А. Л. Городенцев*

Г Е О М Е Т Р И Я

1-й курс, 2-й семестр

МатФак ВШЭ
2018/19 уч. год

* ВШЭ, НМУ, ИТЭФ, e-mail:gorod@itep.ru , http://gorod.bogomolov-lab.ru/

Оглавление

§1. Пространство с билинейной формой

1.1. Соглашения и обозначения. Мы рассматриваем конечномерное векторное пространство V над произвольным полем $\Bbbk$. Наборы $\boldsymbol{v} = (v_1, v_2, \dots, v_k)$ из векторов $v_j \in V$ удобно воспринимать как матрицы-строки, элементами которых являются векторы. Если векторы из набора $\boldsymbol{u} = (u_1, u_2, \dots, u_n)$ линейно выражаются через векторы из набора $\boldsymbol{w} = (w_1, w_2, \dots, w_m)$ по формулам $u_j = \sum_i w_i c_{ij} = w_1 c_{1j} + w_2 c_{2j} + \dots + w_m c_{mj}$, где $c_{ij} \in \Bbbk$, то мы записываем это в виде матричного равенства $\boldsymbol{u} = \boldsymbol{w}\, C_{\boldsymbol{wu}}$, где $C_{\boldsymbol{wu}} \in \mathrm{Mat}_{m\times n}(\Bbbk)$ — матрица высоты m и ширины k, в j-том столбце которой стоят коэффициенты разложения вектора u_j векторам $\boldsymbol{w}$. Мы называем матрицу $C_{\boldsymbol{wu}}$ *матрицей перехода* от векторов $\boldsymbol{u}$ к векторам $\boldsymbol{w}$.

Упражнение 1.1. Убедитесь, что если набор векторов $\boldsymbol{w}$ выражается через набор векторов $\boldsymbol{v}$ по формуле $\boldsymbol{w} = \boldsymbol{v}\, C_{\boldsymbol{vw}}$, а набор $\boldsymbol{v}$ выражается через набор $\boldsymbol{u}$ по формуле $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{u}\, C_{\boldsymbol{uv}}$, то $C_{\boldsymbol{uw}} = C_{\boldsymbol{uv}} C_{\boldsymbol{vw}}$.

Если задано линейное отображение $f : U \to W$ между векторными пространствами U и W, и векторы $\boldsymbol{u} = (u_1, u_2, \dots, u_n)$ образуют базис в U, а векторы $\boldsymbol{w} = (w_1, w_2, \dots, w_m)$ — базис в W, то матрица перехода от векторов $f(\boldsymbol{u}) = \big(f(u_1), f(u_1), \dots, f(u_n)\big)$ к векторам $\boldsymbol{w}$ называется *матрицей отображения* f в базисах $\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{w}$ и обозначается $F_{\boldsymbol{wu}}$. Её j-тый столбец состоит из координат вектора $f(u_j)$ в базисе $\boldsymbol{w}$. Таким образом, $f(\boldsymbol{u}) = \boldsymbol{w}\, F_{\boldsymbol{wu}}$. Вектор $v = \boldsymbol{u}x$ со столбцом координат x в базисе $\boldsymbol{u}$ переводится отображением f в вектор

$$f(v) = f(\boldsymbol{u}x) = f(\boldsymbol{u})\, x = \boldsymbol{w}\, F_{\boldsymbol{wu}}\, x$$

со столбцом координат $F_{\boldsymbol{wu}}\, x$ в базисе $\boldsymbol{w}$.

Двойственное к V пространство линейных функций $\varphi : V \to \Bbbk$ обозначается через V^*. Элементы этого пространства также называются *ковекторами*, *линейными формами* или *линейными функционалами* на V. Каждому базису $\boldsymbol{e} = (e_1, e_2, \dots, e_n)$ пространства V отвечает *двойственный базис* $\boldsymbol{e}^* = (e_1^*, e_2^*, \dots, e_n^*)$ пространства V^*. Линейная функция $e_i^* : V \to \Bbbk$ сопоставляет вектору $v \in V$ его i-тую координату в базисе $\boldsymbol{e}$ и действует на базисные векторы e_j по правилу

$$e_i^*(e_j) = \delta_{ij} \overset{\text{def}}{=} \begin{cases} 1 & \text{при } j = i \\ 0 & \text{при } j \neq i\,. \end{cases}$$

Упражнение 1.2. Убедитесь, i-тая координата произвольной линейной функции $\varphi : V \to \Bbbk$ в базисе $\boldsymbol{e}^*$ равна значению этой функции на базисном векторе e_i, т. е. $\varphi = \sum_i e_i^* \cdot \varphi(e_i)$.

Линейное отображение $V \to V^{**}$, $v \mapsto \mathrm{ev}_v$, сопоставляющее вектору $v \in V$ *функционал вычисления* $\mathrm{ev}_v : V^* \to \Bbbk$, $\varphi \mapsto \varphi(v)$, переводит любой базис $\boldsymbol{e}$ пространства V в двойственный к базису $\boldsymbol{e}^*$ в V^* базис пространства V^{**} и, стало быть, является изоморфизмом.

Для подпространств $U \subset V$ и $W \subset V^*$ мы обозначаем через $\mathrm{Ann}\, U \subset V^*$ и $\mathrm{Ann}\, W \subset V$ их *аннуляторы* $\mathrm{Ann}\, U \overset{\text{def}}{=} \{\varphi \in V^* \mid \forall u \in U \ \varphi(u) = 0\}$ и $\mathrm{Ann}\, W \overset{\text{def}}{=} \{v \in V \mid \forall \psi \in W \ \varphi(v) = 0\}$. Соответствие $U \mapsto \mathrm{Ann}\, U$ является инволютивной[1] биекцией между векторными подпространствами размерности k в V и векторными подпространствами размерности $\dim V - k$ в V^*. Эта

[1] Т. е. обратной самой себе. Это означает, что $\mathrm{Ann}\,\mathrm{Ann}\, U = U$ для любого векторного подпространства U как в V, так и в V^*.

биекция переводит суммы векторных подпространств в пересечения, а пересечения — в суммы[1].

1.2. Билинейные формы. Отображение $\beta : V\times V\to\Bbbk$ называется *билинейной формой* на пространстве V, если оно линейно по каждому из двух своих аргументов при фиксированном другом, т. е. удовлетворяет равенству

$$\beta(x_1u_1+x_2u_2, y_1w_1+y_2w_2)=\sum_{i,j=1}^{2}x_iy_j\beta(u_i,w_j) \tag{1-1}$$

при всех $u_1,u_2,w_1,w_2\in V$ и $x_1,x_2,y_1,y_2\in\Bbbk$.

Упражнение 1.3. Убедитесь, что билинейные формы образуют векторное подпространство в пространстве всех функций $V\times V\to\Bbbk$.

Если форма β на пространстве V зафиксирована, то её значение $\beta(u,w)\in\Bbbk$ на паре векторов $u,w\in V$ иногда бывает удобно записывать в виде *скалярного произведения* $u\cdot w$, принимающего значения в поле $\Bbbk$ и, вообще говоря, некоммутативного. Формула (1-1) утверждает, что это произведение дистрибутивно по отношению к линейным комбинациям векторов, т. е. подчиняется стандартным правилам раскрытия скобок.

1.2.1. Матрицы Грама. С любыми двумя наборами векторов

$$\boldsymbol{u}=(u_1,u_2,\dots,u_n)\quad\text{и}\quad\boldsymbol{w}=(w_1,w_2,\dots,w_m),\quad\text{где}\quad u_i,w_j\in V\,,$$

связана матрица их попарных скалярных произведений $B_{\boldsymbol{uw}}\overset{\text{def}}{=}\boldsymbol{u}^t\cdot\boldsymbol{w}\in\mathrm{Mat}_{n\times m}(\Bbbk)$ с элементами $b_{ij}=v_i\cdot w_j=\beta(u_i,w_j)$. Она называется *матрицей Грама* наборов $\boldsymbol{u},\boldsymbol{w}$ и формы β. Когда наборы совпадают: $\boldsymbol{u}=\boldsymbol{w}$, мы пишем просто $B_{\boldsymbol{u}}$ вместо $B_{\boldsymbol{uu}}$. В этом случае $\det B_{\boldsymbol{u}}\in\Bbbk$ называется *определителем Грама* формы β и набора векторов $\boldsymbol{u}$.

Если наборы векторов $\boldsymbol{u}$ и $\boldsymbol{w}$ линейно выражаются через наборы $\boldsymbol{e}$ и $\boldsymbol{f}$ по формулам $\boldsymbol{u}=\boldsymbol{e}\,C_{\boldsymbol{eu}}$ и $\boldsymbol{w}=\boldsymbol{f}\,C_{\boldsymbol{fw}}$, то $B_{\boldsymbol{uw}}=\boldsymbol{u}^t\boldsymbol{w}=\left(\boldsymbol{e}C_{\boldsymbol{eu}}\right)^t\left(\boldsymbol{f}C_{\boldsymbol{fw}}\right)=C^t_{\boldsymbol{eu}}\boldsymbol{e}^t\boldsymbol{f}C_{\boldsymbol{fw}}=C^t_{\boldsymbol{eu}}B_{\boldsymbol{ef}}C_{\boldsymbol{fw}}$. В частности, если $\boldsymbol{u}=\boldsymbol{w}\,C_{\boldsymbol{wu}}$, то

$$B_{\boldsymbol{u}}=C^t_{\boldsymbol{wu}}B_{\boldsymbol{w}}C_{\boldsymbol{wu}}\,. \tag{1-2}$$

Если векторы $\boldsymbol{e}=(e_1,e_2,\dots,e_n)$ образуют базис в V, то скалярное произведение $\beta(u,w)$ любых двух векторов $u=\boldsymbol{e}\,x$ и $w=\boldsymbol{e}\,y$ однозначно выражается через столбцы x, y их координат в базисе $\boldsymbol{e}$ по формуле

$$u\cdot w=u^t\cdot w=x^t\boldsymbol{e}^t\cdot\boldsymbol{e}y=x^tB_{\boldsymbol{e}}y\,. \tag{1-3}$$

Поскольку любая квадратная матрица $B_{\boldsymbol{e}}\in\mathrm{Mat}_n(\Bbbk)$ задаёт по этой формуле билинейную форму на пространстве V, сопоставление билинейной форме её матрицы Грама в произвольно зафиксированном базисе устанавливает биекцию между пространством билинейных форм на n-мерном векторном пространстве V и пространством матриц размера $n\times n$.

Упражнение 1.4. Убедитесь, что эта биекция линейна.

[1] Доказательство всех этих фактов см. в лекции http://gorod.bogomolov-lab.ru/ps/stud/geom_ru/1617/lec_04.pdf, раздел 4.4.3, стр. 64.

1.2.2. Корреляции. Задание билинейной формы $\beta : V \times V \to \Bbbk$ эквивалентно заданию линейного отображения

$$\beta^\wedge : V \to V^* , \quad v \mapsto \beta(\,*\,, v)\,, \tag{1-4}$$

переводящего вектор $v \in V$ в линейную форму $u \mapsto \beta(u, v)$ на пространстве V, задаваемую правым скалярным умножением векторов из V на v. Линейное отображение (1-4) называется *правой корреляцией* билинейной формы β. Форма β однозначно восстанавливается из корреляции по формуле $\beta(u, w) = \beta^\wedge(w)\,u$. Если зафиксировать в пространствах V и V^* двойственные базисы $\boldsymbol{e} = (e_1, e_2, \dots , e_n)$ и $\boldsymbol{e}^* = (e_1^*, e_2^*, \dots , e_n^*)$, то матрица отображения $\beta^\wedge$ в этих базисах совпадёт с матрицей Грама формы β в базисе $\boldsymbol{e}$: $B^\wedge_{\boldsymbol{e}^* \boldsymbol{e}} = B_{\boldsymbol{e}}$.

Упражнение 1.5. Убедитесь в этом!

Таким образом, сопоставление билинейной форме β её правой корреляции $\beta^\wedge$ устанавливает изоморфизм пространства билинейных форм на V с пространством линейных отображений из V в V^*. Симметричным образом, задание билинейной формы $\beta : V \times V \to \Bbbk$ эквивалентно заданию *левой корреляции*

$$^\wedge\beta : V \to V^* , \quad v \mapsto \beta(v, *)\,, \tag{1-5}$$

переводящей вектор $v \in V$ в линейную форму левого скалярного умножения векторов из V на v: $u \mapsto v \cdot u = \beta(u, v)$.

Упражнение 1.6. Убедитесь в том, что матрица левой корреляции в двойственных базисах $\boldsymbol{e}$ и $\boldsymbol{e}^*$ пространств V и V^* равна $B^t_{\boldsymbol{e}}$, и что левая корреляция билинейной формы β является правой корреляцией *транспонированной формы* $\beta^t(u, w) \overset{\text{def}}{=} \beta(w, u)$.

1.2.3. Ядра, ранг и коранг. Векторные пространства

$$\begin{aligned} V^\perp &= \ker \beta^\wedge = \{u \in V \mid \forall v \in V\ \beta(v, u) = 0\} \\ {}^\perp V &= \ker {}^\wedge\beta = \{u \in V \mid \forall v \in V\ \beta(u, v) = 0\} \end{aligned} \tag{1-6}$$

называются, соответственно, *правым* и *левым* ядром билинейной формы β. Вообще говоря, $V^\perp \neq {}^\perp V$, если форма β не является симметричной или кососимметричной. Однако

$$\dim V^\perp = \dim {}^\perp V\,.$$

В самом деле, $\dim \ker \beta^\wedge = \dim V - \dim \operatorname{im} \beta^\wedge$, $\dim \ker {}^\wedge\beta = \dim V - \dim \operatorname{im} {}^\wedge\beta$, и размерности образов операторов $\beta^\wedge$, ${}^\wedge\beta$ равны рангам их матриц в каких-либо двойственных друг другу базисах $\boldsymbol{e}$, $\boldsymbol{e}^*$ пространств V и V^*. Так как эти матрицы транспонированы друг другу по упр. 1.6, они имеют одинаковый ранг, равный рангу матрицы Грама $B_{\boldsymbol{e}}$ базиса $\boldsymbol{e}$ по упр. 1.5. Итак, оба пространства в (1-6) имеют размерность $\dim V - \operatorname{rk} B_{\boldsymbol{e}}$. Это число называется *корангом* билинейной формы β и обозначается $\operatorname{cork} \beta$. Ранг матрицы Грама, равный размерности образа каждой из корреляций, не зависит от выбора базиса и называется *рангом* билинейной формы β и обозначается $\operatorname{rk} \beta$.

1.2.4. Изометрии. Линейное отображение $f : V_1 \to V_2$ между векторными пространствами V_1 и V_2, на которых заданы билинейные формы β_1 и β_2, называется *изометрическим*[1], если для любых векторов $u, w \in V_1$ выполняется равенство $\beta_1(u, w) = \beta_2\big(f(v), f(w)\big)$. Билинейные формы β_1 и β_2 называются *изоморфными*, если между пространствами V_1 и V_2 имеется изометрический линейный изоморфизм.

[1] Или *гомоморфизмом* пространств с билинейными формами.

1.3. Невырожденные формы. Билинейная форма β называется *невырожденной*[1], если она удовлетворяет условиям следующего ниже предл. 1.1. Формы, не удовлетворяющие этим условиям, называются *вырожденными* или *особыми*.

Предложение 1.1 (критерии невырожденности)
Следующие свойства билинейной формы β на конечномерном векторном пространстве V равносильны друг другу:

1) в V существует базис с ненулевым определителем Грама
2) любой базис в V имеет ненулевой определитель Грама
3) левая корреляция ${}^\wedge\beta : V \xrightarrow{\sim} V^*$ является изоморфизмом
4) правая корреляция $\beta^\wedge : V \xrightarrow{\sim} V^*$ является изоморфизмом
5) для любого ненулевого вектора $v \in V$ существует такой вектор $u \in V$, что $\beta(v, u) \neq 0$
6) для любого ненулевого вектора $v \in V$ существует такой вектор $u \in V$, что $\beta(u, v) \neq 0$
7) для любой линейной функции $\varphi : V \to \Bbbk$ существует такой вектор $v \in V$, что $\varphi(u) = \beta(v, u)$ для всех $u \in V$
8) для любой линейной функции $\varphi : V \to \Bbbk$ существует такой вектор $v \in V$, что $\varphi(u) = \beta(u, v)$ для всех $u \in V$

причём при выполнении этих условий вектор v в последних двух пунктах определяется формой φ однозначно.

Доказательство. Поскольку $\dim V = \dim V^*$, биективность, инъективность и сюрьективность линейного отображения $V \to V^*$ равносильны друг другу и тому, что это отображение задаётся невырожденной матрицей в каких-нибудь базисах. Поэтому условия (3), (5), (7) и условия (4), (6), (8), утверждающие, соответственно, биективность, обращение в нуль ядра и сюрьективность для операторов ${}^\wedge\beta$ и $\beta^\wedge$, равносильны между собой и условию (1), означающему, что транспонированные друг другу матрицы этих операторов обратимы. Условие (1) равносильно условию (2) в силу форм. (1-2) на стр. 4, из которой вытекает, что определители Грама двух базисов $\boldsymbol{e}$ и $\boldsymbol{f}$ связаны друг с другом по формуле $\det B_{\boldsymbol{e}} = \det_{\boldsymbol{f}} \cdot \det^2 C_{\boldsymbol{fe}}$, где $C_{\boldsymbol{fe}}$ — матрица перехода[2] от базиса $\boldsymbol{e}$ к базису $\boldsymbol{f}$. □

Пример 1.1 (евклидова форма)
Симметричная билинейная форма на координатном пространстве $\Bbbk^n$ с единичной матрицей Грама E в стандартном базисе называется *евклидовой*. Над полем $\Bbbk = \mathbb{R}$ она задаёт евклидову структуру на пространстве $\mathbb{R}^n$. Евклидова форма невырождена. Однако над отличными от $\mathbb{R}$ полями её свойства могут отличаться от интуитивно привычных свойств евклидовой структуры. Например, над полем $\mathbb{C}$ ненулевой вектор $e_1 - ie_2 \in \mathbb{C}^2$ имеет нулевой скалярный квадрат.

Упражнение 1.7. Приведите пример n-мерного подпространства в $\mathbb{C}^{2n}$, на которое евклидова форма ограничивается в тождественно нулевую форму.

[1] А также *неособой* или *регулярной*.
[2] См. n° 1.1 на стр. 3.

Базисы, в которых матрица Грама евклидовой формы равна E называются *ортонормальными*. Ниже[1] мы увидим, что над алгебраически замкнутым полем $\Bbbk$ характеристики $\operatorname{char}\Bbbk \neq 2$ любая невырожденная симметричная билинейная форма изометрически изоморфна евклидовой.

Пример 1.2 (гиперболическая форма)
Симметричная билинейная форма h на чётномерном координатном пространстве $\Bbbk^{2n}$, матрица Грама которой в стандартном базисе равна

$$H = \begin{pmatrix} 0 & E \\ E & 0 \end{pmatrix}, \tag{1-7}$$

где E — единичная матрица размера $n \times n$, называется *гиперболической*. Она невырождена и над алгебраически замкнутым полем изометрически изоморфна евклидовой форме: ортонормальный базис гиперболической формы состоит из векторов

$$\varepsilon_{2\nu-1} = \left(e_\nu - e_{n+\nu}\right) / \sqrt{-2} \quad \text{и} \quad \varepsilon_{2\nu} = \left(e_\nu + e_{n+\nu}\right) / \sqrt{2}\,, \quad 1 \leqslant \nu \leqslant n\,.$$

Над полями $\mathbb{R}$ и $\mathbb{Q}$ гиперболическая форма не изоморфна евклидовой, поскольку евклидовы скалярные квадраты всех ненулевых векторов положительны, тогда как ограничение гиперболической формы на линейную оболочку первых n базисных векторов тождественно нулевое. Базис, в котором матрица Грама гиперболической формы имеет вид (1-7), называется *гиперболическим базисом*.

Пример 1.3 (симплектическая форма)
Кососимметричная форма на чётномерном координатном пространстве $\Bbbk^{2n}$, матрица Грама которой в стандартном базисе равна

$$J = \begin{pmatrix} 0 & E \\ -E & 0 \end{pmatrix}, \tag{1-8}$$

где E — единичная матрица размера $n \times n$, называется *симплектической*. Матрица J вида (3-1) называется *симплектической единицей*. Она имеет $J^2 = -E$ и $\det J = 1$. Таким образом, симплектическая форма невырождена. Базис, в котором матрица Грама кососимметричной формы равна J, называется *симплектическим базисом*. Ниже[2] мы покажем, что над *любым* полем $\Bbbk$ характеристики $\operatorname{char}\Bbbk \neq 2$ всякая невырожденная симметричная билинейная форма изометрически изоморфна симплектической. Это означает, в частности, что размерность пространства с невырожденной кососимметричной формой обязательно чётна.

