1</sup>

$$(p, x)^2 - (p, p)(x, x) \operatorname{ch}^2 r = (1 - (q, w))^2 - (1 - \|q\|^2)(1 - \|w\|^2) \operatorname{ch}^2 r = 0, \quad (15-26)$$

где  $\|u\|^2 = -(u, u)$  означает евклидов скалярный квадрат вектора  $u \in e_0^\perp$ . Параллельная проекция на единичную сферу  $S^n$  вдоль вектора  $-e_0$  отображает такую точку  $x = w + e_0$  в точку  $x' = w + e_0 \cdot \sqrt{1 + \|w\|^2}$ , для которой в силу (15-26) выполняется равенство

$$(q - e_0 \cdot \sqrt{1 - \|q\|^2} \operatorname{ch} r, x') = (q, w) - \sqrt{(1 - \|q\|^2)(1 - \|w\|^2)} \operatorname{ch} r = 1.$$

Таким образом, проекция гиперболической сферы радиуса  $r$  с центром в точке  $p = e_0 + q \in B^n$  на единичную сферу  $S^n$  представляет собою евклидову сферу, которая высекается из  $S^n$  гиперплоскостью с уравнением  $(q - e_0 \cdot \sqrt{1 - \|q\|^2} \operatorname{ch} r, x) = 1$ . Поскольку стереографическая проекция переводит сферы в сферы, семейство гиперболических сфер с центром в данной точке  $a \in B_0^n$  выглядит в модели  $B_0^n$  как пучок евклидовых сфер, натянутый на двойную точку  $a$  и абсолютную сферу  $S^{n-1}$ .

ПРИМЕР 15.10 (ДИСК ПУАНКАРЕ)

Конформную модель плоскости Лобачевского  $\mathbb{L}_2$  в единичном круге  $B_0^2$  на евклидовой плоскости обычно называют *диск Пункаре*. Геодезические в этой модели изображаются диаметрами круга, а также дугами окружностей, пересекающих границу круга под прямым углом. Это ровно те окружности, инверсия относительно которых переводит диск в себя, и такие инверсии как раз и являются гиперболическими отражениями относительно геодезических. Гиперболические окружности с центром в точке  $a \in \mathbb{L}_2$  изображаются на диске Пуанкаре евклидовыми окружностями из пучка, натянутого на абсолют и двойную точку  $a$ . Каждая окружность этого пучка перпендикулярна всем проходящим через точку  $a$  геодезическим, т. е. проходящим через  $a$  евклидовым окружностям, перпендикулярным абсолюту. Орициклы также видны на диске Пуанкаре как окружности, касающиеся абсолютa. Любой треугольник с нулевыми углами и вершинами на абсолютe имеет площадь  $\pi$ , не смотря на то, что его стороны имеют бесконечную длину. Отражения в сторонах такого треугольника замащивают всю плоскость Лобачевского счётным множеством треугольников с попарно не пересекающимися внутренностями, конгруэнтных исходному треугольнику.

<sup>1</sup>См. формулу (15-15) на стр. 195.



### Ответы и указания к некоторым упражнениям

Упр. 15.1. Можно считать, что  $u \neq w$ . В силу выпуклости сферического конуса  $G_+ = \{v \in V \mid (v, v) > 0\}$  вектор  $u + w \in G_+$ , т. е. имеет  $(u + w, u + w) > 0$ . Так как векторы  $u + w$  и  $u - w$  ортогональны и порождают гиперболическую плоскость, скалярный квадрат  $(u - w, u - w) < 0$ . Поэтому  $2(u, w) > (u, u) + (w, w) \geq 0$ .

Упр. 15.3. Дифференцируя по  $t$  равенство  $1 = (w(t), w(t))$ , получаем  $0 = 2(w(t), \dot{w}(t))$ , ср. с упр. 10.4 на стр. 124.