Упражнение 1.8. Убедитесь в том, что все кососимметричные квадратные матрицы нечётного размера вырождены.

1.3.1. Левый и правый двойственный базис. Если билинейная форма β на пространстве V невырождена, то у любого базиса $\boldsymbol{e} = (e_1, e_2, \dots, e_n)$ в V есть *правый* и *левый* двойственные базисы $\boldsymbol{e}^\vee = (e_1^\vee, e_2^\vee, \dots, e_n^\vee)$ и ${}^\vee\boldsymbol{e} = ({}^\vee e_1, {}^\vee e_2, \dots, {}^\vee e_n)$, состоящие из прообразов векторов двойственного к $\boldsymbol{e}$ базиса $\boldsymbol{e}^* = (e_1^*, e_2^*, \dots, e_n^*)$ в V^* относительно правой и левой корреляций соответственно. Они однозначно характеризуются соотношениями ортогональности

$$\beta\left(e_i, e_j^\vee\right) = \beta\left({}^\vee e_i, e_j\right) = \delta_{ij}\,, \tag{1-9}$$

[1] См. сл. 1.1 на стр. 12.
[2] См. теор. 1.2 на стр. 12.

которые на матричном языке имеют вид $B_{\boldsymbol{e}\boldsymbol{e}^\vee} = B_{{}^\vee\boldsymbol{e}\boldsymbol{e}} = E$. Так как по формулам из n° 1.2.1

$$E = B_{\boldsymbol{e}\boldsymbol{e}^\vee} = B_{\boldsymbol{e}} C_{\boldsymbol{e}^\vee\boldsymbol{e}} \quad \text{и} \quad E = B_{{}^\vee\boldsymbol{e}\boldsymbol{e}} = C^t_{{}^\vee\boldsymbol{e}\boldsymbol{e}} B_{\boldsymbol{e}}\,,$$

матрицы перехода от базисов $\boldsymbol{e}^\vee$ и ${}^\vee\boldsymbol{e}$ к базису $\boldsymbol{e}$ обратны, соответственно, матрице Грама базиса $\boldsymbol{e}$ и транспонированной к ней матрице: $\boldsymbol{e}^\vee = \boldsymbol{e}\, B_{\boldsymbol{e}}^{-1}$ и ${}^\vee\boldsymbol{e} = \boldsymbol{e}\, B_{\boldsymbol{e}}^{-1\,t}$.

Знание двойственных к $\boldsymbol{e}$ базисов позволяет раскладывать произвольный вектор $v \in V$ по базису $\boldsymbol{e}$ в виде

$$v = \sum_i \beta\left({}^\vee e_i, v\right)\, e_\nu = \sum_i \beta\left(v, e_i^\vee\right)\, e_\nu\,. \tag{1-10}$$

Упражнение 1.9. Убедитесь в этом!

1.3.2. Изотропные подпространства. Подпространство $U \subset V$ называется *изотропным* для билинейной формы β, если эта форма ограничивается на него в тождественно нулевую форму, т. е. когда $\beta(u, w) = 0$ для всех $u, w \in U$. Например, каждое одномерное подпространство является изотропным для любой кососимметричной формы, а линейные оболочки первых n и последних n базисных векторов пространства $\Bbbk^{2n}$ изотропны для гиперболической формы из прим. 1.2 и симплектической формы из прим. 1.3.

Предложение 1.2

Размерность изотропного подпространства невырожденной билинейной формы на пространстве V не превосходит $\dim V/2$.

Доказательство. Изотропность подпространства $U \subset V$ означает, что корреляция $\beta^\wedge : V \xrightarrow{\sim} V^*$ отображает U внутрь $\operatorname{Ann} U \subset V^*$. Так как корреляция невырожденной формы инъективна, $\dim U \leqslant \dim \operatorname{Ann} U = \dim V - \dim U$, откуда $2\dim U \leqslant \dim V$. □

Замечание 1.1. Примеры гиперболической и симплектической форм показывают, что оценка из предл. 1.2 в общем случае неулучшаема.

1.3.3. Группа изометрий. Линейный оператор $f : V \to V$ является изометрией[1] билинейной формы β если и только если для произвольного базиса $\boldsymbol{e}$ в V набор векторов $f(\boldsymbol{e}) = \boldsymbol{e}\, F_{\boldsymbol{e}}$ имеет ту же матрицу Грама $B_{f(\boldsymbol{e})} = f(\boldsymbol{e})^t \cdot \boldsymbol{e}$, что и базис $\boldsymbol{e}$, т. е.

$$F^t_{\boldsymbol{e}} B_{\boldsymbol{e}} F_{\boldsymbol{e}} = B_{\boldsymbol{e}}\,. \tag{1-11}$$

Если форма β невырождена, то беря определители обеих частей, получаем $\det^2 F_{\boldsymbol{e}} = 1$, откуда $\det^2 F_{\boldsymbol{e}} = \pm 1$. Поэтому любая изометрия конечномерного пространства с невырожденной билинейной формой обратима. Так как композиция изометрий и обратное к изометрии отображение тоже являются изометриями, изометрические преобразования пространства V образуют группу. Она обозначается $\mathrm{O}_\beta(V)$ и называется *группой изометрий*[2] невырожденной билинейной формы β. Изометрии определителя 1 называются *специальными* и образуют в группе всех изометрий подгруппу, обозначаемую $\mathrm{SO}_\beta(V)$.

Из равенства (1-11) вытекает, что обратная к изометрии f изометрия имеет матрицу

$$F_{\boldsymbol{e}}^{-1} = B_{\boldsymbol{e}}^{-1} F^t_{\boldsymbol{e}} B_{\boldsymbol{e}}\,. \tag{1-12}$$

[1] См. n° 1.2.4 на стр. 5.

[2] А также *ортогональной группой* или *группой автоморфизмов*.

Пример 1.4 (изометрии вещественной гиперболической плоскости)
Оператор $f : H_2 \to H_2$, имеющий в стандартном гиперболическом базисе $e_1, e_2 \in H_2$ матрицу

$$F = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} ,$$

является изометрическим тогда и только тогда, когда

$$\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} ,$$

что равносильно уравнениям $ac = bd = 0$ и $ad + bc = 1$, имеющим два семейства решений:

$$F_\lambda = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda^{-1} \end{pmatrix} \quad \text{и} \quad \tilde{F}_\lambda = \begin{pmatrix} 0 & \lambda \\ \lambda^{-1} & 0 \end{pmatrix} , \quad \text{где } \lambda \in \Bbbk^* = \Bbbk \smallsetminus \{0\}. \tag{1-13}$$

Над полем $\mathbb{R}$ оператор F_λ является собственным, и при $\lambda > 0$ называется *гиперболическим поворотом*, т. к. каждый вектор $v = (x, y)$, обе координаты которого ненулевые, движется при действии на него операторов F_λ с $\lambda \in (0, \infty)$ по гиперболе $xy = \text{const}$. Если положить $\lambda = e^t$ и перейти к ортогональному базису из векторов $p = (e_1 + e_2) / \sqrt{2}$, $q = (e_1 - e_2) / \sqrt{2}$, то оператор F_λ запишется в нём матрицей, похожей на матрицу евклидова поворота

$$\begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} e^t & 0 \\ 0 & e^{-t} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \operatorname{ch} t & \operatorname{sh} t \\ \operatorname{sh} t & \operatorname{ch} t \end{pmatrix} ,$$

где $\operatorname{ch} t \overset{\text{def}}{=} (e^t + e^{-t})/2$ и $\operatorname{sh} t \overset{\text{def}}{=} (e^t - e^{-t})/2$ называются *гиперболическими косинусом* и *синусом* вещественного числа t. Оператор F_λ с $\lambda < 0$ является композицией гиперболического поворота и центральной симметрии. Несобственный оператор $\widetilde{F}_\lambda$ является композицией гиперболического поворота с отражением относительно пересекающей ветви оси гиперболы.

1.3.4. Биекция между формами и операторами. На пространстве V с билинейной формой $\beta : V \times V \to \Bbbk$ каждому линейному оператору $f : V \to V$ можно сопоставить билинейную форму $\beta_f(u, w) \overset{\text{def}}{=} \beta(u, fw)$ с матрицей Грама $\boldsymbol{e}^t \cdot f(\boldsymbol{e}) = \boldsymbol{e}^t \cdot \boldsymbol{e} F_{\boldsymbol{e}} = B_{\boldsymbol{e}} F_{\boldsymbol{e}}$ в произвольно выбранном базисе $\boldsymbol{e}$ пространства V. Поскольку на языке матриц отображение $f \mapsto \beta_f$ заключается в левом умножении матрицы оператора на матрицу Грама: $F_{\boldsymbol{e}} \mapsto B_{\boldsymbol{e}} F_{\boldsymbol{e}}$, оно линейно и обратимо, если форма β невырождена. Обратное отображение задаётся умножением матрицы оператора слева на обратную к матрице Грама матрицу. Поэтому каждая билинейная форма $\chi : V \times V \to \Bbbk$ на конечномерном векторном пространстве V с фиксированной невырожденной билинейной формой β имеет вид $\chi(u, w) = \beta(u, f_\chi w)$ для некоторого линейного оператора $f_\chi : V \to V$, однозначно определяемого формой χ. Матрица $F_{\boldsymbol{e}}$ оператора f_χ в произвольном базисе $\boldsymbol{e}$ пространства V выражается через матрицы Грама $B_{\boldsymbol{e}}$ и $X_{\boldsymbol{e}}$ форм β и χ в том же базисе по формуле $F_{\boldsymbol{e}} = B_{\boldsymbol{e}}^{-1} X_{\boldsymbol{e}}$.

Пример 1.5 (канонический оператор)
Биекция между формами и операторами сопоставляет транспонированной к β билинейной форме $\beta^t(u, w) \overset{\text{def}}{=} \beta(w, u)$ оператор $\varkappa : V \to V$, который называется *каноническим оператором* невырожденной билинейной формы β. Он однозначно характеризуется свойством

$$\forall\, u, w \in V \quad \beta(w, u) = \beta(u, \varkappa w) , \tag{1-14}$$

а его матрица K_e в произвольном базисе $\boldsymbol{e}$ пространства V выражается через матрицу Грама B_e формы β по формуле $K_e = B_e^{-1}B_e^t$.

Упражнение 1.10. Убедитесь, что при замене матрицы Грама по правилу $B \mapsto C^tBC$, где $C \in \in \mathrm{GL}_n(\Bbbk)$, матрица $K = B^{-1}B^t$ меняется по правилу $K \mapsto C^{-1}KC$, т. е. канонические операторы изоморфных билинейных форм подобны.

Так как $\beta(u,w) = \beta(w,\varkappa u) = \beta(\varkappa u, \varkappa w)$ для всех $u,w \in V$, канонический оператор является изометрическим.

1.4. Ортогоналы и ортогональные проекции. С каждым подпространством U векторного пространства V с билинейной формой $\beta : V \times V \to \Bbbk$ связаны *левый* и *правый ортогоналы*

$$\begin{aligned} {}^{\perp}U &= \{v \in V \mid \forall u \in U\ \beta(v,u) = 0\}\,,\\ U^{\perp} &= \{v \in V \mid \forall u \in U\ \beta(u,v) = 0\}\,. \end{aligned} \tag{1-15}$$

Вообще говоря, это два разных подпространства в V.

Предложение 1.3

Если билинейная форма β на конечномерном пространстве V невырождена, то для всех подпространств $U \subset V$ выполняются равенства

$$\dim {}^{\perp}U = \dim V - \dim U = \dim U^{\perp} \quad \text{и} \quad ({}^{\perp}U)^{\perp} = U = {}^{\perp}(U^{\perp})\,.$$

Доказательство. Первые два равенства верны, так как ортогоналы (1-15) суть прообразы подпространства $\operatorname{Ann} U \subset V^*$ при изоморфизмах ${}^{\wedge}\beta, \beta^{\wedge} : V \xrightarrow{\sim} V^*$, и $\dim \operatorname{Ann} U = \dim V - \dim U$. Вторые два равенства вытекают из первых, поскольку оба подпространства $({}^{\perp}U)^{\perp}$ и ${}^{\perp}(U^{\perp})$ содержат U и имеют размерность $\dim U$. □

Предложение 1.4

Пусть билинейная форма β на произвольном[1] векторном пространстве V ограничивается на конечномерное подпространство $U \subset V$ в невырожденную на этом подпространстве форму. Тогда $V = U \oplus U^{\perp}$, и проекция $v_U \in U$ каждого вектора $v \in V$ на подпространство U вдоль $U^{\perp}$ однозначно определяется тем, что $\beta(u,v) = \beta(u,v_U)$ для всех $u \in U$. Вектор v_U выражается через произвольный базис $\boldsymbol{u} = (u_1, u_2, \dots, u_n)$ пространства U по формуле

$$v_U = \sum_{i=1}^{n} \beta\left({}^{\vee}u_i, v\right)\, u_i\,, \tag{1-16}$$

где ${}^{\vee}\boldsymbol{u} = ({}^{\vee}u_1, {}^{\vee}u_2, \dots, {}^{\vee}u_n)$ — левый двойственный к $\boldsymbol{u}$ относительно формы β базис в U.

Доказательство. Так как ограничение формы β на U невырождено, для любого вектора $v \in V$ существует единственный такой вектор $v_U \in U$, что линейная функция $u \mapsto \beta(u,v)$ на пространстве U задаётся правым скалярным умножением векторов из U на этот вектор v_U, т. е. для всех $u \in U$ выполняется равенство $\beta(u,v) = \beta(u,v_U)$. Поэтому разность $v - v_U \in U^{\perp}$. Таким образом, каждый вектор $v \in V$ представляется в виде суммы $v = v_U + (v - v_U)$ с $v \in U$ и $v - v_U \in U^{\perp}$. Поскольку в любом разложения $v = v'_U + w$ с $v'_U \in U$ и $w \in U^{\perp}$ для всех $u \in U$ выполняется равенство $\beta(u,v) = \beta(u,v'_U)$, имеем равенство $v'_U = v_U$, а значит и равенство

[1] Возможно даже бесконечномерном.

$w = v - v'_U = v - v_U$, что доказывает первые два утверждения предложения. Последнее утверждение вытекает из форм. (1-10) на стр. 8: $v_U = \sum_i \beta({}^\vee u_i, v_U)\,u_i = \sum_i \beta({}^\vee u_i, v)\,u_i$. □

Упражнение 1.11. Докажите симметричное утверждение: $V = {}^\perp U \oplus U$, где проекция ${}_U v$ каждого вектора $v \in V$ на U вдоль ${}^\perp U$ находится по формуле ${}_U v = \sum \beta\left(v, u_i^\vee\right)\, u_i$ и однозначно определяется тем, что $\beta(v, u) = \beta({}_U v, u)$ для всех $u \in U$.

1.5. Симметричные и кососимметричные формы. Билинейная форма β называется *симметричной*, если $\beta(u, w) = \beta(w, u)$ для всех $u, w \in V$, и *кососимметричной* — если $\beta(v, v) = 0$ для всех $v \in V$. В последнем случае для любых $u, w \in V$ выполняется равенство

$$0 = \beta(u + w, u + w) = \beta(u, w) + \beta(w, u)\,,$$

откуда $\beta(u, w) = -\beta(w, u)$.

Упражнение 1.12. Убедитесь, что над полем характеристики $\operatorname{char}\Bbbk \neq 2$ равенство $\beta(u, w) = -\beta(w, u)$ всех $u, w \in V$ равносильно равенству $\beta(v, v) = 0$ для всех $v \in V$. Убедитесь также, что формы $\beta(u, w)$ и $\beta^t(u, w) = \beta(w, u)$ пропорциональны ровно в двух случаях: когда $\beta^t = \pm\beta$.

Если $\operatorname{char}\Bbbk = 2$, каждая кососимметричная форма автоматически симметрична, но не наоборот. Если $\operatorname{char}\Bbbk \neq 2$, пространства симметричных и кососимметричных билинейных форм имеют нулевое пересечение, и каждая билинейная форма β однозначно раскладывается в сумму

$$\beta = \beta_+ + \beta_-$$

симметричной и кососимметричной форм

$$\beta_+(v, w) = \frac{\beta(v, w) + \beta(w, v)}{2} \quad \text{и} \quad \beta_-(v, w) = \frac{\beta(v, w) - \beta(w, v)}{2}\,.$$

Левая и правая корреляции симметричной билинейной формы совпадают друг с другом, и мы будем обозначать этот оператор через $\widehat{\beta} \stackrel{\text{def}}{=} \beta^\wedge = {}^\wedge\beta : V \to V^*$ и называть просто *корреляцией*. Напомню, корреляция переводит вектор $v \in V$, в линейную функцию

$$\widehat{\beta}(v) : V \to \Bbbk\,, \quad u \mapsto \beta(u, v) = \beta(v, u)\,.$$

Для кососимметричной формы β мы полагаем $\widehat{\beta} \stackrel{\text{def}}{=} \beta^\wedge = -{}^\wedge\beta$.

1.5.1. Ортогоналы и проекции. Если форма β на пространстве V (косо) симметрична, то левый и правый ортогоналы к любому подпространству $U \subset V$ совпадают друг с другом и обозначаются через $U^\perp$. Если (косо) симметричная форма β ограничивается на подпространство $U \subset V$ в невырожденную на этом подпространстве форму, то $V = U \oplus U^\perp$ по предл. 1.4. В этом случае подпространство $U^\perp$ называется *ортогональным дополнением* к подпространству U. Проекция v_U вектора $v \in V$ на U вдоль $U^\perp$ называется *ортогональной проекцией* на U относительно формы β. Вектор v_U однозначно характеризуется тем, что его левое и правое скалярное произведение со всеми векторами из U такие же, как и у вектора v.

Если форма β невырождена на всём пространстве V, то $\dim U^\perp = \dim V - \dim U$ и $U^{\perp\perp} = U$ для всех подпространств $U \subset V$ по предл. 1.4. В этом случае ограничение формы β на подпространство $U \subset V$ невырождено тогда и только тогда, когда невырождено её ограничение на $U^\perp$.

Теорема 1.1 (теорема Лагранжа)

Каждое конечномерное векторное пространство с симметричной билинейной формой β над любым полем $\Bbbk$ характеристики $\operatorname{char}\Bbbk \neq 2$ обладает базисом с диагональной матрицей Грама[1].

[1] Такие базисы называются *ортогональными*.

Доказательство. Если $\dim V = 1$ или форма β нулевая, то матрица Грама любого базиса диагональна. Если форма β ненулевая, то найдётся вектор $e \in V$ с $\beta(e,e) \neq 0$, ибо в противном случае $2\beta(u,w) = \beta(u+w,u+w) - \beta(u,u) - \beta(w,w)) = 0$ для всех $u,w \in V$. Возьмём такой вектор e в качестве первого вектора искомого базиса. Поскольку ограничение формы β на одномерное подпространство $U = \Bbbk \cdot e$ невырождено, пространство V распадается в прямую ортогональную сумму $U \oplus U^\perp$. По индукции, в $U^\perp$ есть базис с диагональной матрицей Грама. Добавляя к нему e, получаем искомый базис в V. □

Пример 1.6 (ортогональный базис гиперболического пространства)
В гиперболическом пространстве[1] $\Bbbk^{2n}$ с гиперболическим базисом $(e_1, \dots, e_n, e_{n+1}, \dots, e_{2n})$ над произвольным полем $\Bbbk$ характеристики $\mathrm{char}(\Bbbk) \neq 2$ в качестве ортогонального базиса можно, например, взять векторы $p_i = e_i + e_{n+i}$ и $q_i = e_i - e_{n+i}$ со скалярными квадратами $h(p_i,p_i) = 2$ и $h(q_i,q_i) = -2$.

Следствие 1.1
Над алгебраически замкнутым полем $\Bbbk$ характеристики $\mathrm{char}(\Bbbk) \neq 2$ две симметричных билинейных формы изометрически изоморфны если и только если их матрицы Грама имеют одинаковый ранг.

Доказательство. Над алгебраически замкнутым полем каждый ненулевой диагональный элемент матрицы Грама ортогонального базиса можно сделать единичным, заменив соответствующий ему базисный вектор e_i на $e_i \,/\, \sqrt{\beta(e_i,e_i)}$. □

Теорема 1.2 (теорема Дарбу)
Над произвольным полем $\Bbbk$ любой характеристики всякое конечномерное векторное пространство V с невырожденной кососимметричной билинейной формой ω изометрически изоморфно симплектическому пространству[2]. В частности, размерность пространства V чётна.

Доказательство. Для начала построим в V базис, матрица Грама которого состоит из расположенных на главной диагонали 2×2-блоков вида

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}. \tag{1-17}$$

В качестве первого базисного вектора возьмём произвольный ненулевой вектор $e_1 \in V$. Так как форма ω невырождена, найдётся такой вектор $w \in V$, что $\omega(e_1,w) = a \neq 0$. Положим $e_2 = w/a$. Поскольку $\omega(e_1,e_1) = 0$, векторы e_1 и e_2 не пропорциональны и порождают двумерное подпространство $U \subset V$. Матрица Грама ограничения формы ω на это подпространство в базисе (e_1, e_2) имеет вид (1-17). Так как ограничение формы ω на U невырождено, $V = U \oplus U^\perp$ и ограничение формы ω на $U^\perp$ тоже невырождено. Индукция по $\dim V$ позволяет считать, что в подпространстве $U^\perp$ требуемый базис уже имеется. Добавляя к нему e_1, e_2, получаем искомый базис $e_1, e_2, \dots, e_{2k-1}, e_{2k}$ в $V = U \oplus U^\perp$. Симплектический базис формы ω получается из построенного перестановкой векторов: сначала надо написать подряд все векторы с нечётными номерами, а потом — с чётными. □

[1] См. прим. 1.2 на стр. 7.
[2] См. прим. 1.3 на стр. 7.

1.5.2. Ядро. Левое и правое ядро (косо)симметричной формы β совпадают друг с другом и называются просто *ядром* этой формы. Мы обозначаем это пространство через

$$\ker\beta \stackrel{\text{def}}{=} \ker\widehat{\beta} = \ker\beta^{\wedge} = \ker{}^{\wedge}\beta = \{w \in V \mid \forall\, v \in V\ \beta(v,w) = 0\}\,.$$

Предложение 1.5
Ограничение (косо) симметричной формы β на любое дополнительное к ядру $\ker\beta$ подпространство $U \subset V$ невырождено.

Доказательство. Пусть подпространство $U \subset V$ таково, что $V = \ker\beta \oplus U$, а вектор $w \in U$ удовлетворяет для всех $u \in U$ соотношению $\beta(u,w) = 0$. Записывая произвольный вектор $v \in V$ в виде $v = e + u$, где $e \in \ker\beta$ и $u \in U$, получаем $\beta(v,w) = \beta(e,w) + \beta(u,w) = 0$, откуда $w \in U \cap \ker\beta = 0$. □

Предостережение 1.1. Для произвольной билинейной формы, которая не является симметричной или кососимметричной, предл. 1.5, вообще говоря, неверно.

§2. Симметричные билинейные и квадратичные формы

В этом параграфе мы по умолчанию считаем, что основное поле $\Bbbk$ имеет $\operatorname{char}(\Bbbk) \neq 2$.

2.1. Пространства со скалярным произведением.

2.1. Пространства со скалярным произведением. Будем называть *пространством со скалярным произведением* конечномерное векторное пространство V над произвольным полем $\Bbbk$ характеристики $\operatorname{char}\Bbbk \neq 2$ с зафиксированной на нём невырожденной[1] симметричной билинейной формой $\beta : V \times V \to \Bbbk$. В этом и следующем разделах буква V по умолчанию обозначает именно такое пространство.

2.1.1. Ортогональные прямые суммы. Из двух пространств V_1, V_2 со скалярными произведениями β_1, β_2 можно изготовить пространство $V_1 \oplus V_2$ со скалярным произведением $\beta_1 \dotplus \beta_2$, относительно которого слагаемые ортогональны друг другу и которое ограничивается на V_1 и V_2 в β_1 и β_2. Это скалярное произведение задаётся формулой

$$\left[\beta_1 \dotplus \beta_2\right]\left((u_1, u_2), (w_1, w_2)\right) \overset{\text{def}}{=} \beta_1(u_1, u_2) + \beta_2(w_1, w_2)\,.$$

Его матрица Грама в любом базисе, первые $\dim V_1$ векторов которого образуют базис в V_1 с матрицей Грама B_1, а последние $\dim V_2$ векторов — базис в V_2 с матрицей Грама B_2, имеет блочный вид

$$\begin{pmatrix} B_1 & 0 \\ 0 & B_2 \end{pmatrix}.$$

Пространство $V_1 \oplus V_2$ со скалярным произведением $\beta_1 \dotplus \beta_2$ обозначается $V_1 \dotplus V_2$ и называется *ортогональной прямой суммой* пространств V_1 и V_2.

Упражнение 2.1. Обозначим через H_{2n} гиперболическое пространство[2] размерности $2n$. Постройте изометрический изоморфизм[3] $H_{2m} \dotplus H_{2k} \simeq H_{2(m+k)}$.

2.1.2. Изотропные и анизотропные подпространства. Ненулевой вектор $v \in V$ называется *изотропным*, если $\beta(v, v) = 0$. Подпространство $U \subset V$, целиком состоящее из изотропных векторов, изотропно в смысле n° 1.3.2 на стр. 8, т. е. $\beta(u, w) = 0$ для всех $u, w \in U$, поскольку

$$2\beta(u, w) = \beta(u + w, u + w) - \beta(u, u) - \beta(w, w) = 0\,.$$

Подпространство $U \subset V$ называется *анизотропным*, если в нём нет изотропных векторов. Скалярное произведение на V называется *анизотропным*, если анизотропно всё пространство V. Например, евклидово скалярное произведение на вещественном векторном пространстве анизотропно. Так как анизотропная форма обладает свойствами (5,6) из предл. 1.1 на стр. 6, каждая анизотропная форма невырождена. Поэтому для любого анизотропного подпространства $U \subset V$ имеет место ортогональное разложение $V = U \oplus U^\perp$ из предл. 1.4 на стр. 10.

Предложение 2.1

Каждое изотропное подпространство U в пространстве V со скалярным произведением β содержится в некотором гиперболическом подпространстве $W \subset V$ размерности $\dim W = 2\dim U$. При этом любой базис подпространства U дополняется до гиперболического базиса пространства W.

[1] См. предл. 1.1 на стр. 6.
[2] См. прим. 1.2 на стр. 7.
[3] См. n° 1.2.4 на стр. 5.

Доказательство. Рассмотрим произвольный базис $u_1, u_2, \dots, u_m$ в U, дополним его до базиса в V и обозначим через $u_1^\vee, u_2^\vee, \dots, u_m^\vee$ первые m векторов ортогонально двойственного базиса. Тогда

$$\beta(u_i, u_j^\vee) = \begin{cases} 1 & \text{при } i = j \\ 0 & \text{при } i \neq j\,, \end{cases} \tag{2-1}$$

и эти соотношения ортогональности не нарушаются при добавлении к любому из векторов $u_j^\vee$ произвольной линейной комбинации векторов u_i. Заменим каждый из векторов $u_j^\vee$ на вектор

$$w_j = u_j^\vee - \frac{1}{2} \sum_{\nu=1}^{m} \beta(u_j^\vee, u_\nu^\vee) \cdot u_\nu\,.$$

Векторы $w_1, w_2, \dots, w_m$ по-прежнему удовлетворяют соотношениям (2-1) и вдобавок

$$\beta(w_i, w_j) = \beta(u_i^\vee, u_j^\vee) - \frac{1}{2}\,\beta(u_i^\vee, u_j^\vee) - \frac{1}{2}\,\beta(u_j^\vee, u_i^\vee) = 0\,,$$

т. е. $2m$ векторов u_i, w_j, $1 \leqslant i, j \leqslant m$, образуют гиперболический базис в своей линейной оболочке, которую мы и возьмём в качестве W. □

Теорема 2.1

Каждое пространство V со скалярным произведением распадается в прямую ортогональную сумму $V = H_{2k} \oplus A$, первое слагаемое которой гиперболическое и может быть нулевым или совпадать со всем пространством V, а второе слагаемое $A = H_{2k}^\perp$ анизотропно.

Доказательство. Индукция по $\dim V$. Если V анизотропно (что так при $\dim V = 1$), доказывать нечего. Если существует ненулевой изотропный вектор $e \in V$, то по предл. 2.1 он лежит в некоторой гиперболической плоскости $H_2 \subset V$, и $V = H_2 \oplus H_2^\perp$ согласно предл. 1.4. По индукции, $H_2^\perp = H_{2m} \oplus A$, где $A = H_{2m}^\perp$ анизотропно. Поэтому $V = H_{2m+2} \oplus A$ и $A = H_{2m+2}^\perp$. □

Замечание 2.1. Ниже, в теор. 2.4 на стр. 18, мы увидим, что разложение из теор. 2.1 единственно в следующем смысле: если $V = H_{2k} \dotplus U = H_{2m} \dotplus W$, где U и W анизотропны, то $k = m$ и существует изометрический изоморфизм $U \xrightarrow{\sim} W$.

Следствие 2.1

Следующие свойства пространства V со скалярным произведением эквивалентны:

1) V изометрически изоморфно гиперболическому пространству

2) V является прямой суммой двух изотропных подпространств

3) $\dim V$ чётна, и в V имеется изотропное подпространство половинной размерности.

Доказательство. Импликация (1)⇒(2) очевидна. Пусть выполнено (2). По предл. 1.2 размерность каждого из из двух изотропных прямых слагаемых не превышает половины размерности V, что возможно только если обе эти размерности равны $\frac{1}{2}\dim V$. Тем самым, (2)⇒(3). По предл. 2.1 на стр. 14 каждое изотропное подпространство размерности $\frac{1}{2}\dim V$ содержится в гиперболическом подпространстве размерности $\dim V$, которое таким образом совпадает со всем пространством V, что даёт импликацию (3)⇒(1). □

2.2. Изометрии и отражения. Всякий анизотропный вектор $e \in V$ задаёт разложение пространства V в прямую ортогональную сумму $V = \Bbbk \cdot e \oplus e^{\perp}$. Линейный оператор $\sigma_e : V \to V$, тождественно действующий на гиперплоскости $e^{\perp}$ и переводящий вектор e в $-e$, называется *отражением* в гиперплоскости $e^{\perp}$, см. рис. 2◇1. Произвольный вектор $v = v_e + v_{e^{\perp}} \in V$, где $v_e = e\,\beta(e,v)\,/\,\beta(e,e)$ это проекция вектора v на одномерное подпространство $\Bbbk \cdot e$ вдоль гиперплоскости[1] $e^{\perp}$, а $v_{e^{\perp}} = v - v_e \in e^{\perp}$, переходит при этом в вектор

$$\sigma_e(v) = -v_e + v_{e^{\perp}} = v - 2v_e = v - 2\,\frac{\beta(e,v)}{\beta(e,e)} \cdot e \qquad (2\text{-}2)$$

Упражнение 2.2. Убедитесь, что $\sigma_e \in \mathrm{O}_{\beta}(V)$ и $\sigma_e^2 = \mathrm{Id}_V$, и докажите для любых изометрии $f \in \mathrm{O}(V)$ и анизотропного вектора $e \in V$ равенство $f \circ \sigma_e \circ f^{-1} = \sigma_{f(e)}$.

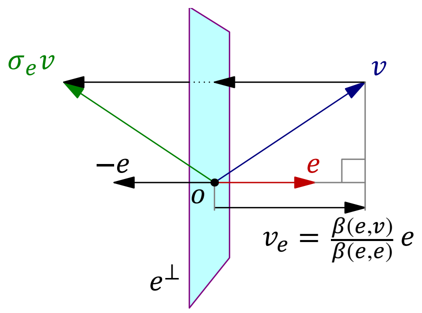

Рис. 2◇1. Отражение σ_e.

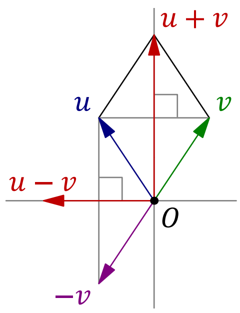

Рис. 2◇2. Отражения в ромбе.

Лемма 2.1

В любом пространстве V со скалярным произведением β для каждой пары различных анизотропных векторов u, v с равными скалярными квадратами $\beta(u,u) = \beta(v,v) \neq 0$ существует отражение, переводящее u либо в v, либо в $-v$.

Доказательство. Если u и v коллинеарны, то искомым отражением является $\sigma_v = \sigma_u$. Если u и v не коллинеарны, то хотя бы одна из двух диагоналей $u+v$, $u-v$ натянутого на них ромба (см. рис. 2◇2) анизотропна, поскольку эти диагонали ортогональны:

$$\beta(u+v, u-v) = \beta(u,u) - \beta(v,v) = 0\,,$$

и их линейная оболочка содержит анизотропные векторы u, v. Тем самым, хотя бы одно из отражений σ_{u-v}, σ_{u+v} определено. При этом $\sigma_{u-v}(u) = v$, а $\sigma_{u+v}(u) = -v$. □

Упражнение 2.3. Проверьте, последние два равенства.

Теорема 2.2

Всякая изометрия n-мерного пространства со скалярным произведением является композицией не более чем $2n$ отражений.

[1] Мы воспользовались форм. (1-16) на стр. 10: вектор ${}^{\vee}e = e\,/\,\beta(e,e)$ является двойственным к e относительно формы β базисным вектором одномерного пространства $U = \Bbbk \cdot e$, и $v_e = \beta({}^{\vee}e, v)\,e$.

Доказательство. Индукция по n. Ортогональная группа одномерного пространства состоит из тождественного оператора E и отражения $-E$. Пусть $n > 1$ и $f : V \to V$ — изометрия. Выберем в V какой-нибудь анизотропный вектор v и обозначим через σ отражение, переводящее $f(v)$ в v или в $-v$. Композиция σf переводит v в $\pm v$, а значит, переводит в себя $(n-1)$-мерную гиперплоскость $v^\perp$. По индукции, действие σf на $v^\perp$ является композицией не более $2n-2$ отражений в гиперплоскостях внутри $v^\perp$. Продолжим их до отражений всего пространства V, добавив в зеркало каждого отражения вектор v. Композиция полученных отражений совпадает с σf на гиперплоскости $v^\perp$, а её действие на v либо такое же, как у σf (при $\sigma f(v) = v$), либо отличается от него знаком (при $\sigma f(v) = -v$). Поэтому σf, как оператор на всём пространстве V, есть композиция построенных $2n-2$ отражений и, возможно, ещё одного отражения в гиперплоскости $v^\perp$. Следовательно, $f = \sigma\sigma f$ это композиция не более $2n$ отражений. □

Упражнение 2.4. Покажите, что в анизотропном пространстве V в условиях лем. 2.1 всегда найдётся отражение, переводящее u в точности в v, и выведите отсюда, что любая изометрия n-мерного анизотропного пространства является композицией не более n отражений.

Теорема 2.3 (лемма Витта)
Пусть четыре пространства U_1, W_1, U_2, W_2 со скалярными произведениями таковы, что некоторые два из трёх пространств U_1, $U_1 \dotplus W_1$, W_1 изометрически изоморфны соответствующей паре пространств из тройки U_2, $U_2 \dotplus W_2$, W_2. Тогда оставшиеся третьи элементы троек тоже изометрически изоморфны.

Доказательство. Если есть изометрические изоморфизмы $f : U_1 \simeq U_2$ и $g : W_1 \simeq W_2$, то их прямая сумма $f \oplus g : U_1 \dotplus W_1 \to U_2 \dotplus W_2$, $(u,w) \mapsto (f(u), g(w))$, является требуемым изометричеким изоморфизмом. Оставшиеся два случая симметричны, и мы разберём один из них. Пусть имеются изометрические изоморфизмы

$$f : U_1 \simeq U_2 \quad \text{и} \quad h : U_1 \dotplus W_1 \simeq U_2 \dotplus W_2\,.$$

Изометрический изоморфизм $g : W_1 \simeq W_2$ строится индукцией по $\dim U_1 = \dim U_2$. Если пространство U_1 одномерно с базисом u, то вектор u анизотропен. Поэтому векторы $f(u)$ и $h(u,0)$ тоже анизотропны и имеют одинаковые скалярные квадраты. Обозначим через σ отражение пространства $U_2 \dotplus W_2$, переводящее $h(u,0)$ в $\big(\pm f(u), 0\big)$. Композиция

$$\sigma h : U_1 \dotplus W_1 \simeq U_2 \dotplus W_2$$

изометрично отображает одномерное подпространство U_1 первой суммы на одномерное подпространство U_2 второй, а значит, изометрично отображает ортогональное дополнение к U_1 в первой сумме на ортогональное дополнение к U_2 во второй, что и даёт требуемый изоморфизм $\sigma h|_{W_1} : W_1 \simeq W_2$. Пусть теперь $\dim U_1 > 1$. Выберем в U_1 любой анизотропный вектор u и рассмотрим ортогональные разложения

$$U_1 \dotplus W_1 = \Bbbk \cdot u \dotplus u^\perp \dotplus W_1 \quad \text{и} \quad U_2 \dotplus W_2 = \Bbbk \cdot f(u) \dotplus f(u)^\perp \dotplus W_2\,,$$

в которых $u^\perp \subset U_1$ и $f(u)^\perp \subset U_2$ означают ортогональные дополнения к анизотропным векторам u и $f(u)$ внутри U_1 и U_2 соответственно. Так как пространства $\Bbbk \cdot u$ и $\Bbbk \cdot f(u)$ изометрически изоморфны, по уже доказанному существуют изометрии

$$f' : u^\perp \simeq f(u)^\perp \quad \text{и} \quad h' : u^\perp \dotplus W_1 \simeq f(u)^\perp \dotplus W_2\,,$$

к которым применимо индуктивное предположение. □

Теорема 2.4
Построенное в теор. 2.1 разложение пространства V со скалярным произведением в прямую ортогональную сумму гиперболического и анизотропного подпространств единственно в том смысле, что для любых двух таких разложений $V = H_{2k} \dotplus U = H_{2m} \dotplus W$ имеет место равенство $k = m$ и существует изометрический изоморфизм $U \simeq W$.

Доказательство. Пусть $m \geqslant k$, так что $H_{2m} = H_{2k} \dotplus H_{2(m-k)}$. Тождественное отображение $\mathrm{Id} : V \to V$ задаёт изометрический изоморфизм $H_{2k} \dotplus U \xrightarrow{\sim} H_{2k} \dotplus H_{2(m-k)} \dotplus W$. По лемме Витта существует изометрический изоморфизм $U \xrightarrow{\sim} H_{2(m-k)} \dotplus W$. Так как U анизотропно, $H_{2(m-k)} = 0$ (иначе в U будет ненулевой изотропный вектор), откуда $k = m$ и $U \simeq W$. □

Следствие 2.2
Если скалярное произведение на пространстве V невырожденно ограничивается на подпространства $U, W \subset V$ и существует изометрический изоморфизм $\varphi : U \xrightarrow{\sim} W$, то он продолжается (неоднозначно) до такого изометрического автоморфизма $f \in \mathrm{O}(V)$, что $f|_U = \varphi$.

Доказательство. Если есть хоть какой-нибудь изометрический изоморфизм $\psi : U^\perp \xrightarrow{\sim} W^\perp$, то изометрия $f = \varphi \oplus \psi : U \oplus U^\perp \xrightarrow{\sim} W \oplus W^\perp$, $(u, u') \mapsto \big(\varphi(h'), \psi(u')\big)$ является требуемым автоморфизмом пространства V. В силу сделанных предположений имеются изометрические изоморфизмы $\eta : U \oplus U^\perp \xrightarrow{\sim} V$, $(u, u') \mapsto u + u'$, и $\zeta : U \oplus W^\perp \xrightarrow{\sim} V$, $(u, w') \mapsto \varphi(u) + w'$. Композиция $\zeta^{-1}\eta : U \oplus U^\perp \xrightarrow{\sim} U \oplus W^\perp$ тоже изометрический изоморфизм. Так что по лемме Витта[1] ортогоналы $U^\perp$ и $W^\perp$ изометрически изоморфны. □

Следствие 2.3
Для каждого натурального числа k в диапазоне $1 \leqslant k \leqslant \dim V/2$ группа изометрий $\mathrm{O}(V)$ транзитивно действует на k-мерных изотропных и $2k$-мерных гиперболических подпространствах в V.

Доказательство. Утверждение про гиперболические подпространства вытекает непосредственно из сл. 2.2, а про изотропные — получается из него применением предл. 2.1. □

2.3. Квадратичные формы. Функция $q : V \to \Bbbk$ на n-мерном векторном пространстве V над полем $\Bbbk$ называется *квадратичной формой*, если она является однородным многочленом второй степени от координат в некотором базисе, т. е. существуют такие базис $\boldsymbol{e} = (e_1, e_2, \dots, e_n)$ в V и однородный многочлен второй степени $q_{\boldsymbol{e}} \in \Bbbk[x_1, x_2, \dots, x_n]$, что

$$q(\lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2 + \dots + \lambda_n e_n) = q_{\boldsymbol{e}}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$$

для всех $(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n) \in \Bbbk^n$. Если $\mathrm{char}(\Bbbk) \neq 2$, то многочлен $q_{\boldsymbol{e}}$ можно записать в виде

$$q_{\boldsymbol{e}}(x_1, x_2, \dots, x_n) = \sum_{i,j=1}^{n} q_{ij} x_i x_j \,, \tag{2-3}$$

где суммирование происходит по всем парам индексов $1 \leqslant i, j \leqslant n$, а коэффициенты q_{ij} симметричны по i и j, т. е. при $i \neq j$ число $q_{ji} = q_{ij}$ равно *половине*[2] фактического коэффициента

[1] См. теор. 2.3 на стр. 17.
[2] Обратите внимание, что над полем характеристики 2 многочлен $x_1 x_2$ не записывается в виде (2-3).