Упр. 15.4. Без ограничения общности можно считать, что  $p_1 = e_1$ , а  $p_2 = e_1 \operatorname{ch} \ell + e_2 \operatorname{sh} \ell$ , где  $\ell = |p_1, p_2|$  — гиперболическое расстояние, как на рис. 15♦2 на стр. 190. Площадь искомого криволинейного треугольника равна разности площади прямоугольного треугольника с гипотенузой  $[0, p_2]$  и катетами  $\operatorname{ch} \ell, \operatorname{sh} \ell$ , которая равна  $\operatorname{sh} \ell \operatorname{ch} \ell / 2$ , и площади под дугой гиперболы  $x_1^2 - x_2^2 = 1$  над отрезком  $[1, \operatorname{ch} \ell]$  оси  $[0x_1]$ . Эта дуга параметризуется по форм. (15-7) на стр. 190:  $x_1 = \operatorname{ch} t, x_2 = \operatorname{sh} t$ , где  $t \in [0, \ell]$ , и площадь под нею равна

$$\int_1^{\operatorname{ch} \ell} x_2 dx_1 = \int_0^\ell \operatorname{sh} t d \operatorname{ch} t = \int_0^\ell \operatorname{sh}^2 t dt = \frac{1}{2} (\operatorname{sh} \ell \operatorname{ch} \ell - \ell),$$

ибо первообразная  $\int \operatorname{sh}^2 t = \frac{1}{2} (\operatorname{sh} t \operatorname{ch} t - t)$ . Тем самым,  $S = \ell / 2$ .

Упр. 15.5. В силу выпуклости сферического конуса  $G_+ = \{v \in V \mid (v, v) > 0\}$  вектор  $u + w \in G_+$  имеет  $(u + w, u + w) > 0$ . Так как векторы  $u + w$  и  $u - w$  ортогональны и порождают гиперболическую плоскость, скалярный квадрат  $(u - w, u - w) < 0$ .

Упр. 15.6. Если точка  $q$  принадлежит зеркалу отражения, переставляющего точки  $p_1$  и  $p_2$ , то  $|p_1, q| = |p_2, q|$ , откуда  $q \in (p_1^+ - p_2^+)^\perp$ . С другой стороны, отражение  $\sigma_{p_1^+ - p_2^+}$  переводит векторы  $p_1^+$  и  $p_2^+$  друг в друга.

Упр. 15.8. Квадрика  $S_p$  проходит через базисное множество  $P_p \cap G$  пучка  $P_p - \lambda G$ , а каждая проходящая через особую точку  $p$  квадрики  $S_{(p,p)}$  прямая либо больше нигде не пересекает эту квадрику, либо лежит на ней целиком. Поэтому квадрика  $S_{(p,p)}$  является линейным соединением точки  $p$  и неособой квадрики  $P_p \cap G$  в дополнительной к точке  $p$  гиперплоскости  $p^\perp$  (ср. с доказательством теор. 4.1 на стр. 45).

Упр. 15.10. Из гиперболической теоремы косинусов<sup>1</sup> для прямоугольного  $\Delta acb$  вытекают равенства  $\operatorname{ch} |a, c| = \operatorname{ch} |a, b| \cdot \operatorname{ch} |c, b| - \operatorname{sh} |a, b| \cdot \operatorname{sh} |c, b| \cdot \cos \beta$  и  $\operatorname{ch} |a, b| = \operatorname{ch} |a, c| \cdot \operatorname{ch} |c, b|$ . Подставляя второе из них в первое, заключаем, что  $\operatorname{ch} |a, c| = \cos \beta \cdot \operatorname{sh} |a, b| / \operatorname{sh} |c, b|$ , откуда

$$\frac{\sin \alpha}{\sqrt{1 - \ell^2}} = \frac{\sin \alpha}{\sqrt{1 - \operatorname{th}^2 |a, c|}} = \sin \alpha \cdot \operatorname{ch} |a, c| = \frac{\sin \alpha \cdot \cos \beta \cdot \operatorname{sh} |a, b|}{\operatorname{sh} |c, b|} = \cos \beta$$

(последнее равенство вытекает из теоремы синусов<sup>2</sup> для  $\Delta acb$ ).

Упр. 15.11. Если обозначить через  $w'$  параллельную проекцию точки  $w$  на сферу  $S^n$ , а через  $\alpha$  — угол между единичными векторами  $w'$  и  $e_0$ , то  $\varrho = \sin \alpha$ , а  $\varrho_0 = \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}$ , откуда сразу следуют обе формулы.

<sup>1</sup>См. формулу (15-12) на стр. 193.

<sup>2</sup>См. формулу (15-14) на стр. 193.