при $x_i x_j$ в многочлене $q_{\boldsymbol{e}}$, получающегося после приведения подобных слагаемых в (2-3). Если организовать числа q_{ij} в симметричную матрицу $Q_{\boldsymbol{e}} = \left(q_{ij}\right)$, которую мы будем называть *матрицей Грама* многочлена $q_{\boldsymbol{e}}$, и обозначить через x и $x^t = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ столбец и строку, составленные из переменных, то (2-3) можно переписать в виде

$$q(x_1, x_2, \dots, x_n) = \sum_{i,j=1}^{n} x_i q_{ij} x_j = x^t Q_{\boldsymbol{e}} x\,. \tag{2-4}$$

Сравнивая это с форм. (1-3) на стр. 4, мы заключаем, что $q(v) = \widetilde{q}(v, v)$, где $\widetilde{q} : V \times V \to \Bbbk$ — симметричная билинейная форма с матрицей Грама $Q_{\boldsymbol{e}}$ в базисе $\boldsymbol{e}$. Поскольку

$$q(u + w) - q(u) - q(w) = \widetilde{q}(u + w, u + w) - \widetilde{q}(u, u) - \widetilde{q}(w, w) = 2\widetilde{q}(u, w)\,,$$

симметричная билинейная форма $\widetilde{q}$ со свойством $\widetilde{q}(v, v) = q(v)$ однозначно определяется квадратичной формой q, если $\operatorname{char}\Bbbk \neq 2$. Симметричная билинейная форма $\widetilde{q}$ называется *поляризацией* квадратичной формы q. Обратите внимание, что взаимно однозначное соответствие между квадратичными и симметричными билинейными формами

$$\begin{aligned} \widetilde{q}(u, w) &\mapsto q(v) = \widetilde{q}(v, v) \\ q(v) &\mapsto \widetilde{q}(u, w) = \frac{1}{2}\big(q(u + w) - q(u) - q(w)\big) \end{aligned} \tag{2-5}$$

не зависят от базиса $\boldsymbol{e}$ в V. В частности, для любого базиса $\boldsymbol{f} = \boldsymbol{e}\, C_{\boldsymbol{ef}}$ в V значение $q(v)$ является однородным многочленом второй степени $q_{\boldsymbol{f}}$ от координат вектора v в базисе $\boldsymbol{f}$, причём матрица Грама этого многочлена, равная матрице Грама билинейной формы $\widetilde{q}$ в базисе $\boldsymbol{f}$, будет равна[1] $Q_{\boldsymbol{f}} = C_{\boldsymbol{ef}}^t Q_{\boldsymbol{e}} C_{\boldsymbol{ef}}$.

Поскольку при переходе от базиса к базису определитель Грама умножается на квадрат определителя матрицы перехода, класс числа $\det Q_{\boldsymbol{e}} \in \Bbbk$ по модулю умножения на ненулевые квадраты из поля $\Bbbk$ не зависит от выбора базиса $\boldsymbol{e}$. Мы будем обозначать этот класс $\det q \in \Bbbk/\Bbbk^{*2}$ и называть его *определителем Грама* квадратичной формы q. Квадратичная форма q называется *вырожденной*, если $\det q = 0$. Формы с $\det q \neq 0$ называются *невырожденными*. Таким образом, невырожденность квадратичной формы q означает в точности то же, что невырожденность её поляризации[2] $\widetilde{q}$. Под *рангом* квадратичной формы q мы понимаем ранг её поляризации $\widetilde{q}$, равный рангу матрицы Грама $Q_{\boldsymbol{e}}$ в любом базисе $\boldsymbol{e}$. Также, как и для симметричных билинейных форм, мы будем называть ненулевой вектор $v \in V$ *изотропным* для квадратичной формы q, если $q(v) = 0$. Квадратичная форма называется *анизотропной*, если $q(v) \neq 0$ при $v \neq 0$.

Из доказанных выше результатов про симметричные билинейные формы немедленно получаются аналогичные результаты про квадратичные формы.

Следствие 2.4 (из теор. 2.1 на стр. 15)
Всякая квадратичная форма q над произвольным полем $\Bbbk$ характеристики $\operatorname{char}\Bbbk \neq 2$ в подходящих координатах записывается в виде $x_1 x_{i+1} + x_2 x_{i+2} + \dots + x_i x_{2i} + \alpha(x_{2i+1}, x_{2i+2} \dots, x_r)$, где $r = \operatorname{rk}(q)$ и $\alpha(x) \neq 0$ при $x \neq 0$. □

Следствие 2.5 (из теор. 1.1 на стр. 11)
Всякая квадратичная форма над произвольным полем $\Bbbk$ характеристики $\operatorname{char}\Bbbk \neq 2$ линейной обратимой заменой переменных приводится к виду $\sum a_i x_i^2$. □

[1] См. формулу (1-2) на стр. 4.
[2] См. предл. 1.1 на стр. 6.

Следствие 2.6 (из сл. 1.1 на стр. 12)
Два однородных многочлена второй степени $f, g \in \Bbbk[x_1, x_2, \dots, x_n]$ над алгебраически замкнутым полем $\Bbbk$ характеристики $\mathrm{char}(\Bbbk) \neq 2$ тогда и только тогда переводятся друг в друга линейными обратимыми заменами переменных, когда задаваемые им квадратичные формы $f, g : \Bbbk^n \to \mathbb{R}$ имеют одинаковый ранг. $\square$

Пример 2.1 (квадратичные формы от двух переменных)
Согласно сл. 2.5, ненулевая квадратичная форма от двух переменных

$$q(x) = a\,x_1^2 + 2\,b\,x_1x_2 + c\,x_2^2 = (x_1, x_2)\begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

подходящей линейной заменой координат приводятся либо к виду αt^2 с $\alpha \neq 0$, либо к виду

$$\alpha t_1^2 + \beta\,t_2^2, \quad \text{где} \quad \alpha\beta \neq 0\,.$$

Условимся писать $\xi \sim \eta$ для чисел $\xi, \eta \in \Bbbk$, если $\xi = \lambda^2\eta$ для какого-нибудь ненулевого $\lambda \in \Bbbk$.

Тогда в первом случае $ac - b^2 \sim \det q \sim \alpha \cdot 0 = 0$, форма q вырождена и с точностью до постоянного множителя является полным квадратом линейной формы $t \in V^*$. Такая форма q зануляется вдоль одномерного подпространства $\mathrm{Ann}(t) \subset V$ и отлична от нуля на всех остальных векторах.

Во втором случае $ac - b^2 \sim \det q \sim \alpha\beta \neq 0$ и форма q невырождена. Если у неё есть ненулевой изотропный вектор $v = (\vartheta_1, \vartheta_2)$, то из равенства $\alpha\vartheta_1^2 + \beta\vartheta_2^2 = 0$ вытекает, что $\vartheta_2 \neq 0$ и $-\det q \sim -\alpha\beta \sim -\beta/\alpha = (\vartheta_1/\vartheta_2)^2$ является квадратом в поле $\Bbbk$. В этом случае многочлен

$$\alpha t_1^2 + \beta\,t_2^2 = \alpha\left(t_1 + \frac{\vartheta_1}{\vartheta_2}t_2\right)\left(t_1 - \frac{\vartheta_1}{\vartheta_2}t_2\right)$$

раскладывается над полем $\Bbbk$ в произведение двух непропорциональных линейных форм. Поэтому квадратичная форма q, у которой $-\det q$ является ненулевым квадратом, тождественно зануляется на двух одномерных подпространствах и отлична от нуля на всех прочих векторах. Мы будем называть такие формы *гиперболическими*[1]. Если же $-\det q$ не квадрат, то форма q анизотропна.

2.3.1. Вещественные квадратичные формы. Из сл. 2.5 вытекает, что любая квадратичная форма на вещественном вектором пространстве V в подходящем базисе записывается в виде

$$q(x) = x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_p^2 - x_{p+1}^2 - x_{p+2}^2 - \dots - x_{p+m}^2\,. \tag{2-6}$$

Для этого надо перейти к базису с диагональной матрицей Грама и поделить каждый базисный вектор e_i с $q(e_i) \neq 0$ на $\sqrt{|q(e_i)|}$. Числа p и m в представлении (2-6) называются *положительным* и *отрицательным индексами инерции*, упорядоченная пара (p, m) — *сигнатурой*, а разность $p - m$ — просто *индексом* вещественной квадратичной формы q.

Теорема 2.5
Числа p и m в представлении (2-6) не зависят от выбора базиса, в котором квадратичная форма имеет вид (2-6).

[1]Поскольку поляризация такой формы является гиперболическим скалярным произведением.

Доказательство. Будем считать, что $p \geqslant m$, поскольку противоположный случай сводится к этому заменой q на $-q$. Сумма $p + m = \operatorname{rk} q$ равна рангу билинейной формы $\widetilde{q}$ и не зависит от выбора базиса. Линейная оболочка базисных векторов e_k с номерами $k > p + m$ является ядром билинейной формы $\widetilde{q}$. Классы $[e_i]$ остальных базисных векторов по модулю $\ker \widetilde{q}$ образуют базис фактор пространства $W = V/\ker \widetilde{q}$. Форма $\widetilde{q}$ корректно задаёт на W симметричную билинейную форму $\widetilde{q}_{\text{red}}([u],[w]) = \widetilde{q}(u,w)$, поскольку $\widetilde{q}(u + v_1, w + v_2) = \widetilde{q}(u,w)$ для любых $v_1, v_2 \in \ker \widetilde{q}$. В базисе из классов $[e_i]$ с $1 \leqslant i \leqslant p+m$, форма q_{red} по-прежнему задаётся формулой (2-6). В частности, она невырождена. Каждая пара базисных векторов $[e_i]$, $[e_{p+i}]$ порождает гиперболическую плоскость с гиперболическим базисом из векторов $\big([e_i] \pm [e_{p+i}]\big)/\sqrt{2}$. Поэтому форма $\widetilde{q}_{\text{red}}$ является прямой ортогональной суммой гиперболического пространства H_{2m}, натянутого на классы $[e_i]$, $[e_{p+i}]$ с $1 \leqslant i \leqslant m$, и анизотропного пространства размерности $p - m$, натянутого на оставшиеся классы $[e_j]$ с $m < j \leqslant p$. По теор. 2.4 на стр. 18 размерности гиперболического и анизотропного слагаемых не зависят от выбора разложения пространства со скалярным произведением в ортогональную сумму гиперболического и анизотропного. Поэтому индекс $p-m$ и отрицательный индекс инерции m не зависят от выбора базиса, в котором форма q имеет вид (2-6). □

Следствие 2.7 (из доказательства теор. 2.5)
Для каждого n на пространстве $\mathbb{R}^n$ с точностью до изометрического изоморфизма имеются ровно два анизотропных скалярных произведения — евклидово и *антиевклидово*, получающееся из евклидова сменой знака. Вещественные квадратичные формы положительного индекса имеют ненулевое евклидово анизотропное слагаемое, а формы отрицательного индекса — ненулевое антиевклидово анизотропное слагаемое, размерности которых равны абсолютной величине индекса. Гиперболичность невырожденной вещественной квадратичной формы равносильна тому, что её индекс равен нулю. □

Следствие 2.8
Два однородных многочлена второй степени $f, g \in \mathbb{R}[x_1, x_2, \dots, x_n]$ тогда и только тогда переводятся друг в друга линейными обратимыми заменами переменных, когда задаваемые им квадратичные формы $f, g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ имеют одинаковый ранг и индекс. □

2.3.2. Отыскание сигнатуры вещественной формы. Зафиксируем в пространстве V базис и обозначим через $V_k \subset V$ линейную оболочку первых k базисных вектров $e_1, e_2, \dots, e_k$, а через $\varDelta_k$ их определитель Грама, т. е. главный угловой $k \times k$ минор матрицы Грама выбранного базиса, сосредоточенный в первых k строках и первых k столбцах, и рассматриваемый по модулю умножения на ненулевые положительные числа (ненулевые квадраты поля $\mathbb{R}$). Если он нулевой, ограничение $q|_{V_k}$ особо, и в частности, обладает изотропными векторами. Если ограничение $q|_{V_k}$ неособо, то $\varDelta_k = (-1)^{m_k}$, где показатель m_k равен отрицательному индексу инерции ограниченной формы $q|_{V_k}$. Если в последовательности $\varDelta_1, \varDelta_2, \dots, \varDelta_{\dim V}$ не слишком много следующих подряд нулей, то читая её слева направо, часто удаётся проследить изменение индекса формы $q|_{V_i}$ при переходе от пространства V_i с ненулевым $\varDelta_i$ к ближайшему справа пространству V_j с ненулевым $\varDelta_j$, что позволяет эффективно вычислять индекс.

Например, пусть $\varDelta_1 < 0$, $\varDelta_2 = 0$, $\varDelta_3 > 0$, $\varDelta_4 = 0$, $\varDelta_5 = 0$, $\varDelta_6 < 0$. Поскольку форма $q|_{V_2}$ особа, пространство V_2 является прямой ортогональной суммой отрицательной анизотропной прямой $\mathbb{R}e_1$ и изотропной прямой. Поскольку ограничение на V_3 неособо, ортогональное дополнение к e_1 внутри V_3 тоже неособо и содержит изотропный вектор. Поэтому оно является гиперболической плоскостью, а $V_3 = \mathbb{R}e_1 \oplus H_2$. Обратите внимание, что $\varDelta_3$ в этом случае *обязан* отличаться знаком от $\varDelta_1$, что мы и наблюдаем[1].

Упражнение 2.5. Пусть $\varDelta_{i-1} \neq 0$, $\varDelta_i = 0$ и $\varDelta_{i+1} \neq 0$. Покажите, что $\varDelta_{i-1}\varDelta_{i+1} < 0$ и $V_{i+1} = V_{i-1} \dotplus H_2$.

Итак, ограничение $q|_{V_3}$ имеет сигнатуру $(1, 2)$. Те же аргументы показывают, что ограничение формы на $V_3^{\perp}$ невырождено и содержит изотропный вектор, а значит имеет сигнатуру $(2, 1)$ или $(1, 2)$. Поскольку знаки у $\varDelta_3$ и $\varDelta_6$ противоположны, имеет место первое, и полная сигнатура q на $\mathbb{R}^6$ равна $(1, 2) + (2, 1) = (3, 3)$. Примером такой формы является форма с матрицей Грама

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Если все $\varDelta_k \neq 0$, то все ограничения $q|_{V_k}$ неособы, и соседние миноры $\varDelta_i$, $\varDelta_{i+1}$ различаются знаком если и только если отрицательный индекс инерции $m_{i+1} = m_i + 1$. Поэтому полный отрицательный индекс инерции m в этом случае равен числу перемен знака в последовательности $1, \varDelta_1, \varDelta_2, \dots, \varDelta_{\dim V}$.

2.3.3. Квадратичные формы над полем $\mathbb{F}_p$. Пусть $p > 2$ — простое натуральное число и $\mathbb{F}_p = \mathbb{Z}/(p)$ — поле вычетов по модулю p. Зафиксируем какой-нибудь не квадрат $\varepsilon \in \mathbb{F}_p$.

Упражнение 2.6. Убедитесь, что ненулевые квадраты образуют в мультипликативной группе $\mathbb{F}_p^*$ поля $\mathbb{F}_p$ подгруппу индекса 2. В частности, любой ненулевой элемент поля $\mathbb{F}_p$ умножением на подходящий ненулевой квадрат можно сделать равным либо 1, либо ε.

Из этого упражнения и сл. 2.5 на стр. 19 вытекает, что всякая квадратичная форма над $\mathbb{F}_p$ обратимой линейной заменой переменных приводится к виду

$$q(x) = \sum x_i^2 + \varepsilon \sum x_j^2 \tag{2-7}$$

(наборы переменных в первой и второй сумме не пересекаются). Заметим теперь, что при любых ненулевых $a, b \in \mathbb{F}_p$ и любом $c \in \mathbb{F}_p$ уравнение

$$ax_1^2 + bx_2^2 = c \tag{2-8}$$

разрешимо в $\mathbb{F}_p$ относительно (x_1, x_2), поскольку когда x_1 и x_2 независимо друг от друга пробегают поле $\mathbb{F}_p$, функции ax_1^2 и $c - bx_2^2$ принимают по $(p + 1)/2$ различных значений и, стало быть, множества их значений имеют хотя бы один общий элемент $ax_1^2 = c - bx_2^2$. На языке квадратичных форм разрешимость уравнения (2-8) означает, что каждая невырожденная квадратичная форма $q : V \to \mathbb{F}_p$ на двумерном векторном пространстве V над полем $\mathbb{F}_p$ принимает все значения из поля $\mathbb{F}_p$. В частности, существует вектор e с $q(e) = 1$, а значит, и такие координаты, в которых форма q имеет вид $x_1^2 + x_2^2$ или $x_1^2 + \varepsilon x_2^2$. Это замечание позволяет сделать вторую сумму в (2-7) состоящей из не более, чем одного слагаемого. Таким образом, каждая квадратичная форма q ранга r над полем $\mathbb{F}_p$ в подходящих координатах записывается как $x_1^2 + \dots + x_{r-1}^2 + x_r^2$, если $\det q$ квадрат, и как $x_1^2 + \dots + x_{r-1}^2 + \varepsilon x_r^2$, если $\det q$ не квадрат.

[1] А квадратичных форм с $\varDelta_1 < 0$, $\varDelta_2 = 0$ и $\varDelta_3 < 0$ просто не существует!

2.4. Автодуальные операторы на пространстве со скалярным произведением. Рассмотрим над произвольным полем $\Bbbk$ характеристики $\mathrm{char}(\Bbbk) \neq 2$ векторное пространство V с невырожденной симметричной билинейной формой, которую будем обозначать через

$$(*\,,\,*)\colon\; V \times V \to \Bbbk\,, \quad u, w \mapsto (u, w)\,. \tag{2-9}$$

Линейный оператор $f\colon\; V \to V$ называется *автодуальным* или *самосопряжённым* относительно скалярного произведения (2-9), если при всех $u, w \in V$ выполняется равенство

$$(fu, w) = (u, fw)\,.$$

Упражнение 2.7. Покажите, что оператор f автодулен если и только если отвечающая ему при биекции из n° 1.3.4 на стр. 9 билинейная форма $\beta_f(u, w) = (u, fw)$ симметрична.

Матрица F самосопряжённого оператора f связана с матрицей Грама G скалярного произведения (2-9) соотношением $F^t G = GF$.

Лемма 2.2
Если автодуальный линейный оператор $f\colon\; V \to V$ переводит в себя некоторое подпространство $U \subset V$, то он переводит в себя и его ортогонал $U^\perp$.

Доказательство. Пусть $w \in U^\perp$, т. е. $(u, w) = 0$ для всех $u \in U$. Тогда $(u, fw) = (fu, w) = 0$ для всех $u \in U$, ибо $fu \in U$. Тем самым, $fw \in U^\perp$. □

Лемма 2.3
Собственные векторы с разными собственными значениями у автодуального оператора ортогональны друг другу.

Доказательство. Если $Fu = \lambda u$ и $Fw = \mu w$, то из равенства $(Fu, w) = (u, Fw)$ вытекает равенство $(\lambda - \mu) \cdot (u, w) = 0$. □

Предложение 2.2
Если характеристический многочлен автодуального линейного оператора $f\colon\; V \to V$ полностью раскладывается в поле $\Bbbk$ на линейные множители и все ненулевые собственные векторы оператора f анизотропны, то в пространстве V имеется ортогональный базис из собственных векторов оператора f.

Доказательство. Индукция по $\dim V$. Если оператор f является умножением на скаляр (что имеет место при $\dim V = 1$), то подойдёт любой ортогональный базис пространства V. Допустим, что $\dim V > 1$ и оператор f не скалярен. Поскольку характеристический многочлен $\det(tE - F)$ имеет корни в поле $\Bbbk$, у оператора F есть ненулевое собственное подпространство

$$V_\lambda = \{v \in V \mid fv = \lambda v\} \subsetneq V\,.$$

По условию леммы, оно анизотропно, и значит, скалярное произведение ограничивается на него невырождено. Поэтому $V = V_\lambda \oplus V_\lambda^\perp$, и ограничение скалярного произведения на $V_\lambda^\perp$ тоже невырождено. По лем. 2.2 оператор f переводит подпространство $V_\lambda^\perp$ в себя. Тем самым, характеристический многочлен оператора f является произведением характеристических многочленов ограничений $f|_{V_\lambda}$ и $f|_{V_\lambda^\perp}$. В силу единственности разложения на множители в кольце $\Bbbk[t]$ и предположения леммы, каждый из этих двух характеристических многочленов полностью раскладываются на линейные множители в поле $\Bbbk$. По индуктивному предположению, в подпространстве $V_\lambda^\perp$ есть ортогональный базис из собственных векторов оператора f. Добавляя к нему любой ортогональный базис собственного пространства V_λ, получаем нужный базис в V. □

2.4.1. Автодуальные операторы на евклидовом пространстве. Покажем, что в евклидовом пространстве V над полем $\Bbbk = \mathbb{R}$ условия предл. 2.2 выполняются для любого автодуального оператора.

Лемма 2.4
У любого линейного оператора $f : V \to V$ на конечномерного векторном пространстве над полем $\mathbb{R}$ имеется одномерное или двумерное подпространство $U \subset V$, которое переводится оператором f в себя.

Доказательство. Рассмотрим произвольный ненулевой вектор $v \in V$ и образуем из него $n+1$ векторов v, fv, f^2v, …, f^nv, где $n = \dim V$ и f^kv обозначает результат k-кратного последовательного применения оператора f к вектору v. Поскольку эти векторы линейно зависимы, найдутся такие $a_1, a_2, \dots, a_k \in \mathbb{R}$, что $(f^k + a_1f^{k-1} + \dots + a_{k-1}f + a_k)v = 0$. Заключённый в скобки линейный оператор можно воспринимать как результат подстановки $t = f$ в многочлен $f(t) = t^k + a_1t^{k-1} + \dots + a_{k-1}t + a_k \in \mathbb{R}[t]$. Всякий такой многочлен раскладывается в произведение $f(t) = g_1(t) \cdot g_2(t) \cdot \dots \cdot g_m(t)$ линейных двучленов вида $t - \alpha$ и квадратных трёхчленов вида $t^2 - \alpha t - \beta$ с вещественными коэффициентами. Подставляя в это разложение f и применяя полученный оператор к вектору v, мы заключаем, что $g_1(f) \circ g_2(f) \circ \dots \circ g_m(f)v = 0$. Рассмотрим наименьшее k, для которого вектор $w = g_{k+1}(f) \circ \dots \circ g_m(f)v$ всё ещё отличен от нуля. Тогда $g_k(f)w = 0$. Для $g_k(f) = f - \alpha$ это значит, что $f(w) = \alpha w$, т. е. одномерное подпространство $\mathbb{R} \cdot w$ переводится оператором f в себя. Для $g_k(f) = f^2 - \alpha f - \beta$ имеем $f(f(w)) = \alpha f(w) + \beta w$, т. е. линейная оболочка векторов w и $f(w)$ переводится оператором f в себя. □

Лемма 2.5
Характеристический многочлен самосопряжённого оператора на евклидовом пространстве полностью раскладывается на линейные множители над полем $\mathbb{R}$.

Доказательство. Индукция по $\dim V$. Если $\dim V = 1$, доказывать нечего. Если $\dim V = 2$, оператор f задаётся в ортонормальном базисе симметричной матрицей

$$F = F^t = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix} .$$

Её характеристический многочлен $\det(tE - F) = t^2 - (a+c) \cdot t + (ac - b^2)$ имеет неотрицательный дискриминант $(a+c)^2 - 4(ac - b^2) = (a-c)^2 + 4b^2$ и вещественные корни. При $\dim V > 2$ в пространстве V имеется одномерное или двумерное подпространство $U \subset V$, которое переводится оператором f в себя. По лем. 2.2 его ортогональное дополнение $U^\perp$ также переходит в себя под действием f, а значит, $\chi_f = \chi_{f|_U} \cdot \chi_{f|_{U^\perp}}$. Первый характеристический многочлен полностью раскладывается на линейные множители над $\mathbb{R}$ по уже доказанному, второй — по предположению индукции. □

Теорема 2.6 (теорема о нормальном базисе)
Любая квадратичная форма q на евклидовом пространстве V имеет в подходящем ортонормальном базисе пространства V диагональную матрицу Грама. Её диагональные элементы с

точностью до перестановки не зависят от выбора базиса и равны собственным числам того единственного автодуального оператора $f : V \to V$, для которого $q(v) = (v, fv)$. Если все эти собственные числа различны, ортонормальный базис, в котором матрица Грама формы q диагональна, единственен с точностью до перестановки базисных векторов и замены их направлений на противоположные.

Доказательство. По предл. 2.2 в V есть ортонормальный базис из собственных векторов оператора f_q. Матрица Грама формы q в любом ортонормальном базисе совпадает с матрицей оператора f_q. В ортонормальном базисе из собственных векторов она диагональна, причём на её диагонали стоят собственные числа оператора f_q, и каждое собственное число λ присутствует столько раз, какова кратность корня λ в характеристическом многочлене оператора f_q. Поэтому с точностью до перестановки диагональных элементов такая матрица не зависит от выбора нормального базиса. Если все диагональные элементы различны, каждое собственное подпространство оператора f_q одномерно, все они ортогональны друг другу по лем. 2.3, и нормальные базисные векторы с точностью до знака задаются как векторы единичной длины, порождающие эти подпространства. □

§3. Кососимметричные формы и грассмановы многочлены

3.1. Симплектические пространства. Согласно теореме Дарбу[1], каждое векторное пространство с невырожденной кососимметричной формой изометрически изоморфно координатному пространству $\Bbbk^{2n}$, на котором форма имеет в стандартном базисе матрицу Грама

$$J = \begin{pmatrix} 0 & E \\ -E & 0 \end{pmatrix}, \tag{3-1}$$

как в прим. 1.3 на стр. 7. Мы будем называть такие пространства *симплектическими* и обозначать Ω_{2n}, по аналогии с гиперболическими пространствами H_{2n}.

Упражнение 3.1. Убедитесь, что прямая ортогональная сумма $\Omega_{2m} \dotplus \Omega_{2k}$ изометрически изоморфна $\Omega_{2(m+k)}$.

3.1.1. Симплектическая группа. Изометрии $f : \Omega_{2n} \xrightarrow{\sim} \Omega_{2n}$ называются *симплектическими преобразованиями* и образуют группу $\mathrm{Sp}(\Omega_{2n})$, называемую *симплектической группой* пространства Ω_{2n}. Сопоставление оператору его матрицы в симплектическом базисе изоморфно отображает группу $\mathrm{Sp}(\Omega_{2n})$ на *группу симплектических матриц*

$$\mathrm{Sp}_{2n}(\Bbbk) \overset{\text{def}}{=} \{F \in \mathrm{Mat}_{2n}(\Bbbk) \mid F^t \cdot J \cdot F = J\}.$$

Если записать такую матрицу F в блочном виде

$$F = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}, \quad \text{где} \quad A, B, C, D \in \mathrm{Mat}_n(\Bbbk),$$

то условие $F^t \cdot J \cdot F = J$ приобретёт вид

$$\begin{pmatrix} A^t & C^t \\ B^t & D^t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & E \\ -E & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & E \\ -E & 0 \end{pmatrix},$$

и будет равносильно выполнению соотношений $C^tA = A^tC$, $D^tB = B^tD$, $E + C^tB = A^tD$, из которых видно, что полная линейная группа $\mathrm{GL}_n(\Bbbk)$ гомоморфно вкладывается в симплектическую группу $\mathrm{Sp}_{2n}(\Bbbk)$ по правилу

$$G \mapsto \begin{pmatrix} G & 0 \\ 0 & G^{t^{-1}} \end{pmatrix}.$$

Упражнение 3.2. Проверьте все эти утверждения прямыми вычислениями.

3.1.2. Лагранжевы подпространства. Изотропные подпространства максимальной возможной размерности n в симплектическом пространстве Ω_{2n} называются *лагранжевыми*. Прямым аналогом предл. 2.1 на стр. 14 является следующий факт.

Предложение 3.1

Каждое изотропное подпространство U невырожденной кососимметричной формы ω на пространстве V содержится в некотором симплектическом подпространстве $W \subset V$ размерности $\dim W = 2\dim U$, и любой базис в U дополняется до симплектического базиса в W.

[1] См. теор. 1.2 на стр. 12.

Доказательство. Выберем в U базис $u_1, u_2, \dots, u_m$, дополним его до базиса в V и рассмотрим двойственный к нему относительно ω базис. Первые m векторов $u_1^\vee, u_2^\vee, \dots, u_m^\vee$ этого двойственного базиса удовлетворяют равенствам

$$\omega\left(u_i, u_j^\vee\right) = \begin{cases} 1 & \text{при } i = j \\ 0 & \text{при } i \neq j\,, \end{cases} \tag{3-2}$$

которые не нарушаются при добавлении к любому из векторов $u_j^\vee$ любой линейной комбинации векторов u_i. Заменяя каждый вектор $u_j^\vee$ вектором

$$w_j = u_j^\vee - \sum_{\nu<j} \omega\left(u_j^\vee, u_\nu^\vee\right) \cdot u_\nu\,, \tag{3-3}$$

получаем набор векторов $w_1, w_2, \dots, w_m$, также удовлетворяющий равенствам (3-2), но порождающий изотропное подпространство, поскольку для всех $i < j$

$$\omega(w_i, w_j) = \omega(u_i^\vee, u_j^\vee) - \omega(u_j^\vee, u_i^\vee) \cdot \omega(u_i^\vee, u_i) = 0\,.$$

Таким образом, векторы u_i и w_j с $1 \leqslant i, j \leqslant m$ составляют симплектический базис в своей линейной оболочке, которую мы и возьмём в качестве W. □

Теорема 3.1
Для каждого лагранжева подпространства $L \subset V$ найдётся такое лагранжево подпространство $L' \subset V$, что $V = L \oplus L'$. При этом каждый базис $\boldsymbol{e}$ подпространства L однозначно достраивается некоторым базисом $\boldsymbol{e}'$ подпространства L' до симплектического базиса пространства V. При фиксированном L' все дополнительные к L лагранжевы подпространства L'' биективно соответствуют линейным операторам $f : L' \to L$, удовлетворяющим равенству[1]

$$\omega(u_1, fu_2) = -\omega(fu_1, u_2) \text{ для всех } u_1, u_2 \in L'\,.$$

Доказательство. Согласно предл. 3.1 базис $\boldsymbol{e}$ подпространства L достраивается до симплектического базиса в некотором содержащем L симплектическом подпространстве $W \subset V$ размерности $\dim W = 2\dim L = \dim V$. Поэтому $W = V$ и в качестве L' можно взять линейную оболочку последних $n = \dim L$ векторов получающегося таким образом симплектического базиса в V. Индуцированное правой корреляцией $\omega^\wedge : V \to V^*$ отображение

$$\omega_L^\wedge : L' \to L^*\,,\ v \mapsto \omega(*, v)|_L\,, \tag{3-4}$$

переводящее вектор $v \in L'$ в линейную форму $u \mapsto \omega(u, v)$ на подпространстве $L \subset V$, является изоморфизмом векторных пространств, поскольку переводит любой базис $\boldsymbol{e}'$ подпространства L', дополняющий базис $\boldsymbol{e}$ в L до симплектического базиса в V, в двойственный к $\boldsymbol{e}$ базис $\boldsymbol{e}^*$ пространства L^*.

Упражнение 3.3. Убедитесь в этом.

Таким образом, базис $\boldsymbol{e}'$ в L' однозначно восстанавливается по $\boldsymbol{e}$ как прообраз двойственного к $\boldsymbol{e}$ базиса в L^* при независящем от выбора базиса изоморфизме (3-4).

[1] Такие операторы называются *антисамосопряжёнными* или *антиавтодуальными* относительно формы ω.

Далее, каждое дополнительное к L подпространство $L'' \subset L' \oplus L$ биективно проектируется на L' вдоль L, ибо ядро такой проекции равно $L'' \cap L$. Поэтому для любого вектора $u \in L'$ существует единственный такой вектор $f(u) \in L$, что $u + f(u) \in L''$. Правило $u \mapsto f(u)$ задаёт линейное отображение $f : L' \to L$, графиком которого является подпространство $L'' \subset L' \oplus L$. Таким образом мы получаем биекцию между линейными отображениями $f : L' \to L$ и подпространствами $L'' \subset L' \oplus L$, которые изоморфно проектируются на L' вдоль L.

Упражнение 3.4. Убедитесь в этом.

При этой биекции изотропность подпространства L'' в V равносильна антиавтодуальности оператора $f : L' \to L$, графиком которого оно является, ибо

$$\omega\,(u_1 + f(u_1), u_2 + f(u_2)) = \omega\,(u_1, f(u_2)) + \omega\,(f(u_1), u_2)$$

в силу лагранжевости подпространств $L' \ni u_1, u_2$ и $L \ni f(u_1), f(u_2)$. □

3.2. Грассмановы многочлены. Полезным алгебраическим инструментом для работы с кососимметричными формами и определителями является алгебра $\Bbbk\langle\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n\rangle$ *грассмановых многочленов* от переменных $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$ с коэффициентами из поля $\Bbbk$. Она определяется точно также, как и обычная алгебра многочленов, с той только разницей, что грассмановы переменные ξ_i не коммутируют, но *антикоммутируют* друг с другом, т. е. подчиняются соотношениям[1]

$$\forall\, i, j \quad \xi_i \wedge \xi_j = -\xi_j \wedge \xi_i \quad \text{и} \quad \forall\, i \quad \xi_i \wedge \xi_i = 0\,, \tag{3-5}$$

где символ «$\wedge$» обозначает кососимметричное грассманово умножение, дабы отличать его от обычного коммутативного. Поскольку квадраты грассмановых переменных равны нулю, каждый грассманов моном *линеен* по каждой входящей в него переменной. Для каждого набора $I = (i_1, i_2, \dots, i_m)$ строго возрастающих слева направо номеров $i_1 < i_2 < \dots < i_m$ имеется грассманов моном

$$\xi_I \overset{\text{def}}{=} \xi_{i_1} \wedge \xi_{i_2} \wedge \ldots \wedge \xi_{i_m}\,, \tag{3-6}$$

знак которого при перестановке $g \in S_m$ переменных $\xi_{i_1}, \xi_{i_2}, \dots, \xi_{i_m}$ меняется по правилу

$$\xi_{i_{g(1)}} \wedge \xi_{i_{g(2)}} \wedge \dots \wedge \xi_{i_{g(m)}} = \operatorname{sgn}(g) \cdot \xi_{j_1} \wedge \xi_{j_2} \wedge \ldots \wedge \xi_{j_m}\,. \tag{3-7}$$

Мономы (3-6), занумерованные всевозможными подмножествами $I \subset \{1, 2, \dots, n\}$, составляют базис алгебры $\Bbbk\langle\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n\rangle$ как векторного пространства над $\Bbbk$ и перемножаются по правилу

$$\xi_I \wedge \xi_J = \begin{cases} \operatorname{sgn}(I, J) \cdot \xi_{I \sqcup J} & \text{если } I \cap J = \varnothing \\ 0 & \text{если } I \cap J \neq \varnothing \end{cases} \tag{3-8}$$

где $\operatorname{sgn}(I, J) = \pm 1$ обозначает знак *тасующей перестановки*, расставляющей в порядке возрастания набор номеров $i_1, i_2, \dots, i_m, j_1, j_2, \dots, j_k$, в котором $i_1 < i_2 < \dots < i_m$ и $j_1 < j_2 < \dots < j_k$.

Упражнение 3.5. Убедитесь, что для дополнительных друг к другу наборов $I = (i_1, i_2, \dots, i_m)$ и $J = \{1, 2, \dots, n\} \smallsetminus I$ знак $\operatorname{sgn}(I, J) = (-1)^{i_1 + i_2 + \dots + i_m + m(m+1)/2}$.

[1] Если $\operatorname{char} \Bbbk \neq 2$ соотношения $\xi_i \wedge \xi_i = 0$ вытекают из соотношений $\xi_i \wedge \xi_j = -\xi_j \wedge \xi_i$ и могут быть опущены. Однако когда $\operatorname{char} \Bbbk = 2$ именно соотношения на квадраты $\xi_i \wedge \xi_i = 0$ отличает грассмановы переменные от обычных коммутативных.

Единственный моном (3-6) нулевой степени $1 \overset{\text{def}}{=} \xi_{\varnothing}$, отвечающий пустому подмножеству $I = \varnothing$, является единицей грассмановой алгебры. Единственный моном старшей степени

$$\xi_{\text{top}} \overset{\text{def}}{=} \xi_1 \wedge \xi_2 \wedge \ldots \wedge \xi_n$$

аннулируется умножением на любой грассманов многочлен с нулевым свободным членом. Однородные грассмановы многочлены степени k образуют векторное пространство размерности $\binom{n}{k}$, базис в котором составляют мономы (3-6), отвечающие всевозможным k-элементным подмножествам I. Размерность всей грассмановой алгебры $\dim \Bbbk \langle \xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n \rangle = 2^n$.

Два грассмановых монома степеней m и k коммутируют друг с другом по правилу

$$\left(\xi_{i_1} \wedge \xi_{i_2} \wedge \ldots \wedge \xi_{i_m}\right) \wedge \left(\xi_{j_1} \wedge \xi_{j_2} \wedge \ldots \wedge \xi_{j_k}\right) = \\ = (-1)^{km} \left(\xi_{j_1} \wedge \xi_{j_2} \wedge \ldots \wedge \xi_{j_k}\right) \wedge \left(\xi_{i_1} \wedge \xi_{i_2} \wedge \ldots \wedge \xi_{i_m}\right) ,$$

ибо при переносе каждой из k переменных ξ_j через m переменных ξ_i происходит m транспозиций. Поэтому для любых двух однородных грассмановых многочленов η и ω

$$\eta \wedge \omega = (-1)^{\deg \eta \deg \omega} \omega \wedge \eta \, . \tag{3-9}$$

В частности, каждый однородный многочлен чётной степени коммутирует со всеми грассмановыми многочленами.

Упражнение 3.6. Опишите *центр*[1] грассмановой алгебры.

3.3. Грассманова алгебра векторного пространства. Если в векторном пространстве V выбран базис $e_1, e_2, \ldots, e_n$, алгебра грассмановых многочленов $\Bbbk \langle e_1, e_2, \ldots, e_n \rangle$ от базисных векторов пространства V обозначается ΛV и называется *грассмановой* (или *внешней*) алгеброй векторного пространства V. Не апеллирующие к выбору базиса название и обозначение вызваны тем, что пространство однородных грассмановых многочленов степени 1 канонически отождествляется с пространством V и, таким образом, не зависит от выбора базиса, а пространство однородных грассмановых многочленов степени k является линейной оболочкой всевозможных произведений $v_1 \wedge v_2 \wedge \ldots \wedge v_k$ из k произвольных векторов $v_i \in V$ и тоже не зависит от выбора базиса. Обозначая пространство однородных грассмановых многочленов степени k через $\Lambda^k V$, мы получаем разложение алгебры ΛV в прямую сумму векторных пространств

$$\Lambda V = \bigoplus_{k=0}^{n} \Lambda^k V \, ,$$

где $\Lambda^0 V \overset{\text{def}}{=} \Bbbk \cdot 1$ обозначает одномерное пространство констант, тоже не зависящее от базиса.

Если векторы $\boldsymbol{u} = (u_1, u_2, \ldots, u_\ell)$ линейно выражены через векторы $\boldsymbol{w} = (w_1, w_2, \ldots, w_k)$ при помощи некоторой матрицы перехода $C = \left(c_{ij}\right) \in \mathrm{Mat}_{k \times \ell}(\Bbbk)$ по формуле $\boldsymbol{u} = \boldsymbol{w}\, C$, то их грассмановы произведения $u_J = u_{j_1} \wedge u_{j_2} \wedge \ldots \wedge u_{j_m}$ линейно выражаются через грассмановы произведения $w_I = w_{i_1} \wedge w_{i_2} \wedge \ldots \wedge w_{i_m}$ по формулам

$$u_J = u_{j_1} \wedge u_{j_2} \wedge \ldots \wedge u_{j_m} = \left(\sum_{i_1} w_{i_1} c_{i_1 j_1}\right) \wedge \left(\sum_{i_2} w_{i_2} c_{i_2 j_2}\right) \wedge \cdots \wedge \left(\sum_{i_m} w_{i_m} c_{i_m j_m}\right) = \\ = \sum_{1 \leqslant i_1 < i_2 < \cdots < i_n \leqslant n} w_{i_1} \wedge w_{i_2} \wedge \ldots \wedge w_{i_n} \cdot \sum_{g \in S_m} \mathrm{sgn}(g)\, c_{i_{g(1)} j_1} c_{i_{g(2)} j_2} \cdots c_{i_{g(n)} j_n} = \sum_I w_I \cdot c_{IJ} \, ,$$

[1] Т. е. подалгебру, состоящую из всех грассмановых многочленов, которые коммутируют со всеми грассмановыми многочленами.

где $c_{IJ} = \det C_{IJ}$ обозначает определитель $m \times m$-подматрицы $C_{IJ} \subset C$, сосредоточенной в пересечениях столбцов с номерами из J и строк с номерами из I, а суммирование происходит по всем наборам $I = (i_1, i_2, \dots, i_m)$ из m возрастающих номеров $1 \leqslant i_1 < i_2 < \cdots < i_m \leqslant \ell$. Определитель $c_{IJ} = \det C_{IJ}$ называется IJ-тым *минором* m-того порядка в матрице C. Таким образом, IJ-тый элемент матрицы, выражающей грассманов моном u_J через грассмановы мономы w_I равен IJ-тому минору m-того порядка в матрице выражающей векторы $\boldsymbol{u}$ через векторы $\boldsymbol{w}$.

В частности, если наборы векторов $\boldsymbol{e} = (e_1, e_2, \dots, e_n)$ и $\boldsymbol{f} = (f_1, f_2, \dots, f_n)$ оба являются базисами пространства V, то базисные грассмановы мономы e_J пространства $\Lambda^m V$ выражаются через базисные мономы f_I при помощи матрицы перехода размера $\binom{m}{n} \times \binom{m}{n}$, у которой в позиции IJ стоит IJ-тый минор $\left(c_{IJ}\right)$ матрицы $C_{\boldsymbol{fe}}$, выражающей $\boldsymbol{e}$ через $\boldsymbol{f}$. Эта матрица обозначается $\Lambda^m C_{\boldsymbol{fe}}$ и называется m-той *внешней степенью* матрицы $C_{\boldsymbol{fe}}$.

Пример 3.1 (соотношения Лапласа)
Для каждого набора возрастающих индексов $J = (j_1, j_2, \dots, j_m) \subset \{1, 2, \dots, n\}$ положим

$$\deg J \overset{\text{def}}{=} m\,, \quad |J| \overset{\text{def}}{=} j_1 + j_2 + \cdots + j_m$$

и условимся обозначать через $\hat{J} = \left(\hat{j}_1, \hat{j}_2, \dots, \hat{j}_{n-m}\right) = \{1, 2, \dots, n\} \smallsetminus J$ дополнительный к J набор из $\deg \hat{J} = n - m$ возрастающих индексов.

Рассмотрим произвольную квадратную матрицу $A \in \mathrm{Mat}_{n\times n}(\Bbbk)$, столбцы которой, понимаемые как векторы координатного пространства $\Bbbk^n$, обозначим через $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$. Тогда матрица A является матрицей перехода от этих векторов к стандартному базису $e_1, e_2, \dots, e_n$ пространства $\Bbbk^n$. Для любых двух мультииндексов I, J одинаковой длины $\deg I = \deg J = m$ грассмановы произведения α_J и $\alpha_{\hat{I}}$ имеют дополнительные степени m и $n - m$ и перемножаются по форм. (3-8) на стр. 28, которая с учётом упр. 3.5 имеет вид:

$$\alpha_J \wedge \alpha_{\hat{I}} = \begin{cases} (-1)^{|J| + \frac{m(m+1)}{2}} \alpha_1 \wedge \alpha_2 \wedge \ldots \wedge \alpha_n & \text{при } I = J \\ 0 & \text{при } I \neq J\,. \end{cases} \tag{3-10}$$

Выражая грассмановы произведения α_J и $\alpha_{\hat{I}}$ в левой части (3-10) через базисные мономы e_K, получаем

$$\left(\sum_K e_K a_{KJ}\right) \wedge \left(\sum_L e_L a_{L\hat{I}}\right) = (-1)^{\frac{m(m+1)}{2}} e_1 \wedge e_2 \wedge \ldots \wedge e_n \sum_K (-1)^{|K|} a_{KJ} a_{\hat{K}\hat{I}}\,,$$

где K пробегает все возрастающие мультииндексы длины $\deg K = m$. Поскольку правая часть формулы (3-10) при $I = J$ равна $(-1)^{\frac{m(m+1)}{2} + |J|} \det A \cdot e_1 \wedge e_2 \wedge \ldots \wedge e_n$, для любых двух наборов J, I из m строк произвольной квадратной матрицы A выполняются *соотношения Лапласа*

$$\sum_K (-1)^{|K|+|J|} a_{KJ} a_{\hat{K}\hat{I}} = \begin{cases} \det A & \text{при } I = J \\ 0 & \text{при } I \neq J \end{cases} \tag{3-11}$$

где суммирование идёт по всем наборам K из $m = \deg K$ строк матрицы A.

При $I = J$ соотношение (3-11) даёт формулу для вычисления определителя[1]

$$\det A = \sum_K (-1)^{|K|+|J|} a_{KJ} a_{\hat{K}\hat{J}} \tag{3-12}$$

[1] С геометрической точки зрения эта формула вычисляет объём n-мерного параллелепипеда через объёмы его m-мерных и $(n-m)$-мерных граней.

через всевозможные миноры a_{KJ} порядка m, сосредоточенные в m фиксированных столбцах матрицы A с номерами J, и *дополнительные* к ним миноры $a_{\hat{J}\hat{K}}$ порядка $n-m$, равные определителям матриц, получающихся из A вычёркиванием всех строк и столбцов, которые высекают минор a_{KJ}. Произведение $(-1)^{|K|+|J|}a_{\hat{K}\hat{J}}$ называется *алгебраическим дополнением* к минору a_{KJ} и обозначается $\hat{a}_{KJ}$.

При $I \neq J$ соотношение (3-11) имеет вид $\sum_K a_{KJ}\hat{a}_{IK} = 0$ и называется *теоремой об умножении на чужие алгебраические дополнения*, поскольку его левая часть отличается от левой части (3-12) тем, что миноры a_{KJ} умножаются не на свои алгебраические дополнения $\hat{a}_{KJ}$, а на дополнения $\hat{a}_{IK}$ к минорам a_{IK}, сосредоточенным в другом наборе столбцов $I \neq J$.

Если согласованно занумеровать все m-элементные подмножества и все $(n-m)$-элементные подмножества в множестве $\{1, 2, \dots , n\}$ так, чтобы дополнительные подмножества J и $\hat{J}$ имели одинаковые номера, то соотношения Лапласа можно записать одним равенством

$$\Lambda^m A \cdot \Lambda^{n-m}\hat{A}^t = \det A \cdot E \tag{3-13}$$

на матрицы размера $\binom{n}{m}\times\binom{n}{m}$, в котором (IJ)-тый элемент матрицы $\Lambda^{n-m}\hat{A}^t$ равен

$$\hat{a}_{JI} = (-1)^{|J|+|I|}a_{\hat{J}\hat{I}} \,.$$

Упражнение 3.7. Установите транспонированный вариант соотношений Лапласа

$$\sum_K a_{JK}\hat{a}_{IK} = \begin{cases} \det A & \text{при } I = J \\ 0 & \text{при } I \neq J \end{cases} \tag{3-14}$$

Пример 3.2 (определитель пучка матриц)
Линейная оболочка пары непропорциональных квадратных матриц $A, B \in \mathrm{Mat}_{n\times n}(\Bbbk)$ называется *пучком матриц* и обозначается (AB). Таким образом, всякая матрица из пучка (AB) имеет вид t_0A+t_1B, где $t_0, t_1 \in \Bbbk$, а её определитель $\det(t_0A+t_1B)$ является однородным многочленом степени n от t_0, t_1. Покажем, что коэффициент этого многочлена при $t_0^k t_1^{n-k}$ равен

$$\sum_{IJ} a_{IJ}\hat{b}_{IJ} \,, \tag{3-15}$$

где суммирование идёт по всем k-элементным подмножествам $I, J \subset \{1, 2, \dots , n\}$.

Для этого обозначим через $a_1, a_2, \dots , a_n$ и $b_1, b_2, \dots , b_n$ столбцы матриц A и B, понимаемые как векторы координатного пространства $\Bbbk^n$ со стандартным базисом $e_1, e_2, \dots , e_n$. Тогда

$$(t_0a_1 + t_1b_1) \wedge (t_0a_2 + t_1b_2) \wedge \dots \wedge (t_0a_n + t_1b_n) = \det(t_0A + t_1B)\, e_1 \wedge e_2 \wedge \dots \wedge e_n \,.$$

Моном $t_0^k t_1^{n-k}$ возникает в левой части при выборе первого слагаемого в каких-нибудь k из перемножаемых скобок и второго слагаемого в остальных $n-k$ скобках. Если обозначить номера этих k скобок через $I = (i_1, i_2, \dots , i_k)$ то вклад в коэффициент при $t_0^k t_1^{n-k}$ будет равен

$$(-1)^{\frac{k(k+1)}{2}+|I|}a_I \wedge b_{\hat{I}} = (-1)^{\frac{k(k+1)}{2}+|I|}\Big(\sum_J e_J a_{JI}\Big) \wedge \Big(\sum_K e_K b_{K\hat{I}}\Big) =$$

$$= (-1)^{\frac{k(k+1)}{2}+|I|}\sum_{JK} e_J \wedge e_K \cdot a_{JI}b_{K\hat{I}} = e_1 \wedge e_2 \wedge \dots \wedge e_n \cdot \sum_J (-1)^{|I|+|J|}a_{JI}b_{\hat{J}\hat{I}}$$

Полный коэффициент при $t_0^k t_1^{n-k}$ в $\det(t_0 A + t_1 B)$ получается суммированием таких подобных слагаемых по всем наборам I из k возрастающих номеров, что и даёт формулу (3-15). В обозначениях из (3-13) её можно переписать в виде

$$\det(t_0 A + t_1 B) = \sum_{k=0}^{n} \operatorname{tr}\left(\Lambda^k A \cdot \Lambda^{n-k} \hat{A}^t\right) t_0^k t_1^{n-k}\,, \tag{3-16}$$

Пример 3.3 (грассмановы квадратичные формы)
Покажем, что каждый ненулевой однородный грассманов многочлен второй степени $\omega \in \Lambda^2 V$ на конечномерном пространстве V над любым полем $\Bbbk$ в подходящем базисе $\boldsymbol{e}$ пространства V может быть записан в *нормальном виде Дарбу*

$$e_1 \wedge e_2 + e_3 \wedge e_4 + \cdots + e_{2r-1} \wedge e_{2r}\,. \tag{3-17}$$

Для этого рассмотрим произвольный базис $\boldsymbol{u}$ и перенумеруем его векторы так, чтобы

$$\omega = u_1 \wedge (\alpha_2 u_2 + \cdots + \alpha_n u_n) + u_2 \wedge (\beta_3 u_3 + \cdots + \beta_n u_n) + (\text{члены без } u_1 \text{ и } u_2)\,,$$

где коэффициент $\alpha_2 \neq 0$ и вектор $v_2 \stackrel{\text{def}}{=} \alpha_2 u_2 + \cdots + \alpha_n u_n \neq 0$. Перейдём к новому базису $\boldsymbol{v}$ из векторов $v_i = u_i$ при $i \neq 2$ и вектора v_2.

Упражнение 3.8. Убедитесь, что это действительно базис.

Подставляя в предыдущую формулу $u_2 = \left(v_2 - \alpha_3 v_3 - \cdots - \alpha_n v_n\right)/\alpha_2$, получаем

$$\begin{aligned}\omega = v_1 \wedge v_2 + v_2 \wedge (\gamma_3 v_3 + \cdots + \gamma_n v_n) + (\text{члены без } v_1 \text{ и } v_2) = \\ = (v_1 - \gamma_3 v_3 - \cdots - \gamma_n v_n) \wedge v_2 + (\text{члены без } v_1 \text{ и } v_2)\end{aligned}$$

для некоторых $\gamma_3, \dots, \gamma_n \in \Bbbk$. Переходя к базису $\boldsymbol{w}$ из векторов $w_1 = v_1 - \gamma_3 v_3 - \cdots - \gamma_n v_n$ и $w_i = v_i$ при $i \neq 1$, получаем $\omega = w_1 \wedge w_2 + (\text{члены без } w_1 \text{ и } w_2)$, после чего процесс может быть продолжен по индукции.

Замечание 3.1. (поляризация грассмановой квадратичной формы) Если $\operatorname{char}\Bbbk \neq 2$, то каждый однородный грассманов многочлен второй степени $\omega \in \Lambda^2 V$ можно однозначно выразить через произвольно зафиксированный базис $\boldsymbol{e} = (e_1, e_2, \dots, e_n)$ пространства V в виде

$$\omega = \sum_{ij} \omega_{ij}\, e_i \wedge e_j = \left(\boldsymbol{e}\, \Omega_{\boldsymbol{e}}\right) \wedge \boldsymbol{e}^t\,, \quad \text{где} \quad \Omega_{\boldsymbol{e}} = \left(\omega_{ij}\right) \in \operatorname{Mat}_n(\Bbbk)\,,$$

индексы i, j независимо пробегают все значения от 0 до n, а числа $\omega_{ij} \in \Bbbk$ кососимметричны по этим индексам, т. е. $\omega_{ij} = -\omega_{ji}$ и $\omega_{ii} = 0$. Таким образом, при $i < j$ число ω_{ij} равно половине коэффициента при базисном грассмановом мономе $e_{ij} = e_i \wedge e_j$ в приведённом разложении многочлена ω по стандартному базису из форм. (3-6) на стр. 28. Кососимметричная матрица $\Omega_{\boldsymbol{e}} = \left(\omega_{ij}\right)$ называется *матрицей Грама* квадратичного грассманова многочлена ω в базисе $\boldsymbol{e}$. При выборе другого базиса $\boldsymbol{f}$, через который базис $\boldsymbol{e}$ выражается по формуле $\boldsymbol{e} = \boldsymbol{f}\, C_{\boldsymbol{fe}}$, матрица Грамма $\Omega_{\boldsymbol{f}}$ многочлена ω в базисе $\boldsymbol{f}$ будет связана с матрицей Грама $\Omega_{\boldsymbol{e}}$ соотношением

$$\Omega_{\boldsymbol{e}} = C_{\boldsymbol{fe}} \Omega_{\boldsymbol{e}} C_{\boldsymbol{fe}}^t \tag{3-18}$$

поскольку $\omega = \left(\boldsymbol{e}\, \Omega_{\boldsymbol{e}}\right) \wedge \boldsymbol{e}^t = \left(\boldsymbol{f}\, C_{\boldsymbol{fe}} \Omega_{\boldsymbol{e}}\right) \wedge \left(C_{\boldsymbol{fe}}^t \boldsymbol{f}^t\right) = \left(\boldsymbol{f}\, C_{\boldsymbol{fe}} \Omega_{\boldsymbol{e}} C_{\boldsymbol{fe}}^t\right) \wedge \boldsymbol{f}^t$.

В частности, над полем характеристики $\operatorname{char}\Bbbk \neq 2$ результат предыдущего прим. 3.3 можно было бы вывести из теоремы Дарбу[1] о кососимметричных билинейных формах, в доказательстве которой мы видели, что для любой кососимметричной матрицы Ω существует такая обратимая матрица C, что все ненулевые элементы матрицы $C\Omega C^t$ сосредоточены в расположенных на главной диагонали 2×2-блоках вида $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$. Таким образом, грассманова квадратичная форма, имеющая матрицу Грама Ω в некотором базисе $\boldsymbol{f}$, в базисе $\boldsymbol{e} = \boldsymbol{f}\,C$ записывается как $\omega = 2\,(e_1 \wedge e_2 + e_3 \wedge e_4 + \cdots)$, откуда уже совсем легко перейти к виду (3-17).

Предложение 3.2

Над полем $\Bbbk$ характеристики $\operatorname{char}\Bbbk \neq 2$ однородный грассманов многочлен $\omega \in \Lambda^2 V$ тогда и только тогда разложим в произведение $u \wedge w$ двух векторов $u, w \in V$, когда $\omega \wedge \omega = 0$.

Доказательство. Если $\omega = u \wedge w$, то $\omega \wedge \omega = u \wedge w \wedge u \wedge w = 0$. Чтобы получить обратное, выберем в V базис $\boldsymbol{e}$, в котором $\omega = e_1 \wedge e_2 + e_3 \wedge e_4 + \cdots$. Если в этой сумме есть хотя бы два слагаемых, то базисный моном $e_1 \wedge e_2 \wedge e_3 \wedge e_4$ войдёт в $\omega \wedge \omega$ с ненулевым коэффициентом 2, а значит, $\omega \wedge \omega \neq 0$. Таким образом, равенство $\omega \wedge \omega = 0$ влечёт равенство $\omega = e_1 \wedge e_2$. □

3.4. Пфаффиан. Рассмотрим кососимметричную матрицу $A = (a_{ij})$ размера $(2n)\times(2n)$. Будем считать её элементы a_{ij} с $i < j$ независимыми коммутирующими переменными и обозначим через $\mathbb{Z}[a_{ij}]$ кольцо многочленов от этих переменных с целыми коэффициентами. В этом разделе мы покажем, что существует и единствен такой многочлен $\operatorname{Pf}(A) \in \mathbb{Z}[a_{ij}]$, что

$$\operatorname{Pf}(A)^2 = \det(A) \quad \text{и} \quad \operatorname{Pf}(J') = 1\,,$$

где J' — блочно диагональная матрица из n идущих по главной диагонали 2×2-блоков

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\,,$$

как в доказательстве теор. 1.2 на стр. 12. Многочлен $\operatorname{Pf}(A)$ называется *пфаффианом* кососимметричной матрицы A и явно выражается через матричные элементы по формуле

$$\operatorname{Pf}(A) = \sum_{\substack{\{i_1,j_1\}\sqcup\dots\sqcup\{i_n,j_n\}=\\=\{1,2,\dots,2n\}}} \operatorname{sgn}\bigl(i_1 j_1 i_2 j_2 \dots i_n j_n\bigr)\cdot a_{i_1 j_1} a_{i_2 j_2} \cdots a_{i_n j_n}\,, \tag{3-19}$$

где суммирование происходит по всем разбиениям множества $\{1,\,2,\,\dots\,,\,2n\}$ в объединение n неупорядоченных непересекающихся двухэлементных множеств $\{i_\nu, j_\nu\}$, порядок внутри которых тоже не существен, а sgn означает знак указанной в его аргументе перестановки из симметрической группы S_{2n}.

Упражнение 3.9. Убедитесь, что этот знак не меняется при перестановках пар друг с другом, а вся правая часть (3-19) не меняется при перестановке элементов внутри любой из пар.

Например,

$$\det\begin{pmatrix} 0 & a_{12} \\ -a_{12} & 0 \end{pmatrix} = a_{12}^2\,, \quad \det\begin{pmatrix} 0 & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ -a_{12} & 0 & a_{23} & a_{24} \\ -a_{13} & -a_{23} & 0 & a_{34} \\ -a_{14} & -a_{24} & -a_{34} & 0 \end{pmatrix} = (a_{12}a_{23} - a_{13}a_{24} + a_{14}a_{23})^2\,.$$

[1] См. теор. 1.2 на стр. 12.

Чтобы хоть как-то извлечь квадратный корень из $\det A$, интерпретируем A как матрицу Грама невырожденной кососимметричной формы в стандартном базисе координатного векторного пространства K^{2n} над полем $K = \mathbb{Q}(a_{ij})$ рациональных функций от переменных a_{ij} с коэффициентами в поле $\mathbb{Q}$. Доказывая теор. 1.2 на стр. 12, мы видели, что в K^{2n} есть базис, в котором эта форма имеет матрицу Грама J'. Поэтому $A = C^t \cdot J' \cdot C$ для некоторой матрицы $C \in \mathrm{GL}_{2n}(K)$. Так как $\det J' = 1$, определитель $\det(A) = \det(C)^2$. Остаётся убедиться, что $\det C$ является многочленом с целыми коэффициентами и вычисляется по формуле (3-19).

Для этого рассмотрим ещё одну кососимметричную матрицу $B = \big(b_{ij}\big)$, наддиагональные элементы b_{ij} которой также будем считать независимыми переменными, и образуем однородный грассманов многочлен $\beta_B(\xi)$ степени 2 от грассмановых переменных $\xi = (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_{2n})$ с коэффициентами в кольце $\mathbb{Z}[b_{ij}]$ по формуле $\beta_B(\xi) \overset{\text{def}}{=} \big(\xi B\big) \wedge \xi^t = \sum_{ij} b_{ij}\xi_i \wedge \xi_j$. Поскольку чётные мономы $\xi_i \wedge \xi_j$ лежат в центре грассмановой алгебры, n-тая грассманова степень

$$\begin{aligned}
\beta_B(\xi)^{\wedge n} &= \beta_B(\xi) \wedge \dots \wedge \beta_B(\xi) = \\
&= \Big(\sum_{i_1 j_1} b_{i_1 j_1}\xi_{i_1} \wedge \xi_{j_1}\Big) \wedge \Big(\sum_{i_2 j_2} b_{i_2 j_2}\xi_{i_2} \wedge \xi_{j_2}\Big) \wedge \dots \wedge \Big(\sum_{i_n j_n} b_{i_n j_n}\xi_{i_n} \wedge \xi_{j_n}\Big) = \\
&= 2^n n! \sum_{\substack{\{i_1, j_1\} \sqcup \dots \sqcup \{i_n, j_n\} = \\ = \{1,\,2,\,\dots\,,\,2n\}}} \mathrm{sgn}\big(i_1 j_1 i_2 j_2 \dots i_n j_n\big) b_{i_1 j_1} b_{i_2 j_2} \cdots b_{i_n j_n} \xi_1 \wedge \xi_2 \wedge \dots \wedge \xi_{2n} = \\
&= 2^n n!\, \mathrm{Pf}(B)\, \xi_1 \wedge \xi_2 \wedge \dots \wedge \xi_{2n}\,,
\end{aligned} \tag{3-20}$$

где в предпоследней строке, как и в формуле (3-19), суммирование происходит по всем разбиениям множества $\{1,\,2,\,\dots\,,\,2n\}$ в объединение n неупорядоченных непересекающихся двухэлементных множеств $\{i_\nu, j_\nu\}$, порядок внутри которых тоже не существен, и $\mathrm{Pf}(B) \in \mathbb{Z}[b_{ij}]$ означает тот же самый многочлен, что и в формуле (3-19). Заменим в (3-20) грассмановы переменные ξ на новые грассмановы переменные η по формуле $\xi = \eta\, C$, где матрица $C \in \mathrm{GL}_{2n}(K)$ такова, что $C^t J' C = A$. В правой части (3-20) получим $2^n n!\, \mathrm{Pf}(B)\, \det C\, \eta_1 \wedge \eta_2 \wedge \dots \wedge \eta_{2n}$. Квадратичная форма $\beta_B(\xi)$ в самой левой части (3-20) превратится в

$$\beta_B(\xi) = (\xi\, B) \wedge \xi^t = (\eta\, CB) \wedge (\eta\, C)^t = (\eta\, CBC^t) \wedge \eta^t = \beta_{CBC^t}(\eta)\,,$$

а её n-тая грассманова степень — в $\beta_{CBC^t}(\eta)^{\wedge n} = 2^n n!\, \mathrm{Pf}(CBC^t)\eta_1 \wedge \eta_2 \wedge \dots \wedge \eta_{2n}$. Таким образом мы приходим к равенству $\mathrm{Pf}(CBC^t) = \mathrm{Pf}(B)\, \det C$ в кольце $K[b_{ij}]$. Полагая в этом равенстве $B = J'$, получаем в поле $K = \mathbb{Q}(a_{ij})$ равенство $\mathrm{Pf}(A) = \det C$. Это доказывает существование пфаффина и формулу (3-19). Единственность пфаффиана вытекает из того, что многочлен

$$x^2 - \det A = \big(x - \mathrm{Pf}(A)\big)\big(x + \mathrm{Pf}(A)\big) \in \mathbb{Z}[a_{ij}][x]$$

имеет в целостном кольце $\mathbb{Z}[a_{ij}]$ ровно два корня $x = \pm\mathrm{Pf}(A)$, и требование $\mathrm{Pf}(J') = 1$ однозначно фиксирует нужный знак.

§4. Проективные пространства

4.1. Проективизация. С каждым $(n+1)$-мерным векторным пространством V над произвольным полем $\Bbbk$ помимо $(n+1)$-мерного аффинного пространства $\mathbb{A}^{n+1} = \mathbb{A}(V)$ связано n-мерное *проективное пространство* $\mathbb{P}_n = \mathbb{P}(V)$, точками которого по определению являются одномерные векторные подпространства в V или, что то же самое, проходящие через начало координат аффинные прямые в $\mathbb{A}(V)$. Чтобы наблюдать их как «обычные точки», внутрь $\mathbb{A}(V)$ следует поместить экран — не содержащую начала координат аффинную гиперплоскость. Каждая такая гиперплоскость однозначно задаётся неоднородным линейным уравнением $\xi(x) = 1$, где $\xi \in V^*$ — ненулевая линейная форма на V (см. рис. 4◇1), и называется *аффинной картой* U_ξ на $\mathbb{P}(V)$.

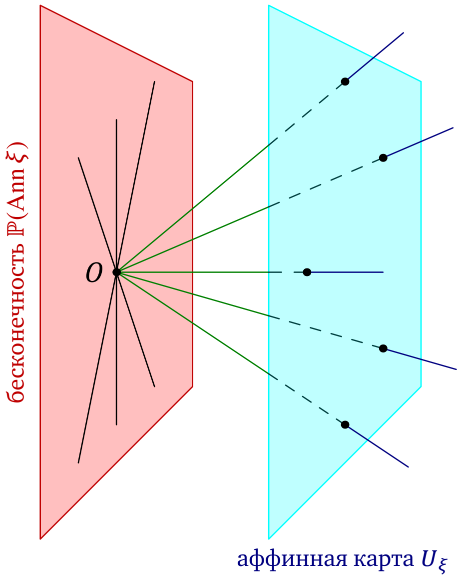

Рис. 4◇1. Проективный мир.

Упражнение 4.1. Убедитесь, что сопоставление

$$\xi \mapsto U_\xi$$

задаёт биекцию между ненулевыми ковекторами $\xi \in V^*$ и не проходящими через начало координат аффинными гиперплоскостями в $\mathbb{A}(V)$.

В карте U_ξ видны все одномерные подпространства, порождённые векторами $v \in V$ с $\xi(v) \neq 0$. Дополнение $\mathbb{P}_n \smallsetminus U_\xi$ состоит из одномерных подпространств, лежащих в параллельном экрану U_ξ векторном подпространстве $\mathrm{Ann}\,\xi \subset V$ размерности n. Таким образом, невидимые в карте U_ξ точки n-мерного проективного проективного пространства $\mathbb{P}_n = \mathbb{P}(V)$ образуют $(n-1)$-мерное проективное пространство $\mathbb{P}_{n-1} = \mathbb{P}(\mathrm{Ann}\,\xi)$. Оно называется *бесконечно удалённой гиперплоскостью* карты U_ξ. Точки $\mathbb{P}(\mathrm{Ann}\,\xi)$ можно воспринимать как *направления* в аффинной карте U_ξ.

Из сказанного вытекает, что n-мерное проективное пространство $\mathbb{P}_n$ разбивается в дизъюнктное объединение аффинных пространств всех размерностей от 0 до n :

$$\mathbb{P}_n = U_\xi \sqcup \mathbb{P}(\mathrm{Ann}\,\xi) = \mathbb{A}^n \sqcup \mathbb{P}_{n-1} = \mathbb{A}^n \sqcup \mathbb{A}^{n-1} \sqcup \mathbb{P}_{n-2} = \cdots = \mathbb{A}^n \sqcup \mathbb{A}^{n-1} \sqcup \ldots \sqcup \mathbb{A}^0 ,$$

где $\mathbb{A}^0 = \mathbb{P}_0$ это одна точка.

Упражнение 4.2. Какое соотношение на q получится, если независимо подсчитать количества точек в левой и правой части этого равенства над конечным полем из q элементов?

4.1.1. Глобальные однородные координаты. Зафиксируем в V координаты $x_0, x_1, \ldots, x_n$ относительно какого-нибудь базиса $e_0, e_1, \ldots, e_n$. Два ненулевых вектора

$$v = (x_0, x_1, \ldots, x_n) \quad \text{и} \quad w = (y_0, y_1, \ldots, y_n)$$

задают одну и ту же точку $p \in \mathbb{P}_n$если и только если их координаты пропорциональны. Последнее равносильно равенству отношений[1] $x_\mu : x_\nu = y_\mu : y_\nu$ для всех $0 \leqslant \mu \neq \nu \leqslant n$.

[1]При этом равенства вида $0 : x = 0 : y$ и $x : 0 = y : 0$, в которых x и y либо одновременно отличны от нуля, либо одновременно нулевые, тоже допускаются и считаются истинными.

Иначе говоря, с точкой $p \in \mathbb{P}_n$ взаимно однозначно связаны не координаты ненулевого вектора, задающего эту точку, а только отношения $(x_0 : x_1 : \ldots : x_n)$ между ними. Эти отношения называется *однородными координатами* точки p в базисе $e_0, e_1, \ldots, e_n$.

4.1.2. Локальные аффинные координаты. Любой набор ковекторов $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n \in V^*$, дополняющий ковектор ξ до базиса в V^*, задаёт в аффинной карте U_ξ аффинную систему координат с началом в точке e_0 и базисными векторами $e_1, e_2, \ldots, e_n$, где $e_0, e_1, \ldots, e_n$ это двойственный к ξ, $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ базис пространства V.

Упражнение 4.3. Убедитесь, что $e_0 \in U_\xi$, а $e_1, e_2, \ldots, e_n$ составляют базис в $\operatorname{Ann} \xi$.

Каждое наблюдаемое в карте U_ξ одномерное подпространство, порождённое ненулевым вектором $v \in V$, изображается в нём точкой $v/\xi(v) \in U_\xi$ с аффинными координатами

$$t_i = \xi_i\big(v/\xi(v)\big) = \xi_i(v)/\xi(v), \quad \text{где} \quad 1 \leqslant i \leqslant n\,.$$

Обратите внимание, что локальные аффинные координаты точки $v \in \mathbb{P}(V)$ являются не линейными, а дробно линейными функциями от глобальных однородных координат этой точки.

Пример 4.1 (проективная прямая)
Проективная прямая $\mathbb{P}_1 = \mathbb{P}_1(\Bbbk) = \mathbb{P}(\Bbbk^2)$ целиком покрывается двумя аффинными картами $U_0 = U_{x_0}$ и $U_1 = U_{x_1}$, которые представляют собою прямые $x_0 = 1$ и $x_1 = 1$ в аффинном пространстве $\Bbbk^2$, см. рис. 4◇2.

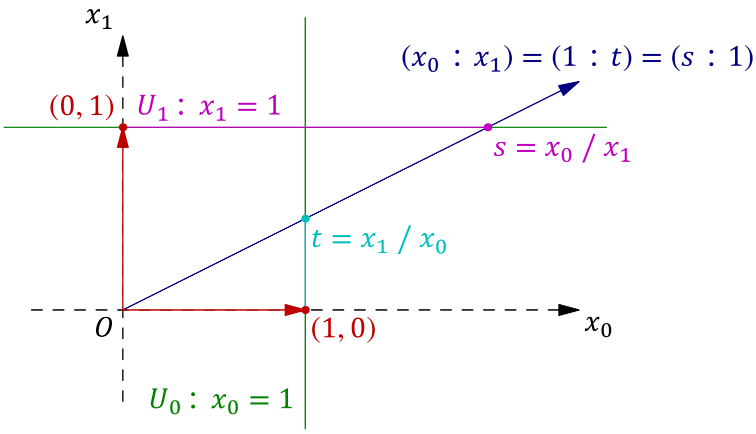

Рис. 4◇2. Стандартные карты на $\mathbb{P}_1$.

В карте U_0 видны все одномерные подпространства в $\Bbbk^2$ кроме вертикальной координатной оси $(0 : 1)$, которая является единственной бесконечно удалённой точкой этой карты. В качестве локальной аффинной координаты на U_0 годится функция $t = x_1/x_0$. В карте U_1 видны все точки $(x_0 : x_1) = \left(\frac{x_0}{x_1} : 1\right)$, у которых $x_1 \neq 0$, и в качестве локальной аффинной координаты в этой карте можно взять функцию $t = x_0/x_1$. Единственной бесконечно удалённой точкой для карты U_1 является горизонтальная координатная ось $(1 : 0)$. Координаты s и t одной и той же точки $(x_0 : x_1) \in \mathbb{P}_1$, видимой сразу в обеих картах, связаны соотношением $t = 1/s$.

Упражнение 4.4. Убедитесь в этом.

Таким образом, проективная прямая $\mathbb{P}_1(\Bbbk)$ является результатом склейки двух аффинных прямых $\mathbb{A}^1 = \Bbbk$ с координатами s и t вдоль дополнения до начал координат по правилу: точка с координатой s на первой прямой отождествляется с точкой с координатой $t = 1/s$ на второй.

Если основное поле $\Bbbk = \mathbb{R}$, результат такой склейки можно представлять себе как окружность диаметра 1, склеенную из двух диаметрально противоположных касательных прямых, каждая из которых проектируется на окружность из точки, диаметрально противоположной к точке своего касания, см. рис. 4◇3.

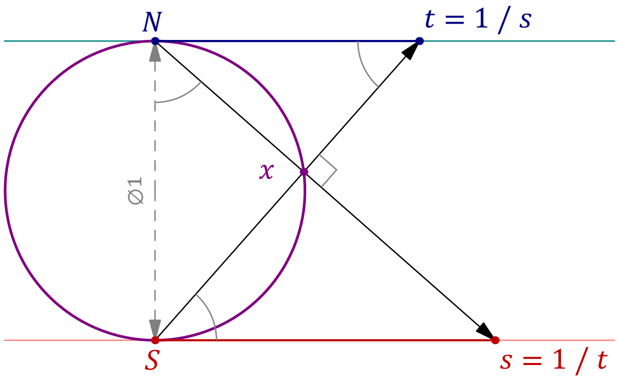

Рис. 4◇3. $\mathbb{P}_1(\mathbb{R}) \simeq S^1$.

Из подобия прямоугольных треугольников NSs и tNS на рис. 4◇3 вытекает, что точка с координатой s на верхней касательной и точка с координатой t на нижней проектируются в одну и ту же точку x окружности если и только если $t = 1/s$. Получаемое таким образом отождествление «пополненной числовой прямой» $\mathbb{P}_1(\mathbb{R}) = \mathbb{R} \sqcup \infty$ с окружностью хорошо согласуется с принятыми в вещественном анализе представлениями о бесконечности: уходу координаты t на бесконечность по верхней числовой прямой отвечает стремление к нулю координаты $s = 1/t$ на нижней, и сжимающиеся ε-окрестности точки S на окружности выглядят на верхней числовой прямой как дополнения до неограниченно увеличивающихся отрезков $[-1/\varepsilon, 1/\varepsilon]$, используемые в анализе как «окрестности бесконечности».

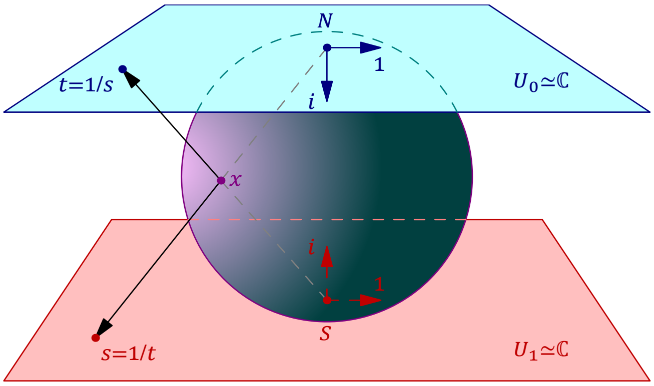

Рис. 4◇4. $\mathbb{P}_1(\mathbb{C}) \simeq S^2$.

При $\Bbbk = \mathbb{C}$ результат склейки двух аффинных прямых $\mathbb{A}^1 = \mathbb{C}$ вдоль дополнений до нуля по правилу $t \leftrightarrow 1/t$ можно воспринимать как сферу диаметра 1, склеенную из двух диаметрально противоположных касательных плоскостей, каждая из которых стереографически проектируется на сферу из точки, диаметрально противоположной к точке своего касания со сферой, см. рис. 4◇4. Если за начала отсчёта в каждой из плоскостей принять точку касания, а векторы

$1, i \in \mathbb{C}$ направить так[1], как на рис. 4◇4, то комплексные числа s и t из разных плоскостей проектируются в одну и ту же точку P сферы если и только если[2] $\operatorname{Arg} s = -\operatorname{Arg} t$ и $|s| = 1/|t|$, т. е. когда $s = 1/t$ в $\mathbb{C}$. По этой причине комплексную проективную прямую $\mathbb{P}_1(\mathbb{C})$ часто называют *сферой Римана*, а также *пополненной комплексной плоскостью*.

Пример 4.2 (вещественная проективная плоскость $\mathbb{P}_2(\mathbb{R}) = \mathbb{P}(\mathbb{R}^3)$)
Как топологическое пространство, вещественная проективная плоскость допускает следующее наглядное описание. Каждая проходящая через начало координат прямая в $\mathbb{R}^3$ пересекает единичную замкнутую полусферу $x_0^2 + x_1^2 + x_2^2 = 1$, $x_0 \geqslant 0$. При этом любая не лежащая в плоскости $x_0 = 0$ прямая пересекает полусферу ровно в одной внутренней точке, а каждая прямая из плоскости $x_0 = 0$ — в двух диаметрально противоположных точках границы. Таким образом, топологическое пространство $\mathbb{P}_2(\mathbb{R})$ гомеоморфно[3] полусфере, у которой склеены диаметрально противоположные точки границы. Поскольку полусфера гомеоморфна квадрату, то же пространство получится при склейке противоположных сторон квадрата с обращением их ориентации, как на рис. 4◇5.

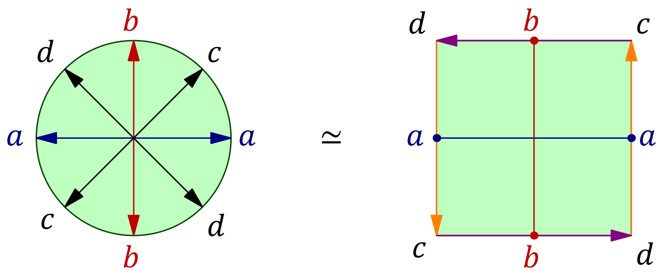

Рис. 4◇5. $\mathbb{P}_2(\mathbb{R})$ это квадрат со склеенными противоположными точками границы.

Результат такой склейки иначе можно описать как лету Мёбиуса, к граничной окружности которой приклеен — по своей граничной окружности — диск, см. рис. 4◇6.

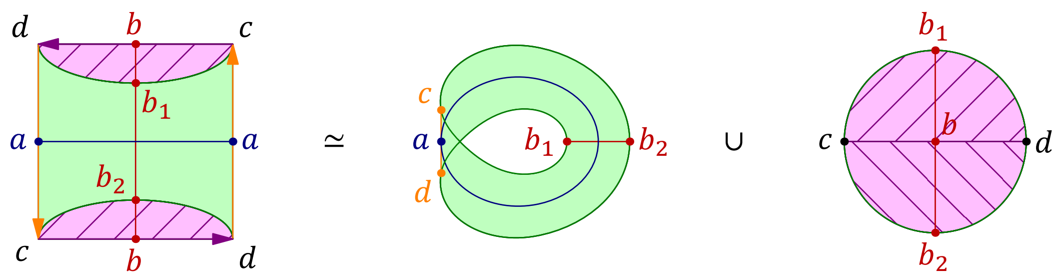

Рис. 4◇6. $\mathbb{P}_2(\mathbb{R})$ это лента Мёбиуса с заклеенной диском границей.

[1]Обратите внимание, что ориентации плоскостей при этом согласованы в том смысле, что одну из них можно непрерывным перекатыванием по поверхности сферы совместить с другой так, что ориентации будут одинаковыми.

[2]Первое очевидно из рис. 4◇4, второе — из рассмотрения сечения сферы плоскостью NxS, которое изображено на рис. 4◇3 выше.

[3]Биективное отображение между топологическими пространствами называется *гомеоморфизмом*, если и оно, и обратное к нему отображения оба непрерывны.

Обратите внимание, что красный вертикальный и синий горизонтальный отрезки квадрата превращаются при склейке в две петли[1] на $\mathbb{P}_2(\mathbb{R})$, которые пересекаются по одной точке, причём при малых шевелениях этих петель они по-прежнему будут пересекаться в одной точке. Это означает, что ни одну из них нельзя стянуть в точку непрерывной деформацией внутри $\mathbb{P}_2(\mathbb{R})$.

Упражнение 4.5. Убедитесь, что устойчивое к малым шевелениям количество точек пересечения непрерывно стягиваемой в точку петли с любой другой петлёй чётно.

При этом, если петлю a, т. е. экватор ленты Мёбиуса, пройти в одном направлении дважды, то возникающая таким образом «удвоенная петля» непрерывно деформируется в границу ленты Мёбиуса, а значит, может быть стянута внутри $\mathbb{P}_2(\mathbb{R})$ в точку по приклеенному к границе ленты Мёбиуса диску. Таким образом, на $\mathbb{P}_2(\mathbb{R})$ есть нестягиваемая петля, двойной обход которой стягиваем.

Пример 4.3 (вещественное проективное пространство $\mathbb{P}_3(\mathbb{R}) \simeq \mathrm{SO}_3(\mathbb{R})$)
Каждая собственная линейная изометрия трёхмерного евклидова пространства $\mathbb{R}^3$ является поворотом вокруг некоторой прямой. Изобразим поворот вокруг прямой с направляющим вектором e единичной длины на угол $\varphi \in [0, \pi]$, если смотреть вдоль вектора e, точкой[2] $\varphi \cdot e \in \mathbb{R}^3$. В результате все повороты на углы, меньшие π, изобразятся внутренними точками шара радиуса π с центром в нуле. Диаметрально противоположным точкам ограничивающей этот шар сферы отвечает одна и та же изометрия — поворот на угол π вокруг соединяющей эти точки прямой[3]. Таким образом собственная ортогональная группа $\mathrm{SO}_3(\mathbb{R})$ евклидова пространства $\mathbb{R}^3$ гомеоморфна трёхмерному шару со склеенными диаметрально противоположными точками ограничивающей этот шар сферы. С другой стороны, конструкция из предыдущего прим. 4.2, применённая к пространству $\mathbb{R}^4$, показывает, что вещественное проективное пространство $\mathbb{P}_3(\mathbb{R}) = \mathbb{P}(\mathbb{R}^4)$ допускает точно такое же описание: каждая проходящая через начало координат прямая в $\mathbb{R}^4$ пересекает единичную замкнутую полусферу

$$x_0^2 + x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1\,, \quad x_0 \geqslant 0\,,$$

и все не лежащие в гиперплоскости $x_0 = 0$ прямые пересекают её в единственной внутренней точке, а прямые из гиперплоскости $x_0 = 0$ — по двум диаметрально противоположным точкам граничной трёхмерной сферы $x_0^2 + x_1^2 + x_2^2 = 1$. Остаётся заметить, что полусфера в $\mathbb{R}^4$ гомеоморфна шару в $\mathbb{R}^3$.

Упражнение 4.6. Убедитесь, что семейство вращений вокруг фиксированной оси в фиксированном направлении на непрерывно меняющийся от 0 до 2π угол образует в пространстве $\mathrm{SO}_3(\mathbb{R}) \simeq \mathbb{P}_3(\mathbb{R})$ нестягиваемую петлю, двойной обход которой стягиваем.

Пример 4.4 (стандартные аффинные карты на $\mathbb{P}_n$)
Набор из $(n+1)$ аффинных карт $U_\nu = U_{x_\nu}$, задаваемых в $\mathbb{A}^{n+1}$ уравнениями $x_\nu = 1$, называется *стандартным аффинным покрытием* проективного пространства $\mathbb{P}_n = \mathbb{P}(\Bbbk^{n+1})$. Для каждого $\nu = 0,\ 1,\ \dots\ ,\ n$ в качестве стандартных локальных аффинных координат на карте U_ν берутся n линейных форм $t_i^{(\nu)} = x_i|_{U_\nu} = x_i \,/\, x_\nu$, где $0 \leqslant i \leqslant n$ и $i \neq \nu$. Таким образом, пространство $\mathbb{P}_n$

[1]Т. е. в замкнутые кривые, являющиеся непрерывными образами окружности.

[2]Т. е. концом вектора длины $\varphi \in [0, \pi] \subset \mathbb{R}$, отложенного в направлении единичного вектора e.

[3]Он виден как поворот на угол π независимо от того направления на оси, вдоль которого Вы его наблюдаете.

можно представлять себе как результат склейки $(n+1)$ различных копий $U_0, U_1, \dots, U_n$ аффинного пространства $\mathbb{A}^n$ по их фактическим пересечениям внутри $\mathbb{P}_n$. В однородных координатах на $\mathbb{P}_n$ пересечение $U_\mu \cap U_\nu$ описывается как множество всех таких $x = (x_0 : x_1 : \dots : x_n)$, у которых обе координаты x_μ и x_ν не обращаются в 0. В локальных аффинных координатах на картах U_μ и U_ν это множество задаётся, соответственно, неравенствами $t_\nu^{(\mu)} \neq 0$ и $t_\mu^{(\nu)} \neq 0$. При этом точка $t^{(\mu)} \in U_\mu$ склеивается с точкой $t^{(\nu)} \in U_\nu$ если и только если $t_\nu^{(\mu)} = 1 / t_\mu^{(\nu)}$ и $t_i^{(\mu)} = t_i^{(\nu)} / t_\mu^{(\nu)}$ для $i \neq \mu, \nu$. Правые части этих равенств называются *функциями перехода* от локальных координат $t^{(\nu)}$ к локальным координатам $t^{(\mu)}$.

Пример 4.5 (аффинные коники)

Посмотрим как выглядит в различных аффинных картах плоская проективная кривая C, заданная в однородных координатах на $\mathbb{P}_2 = \mathbb{P}(\mathbb{R}^3)$ уравнением $x_0^2 + x_1^2 = x_2^2$. В стандартной карте U_1, где $x_1 = 1$, в локальных координатах $t_0 = x_0 / x_1$ и $t_2 = x_2 / x_1$ это уравнение превращается в уравнение гиперболы $t_2^2 - t_0^2 = 1$. В стандартной карте U_2, где $x_2 = 1$, в локальных координатах $t_0 = x_0 / x_2$, $t_1 = x_1 / x_2$ — в уравнение окружности $t_0^2 + t_1^2 = 1$. В нестандартной карте $U_{x_1+x_2}$, где $x_1 + x_2 = 1$, в локальных координатах $t = x_0/(x_1+x_2)$ и $s = (x_2-x_1)/(x_2+x_1)$ после переноса x_1^2 из левой части направо и деления обеих частей на $x_2 + x_1$ наше однородное уравнение превратится в уравнение параболы $t^2 = u$. Таким образом, аффинные эллипс, гипербола и парабола суть изображения одной и той же проективной кривой $x_0^2 + x_1^2 = x_2^2$ в различных аффинных картах. Вид кривой C в карте $U_\xi \subset \mathbb{P}_2$ определяется тем, как располагается по отношению к C бесконечно удалённая прямая $\xi(x) = 0$ этой карты: эллипс, парабола и гипербола возникают, соответственно, когда эта прямая не пересекается с C, касается C и пересекается с C в двух различных точках, см. рис. 4◇7.

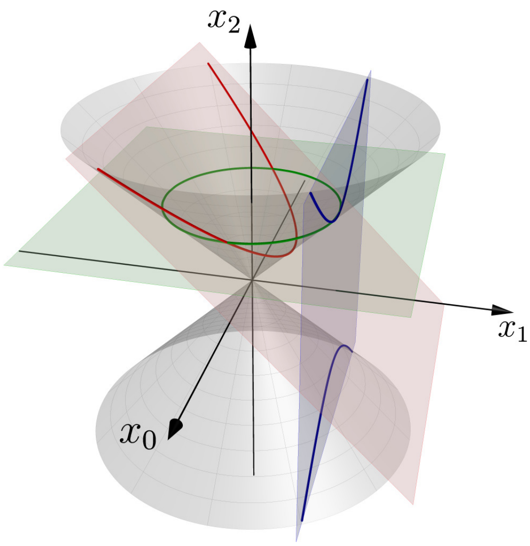

Рис. 4◇7. Аффинные изображения проективной коники.

4.2. Проективные подпространства. Проективизации $\mathbb{P}(U) \subset \mathbb{P}(V)$ векторных подпространств $U \subset V$ называются *проективными подпространствами* в $\mathbb{P}(V)$. Через любые две различные точки $a, b \in \mathbb{P}(V)$ проходит единственная проективная прямая (ab). Она является проективизацией линейной оболочки непропорциональных векторов a, b и состоит из всевозможных ненулевых линейных комбинаций $\lambda a + \mu b$, рассматриваемых с точностью до пропорциональности. Отношение $(\lambda : \mu)$ коэффициентов в разложения вектора $v = \lambda a + \mu b \in (ab)$ можно использовать в качестве внутренней однородной координаты точки v на проективной прямой (ab).

Упражнение 4.7. Убедитесь, что k-мерное проективное подпространство наблюдается в любой задевающей его аффинной карте как k-мерное аффинное подпространство.

Предложение 4.1

Для любых двух проективных подпространств $K, L \subset \mathbb{P}_n$ выполняется неравенство

$$\dim(K \cap L) \geqslant \dim K + \dim L - n\,.$$

Доказательство. Пусть $\mathbb{P}_n = \mathbb{P}(V)$, $L = \mathbb{P}(U)$, $\mathbb{P}(W)$, где $U, W \subset V$ — векторные подпространства. Тогда $K \cap L = \mathbb{P}(U \cap W)$ имеет размерность $\dim K \cap L = \dim(U \cap W) - 1 \geqslant \dim U + \dim W - \dim V - 1 = \dim K + 1 + \dim L + 1 - (n+1) - 1 = \dim K + \dim L - n$. □

Упражнение 4.8. Убедитесь, что любые две прямые на $\mathbb{P}_2$ пересекаются.

4.2.1. Проективная двойственность. Проективизации $\mathbb{P}_n = \mathbb{P}(V)$ и $\mathbb{P}_n^\times \overset{\text{def}}{=} \mathbb{P}(V^*)$ двойственных друг другу векторных пространств V и V^* называются *двойственными* проективными пространствами. Геометрически, каждое из них есть пространство гиперплоскостей в другом: соотношение $\varphi(v) = 0$ на вектор $v \in V$ ковектор $\varphi \in V^*$ линейно как по v, так и по φ, и задаёт при фиксированном $\varphi \in \mathbb{P}_n^\times$ гиперплоскость в $\mathbb{P}_n$, а при фиксированном $v \in \mathbb{P}_n$ — гиперплоскость в $\mathbb{P}_n^\times$, состоящую из всех гиперплоскостей в $\mathbb{P}_n$, проходящих через точку $v \in \mathbb{P}_n$. Так как две линейные формы задают одну и ту же гиперплоскость в векторном пространстве если и только если они пропорциональны, гиперплоскости в проективном пространстве биективно соответствуют точкам двойственного проективного пространства.

Напомню[1], что между векторными подпространствами дополнительных размерностей в V и V^* имеется каноническая биекция $U \leftrightarrows \operatorname{Ann}(U)$. На языке проективной геометрии это означает, что множество гиперплоскостей, содержащих заданное m-мерное проективное подпространство $K = \mathbb{P}(U) \subset \mathbb{P}_n$, является проективным подпространством $K^\times \overset{\text{def}}{=} \mathbb{P}(\operatorname{Ann} U) \subset \mathbb{P}_n^\times$ размерности $n - m - 1$, и при каждом $m = 0, 1, \dots, (n-1)$ соответствие $K \leftrightarrows K^\times$ между m-мерными проективными подпространствами в $\mathbb{P}_n$ и $(n-m-1)$-мерными проективными подпространствами в $\mathbb{P}_n^\times$ взаимно однозначно и оборачивает включения. Это соответствие называется *проективной двойственностью*. Оно позволяет переговаривать геометрические утверждения в эквивалентные двойственные геометрические утверждения, подчас довольно сильно отличающиеся от исходных.

Например, условие коллинеарности трёх точек двойственно условию наличия у трёх гиперплоскостей общего подпространства коразмерности 2.

Поскольку биекция $U \leftrightarrows \operatorname{Ann}(U)$ переводит пересечения векторных пространств в суммы и наоборот, соответствие $K \leftrightarrows K^\times$ переводит пересечение $K \cap L$ проективных подпространств в *линейное соединение*[2] $J(K^\times, L^\times)$ — объединение всех проективных прямых[3] $(\varphi\psi)$ с $\varphi \in K^\times$, $\psi \in L^\times$. Наоборот, линейное соединение $J(K, L)$ двойственно пересечению $K^\times \cap L^\times$.

Упражнение 4.9. Убедитесь, что $\mathbb{P}(U + W) = J\big(\mathbb{P}(U), \mathbb{P}(W)\big)$ в $\mathbb{P}(V)$ для любых ненулевых векторных подпространств $U, W \subset V$.

4.2.2. Дополнительные подпространства и проекции. Подпространства $K = \mathbb{P}(U)$ и $L = \mathbb{P}(W)$ в $\mathbb{P}_n = \mathbb{P}(V)$ называются *дополнительными*, если

$$K \cap L = \varnothing \quad \text{и} \quad \dim K + \dim L = n - 1\,.$$

Например, любые две непересекающиеся прямые в $\mathbb{P}_3$ дополнительны. На языке линейной алгебры дополнительность проективных подпространств означает, что подлежащие им векторные подпространства $U, W \subset V$ трансверсальны, т. е. $U \cap V = \{0\}$, и

$$\dim U + \dim W = \dim K + 1 + \dim L + 1 = (n+1) = \dim V\,,$$

[1] См. n° 1.1 на стр. 3.

[2] Обозначение J является сокращением от английского *join*.

[3] Здесь и далее удобно считать, что «прямая» (aa) это одна точка a.

откуда $V = U \oplus W$. В этом случае любой вектор $v \in V$ имеет единственное разложение $v = u + w$ с $u \in U$ и $w \in W$. Если вектор v не лежит ни в U, ни в W, обе компоненты этого разложения отличны от нуля. Это означает, что для любой точки $p \notin K \sqcup L$ существует единственная проходящая через p прямая ℓ, пересекающая как K, так и L.

Упражнение 4.10. Убедитесь в этом.

Всякая пара дополнительных подпространств $K, L \subset \mathbb{P}_n$ задаёт *проекцию из K на L*

$$\pi_L^K : (\mathbb{P}_n \smallsetminus K) \to L\,, \tag{4-1}$$

которая тождественно действует на L и переводит каждую точку $p \in \mathbb{P}_n \smallsetminus (K \sqcup L)$ в точку пересечения подпространства L с той единственной прямой, которая проходит через точку p и пересекает оба подпространства K и L. На языке линейной алгебры, проекция переводит каждый вектор $v = u + w$ с ненулевой компонентой $w \in W$ в эту компоненту. В однородных координатах $(x_0 : x_1 : \ \dots \ : x_n)$, согласованных с разложением $V = U \oplus W$ так, что начальный кусок $(x_0 : x_1 : \ \dots \ : x_m)$ является координатами в K, а остаток $(x_{m+1} : x_{m+2} : \ \dots \ : x_n)$ — координатами в L, проекция π_L^K просто удаляет первые $(m+1)$ координат x_ν с $0 \leqslant \nu \leqslant m$.

4.3. Квадрики. Одномерные изотропные подпространства ненулевой квадратичной формы q на векторном пространстве V образуют в $\mathbb{P}(V)$ геометрическую фигуру, которая называется *проективной квадрикой* и обозначается $V(q)$. Квадрика $V(q)$ называется *гладкой* (а также *невырожденной* или *неособой*), если квадратичная форма q невырождена[1]. В противном случае квадрика называется *особой* или *вырожденной*.

Пример 4.6 (квадрики на $\mathbb{P}_1$)
Если $\dim V = 2$, уравнение $q(x) = 0$ в ортогональном базисе формы q преобразуется либо к виду $x_0^2 = 0$, либо к виду $x_0^2 + \alpha x_1^2 = 0$, где $\alpha \neq 0$. В первом случае форма q вырождена, а квадрика $V(q)$ состоит из единственной точки $p = (0 : 1)$, представляющей одномерное ядро формы q. Гладкая квадрика $x_0^2 + \alpha x_1^2 = 0$ либо пуста, либо состоит из двух различных точек. Первое равносильно тому, что $-\alpha$ не является квадратом в $\Bbbk$, и над алгебраически замкнутым полем $\Bbbk$ такого не бывает. Если же $-\alpha = \delta^2$, то форма $x_0^2 + \alpha x_1^2 = (x_0 - \delta x_1)(x_0 + \delta x_1)$ зануляется ровно в двух различных точках $(\pm\delta : 1) \in \mathbb{P}_1$. Различить эти случаи можно при помощи определителя Грама формы q в произвольном базисе пространства V. В первом случае он нулевой, а в двух оставшихся сравним по модулю умножения на ненулевые квадраты из поля $\Bbbk$ с коэффициентом α. Таким образом, квадрика $V(q)$ состоит из двух различных точек, пуста или является двойной точкой, когда $-\det q$ является, соответственно, ненулевым квадратом, ненулевым не квадратом или обращается в нуль. Для квадратичной формы $q(x) = a_0 x_0^2 + 2a_1 x_0 x_1 + a_2 x_1^2$ число $-\det(q) = a_1^2 - a_0 a_2$ иногда обозначают через $D/4$ и называют D *дискриминантом* формы q.

Следствие 4.1
Квадрика $Q \subset \mathbb{P}_n$ может пересекать прямую $\ell \subset \mathbb{P}_n$ ровно одним из следующих четырёх способов: либо $\ell \subset Q$, либо $\ell \cap Q$ это одна двойная точка, либо $\ell \cap Q$ это две различные точки, либо $\ell \cap Q = \varnothing$, причём над алгебраически замкнутым полем последний случай невозможен. □

4.3.1. Касательные прямые и касательное пространство. Прямая, проходящая через точку p квадрики Q, называется *касательной* к Q в точке p, если она лежит на квадрике Q или пересекает Q по двойной точке p. Объединение всех прямых, касающихся квадрики Q в точке p, обозначается $T_p Q$ и называется *касательным пространством* к Q в точке $p \in Q$.

[1] Т. е. её поляризация $\widetilde{q} : V \times V \to \Bbbk$ удовлетворяет условиям предл. 1.1 на стр. 6.

Таким образом, прямая (ab) является касательной к квадрике $Q = V(q)$ если и только если ограничение квадратичной формы q на линейную оболочку векторов a, b вырождено, т. е.

$$\det \begin{pmatrix} q(a) & \tilde{q}(a,b) \\ \tilde{q}(a,b) & q(b) \end{pmatrix} = 0\,, \tag{4-2}$$

где $\tilde{q} : V \times V \to \Bbbk$ это поляризация[1] формы q. Если $a \in Q$, равенство (4-2) равносильно ортогональности точек a и b:

$$b \in T_a Q \iff \tilde{q}(a,b) = 0\,. \tag{4-3}$$

Если $b \notin Q$, то ограничение формы q на одномерное подпространство $b \subset V$ невырождено и $V = b \oplus b^\perp$. Формула (4-3) утверждает, что видимый из точки $b \notin Q$ контур квадрики Q, т. е. ГМТ пересечения с квадрикой Q всевозможных касательных, опущенных на неё из точки b, высекается из квадрики Q не проходящей через точку b гиперплоскостью

$$\mathbb{P}(b^\perp) = \{x \mid \tilde{q}(x,b) = 0\}\,, \tag{4-4}$$

которая называется *полярой* точки b относительно квадрики Q. Из формулы (4-3) также следует, что касательное пространство

$$T_a Q = \mathbb{P}(a^\perp) = \{x \mid \tilde{q}(x,b) = 0\} \tag{4-5}$$

либо является гиперплоскостью в $\mathbb{P}(V)$, либо совпадает со всем пространством $\mathbb{P}(V)$. В первом случае точка $a \in Q$ называется *гладкой* или *неособой*, а во втором — *особой*. Особость означает, что $\tilde{q}(v,a) = 0$ для всех $v \in V$, т. е. что a лежит в ядре корреляции[2] $\hat{q} : V \to V^*$, переводящей вектор $v \in V$ в линейную форму $w \mapsto \tilde{q}(w,v)$ на пространстве V. Все ненулевые векторы из $\ker \hat{q}$ изотропны и являются особыми точками квадрики Q. Проективное подпространство

$$\operatorname{Sing} Q \overset{\text{def}}{=} \mathbb{P}(\ker \hat{q}) \subset Q$$

называется *пространством особых точек* или *вершинным пространством* квадрики Q.

Теорема 4.1

Пересечение особой квадрики Q с любым дополнительным к $\operatorname{Sing} Q$ проективным подпространством $L \subset \mathbb{P}(V)$ является гладкой (возможно пустой) квадрикой $Q' = L \cap Q$ в подпространстве L, и исходная квадрика Q является линейным соединением[3] Q' и $\operatorname{Sing} Q$.

Доказательство. Невырожденность ограничения формы q на подпространство L была доказана в предл. 1.5 на стр. 13. Каждая пересекающая $\operatorname{Sing} Q$ прямая, будучи касательной к квадрике Q, либо целиком лежит на квадрике Q, либо пересекает Q ровно в одной точке — точке своего пересечения с $\operatorname{Sing} Q$. Поэтому каждая прямая (a,b) с $a \in \operatorname{Sing} Q$, $b \in Q'$ целиком лежит на Q, т. е. $J(Q', \operatorname{Sing} Q) \subset Q$. По упр. 4.10 каждая не лежащая в L гладкая точка $c \in Q$ лежит на некоторой прямой, пересекающей и L, и $\operatorname{Sing} Q$. Поскольку эта прямая пересекает Q в точке $c \notin \operatorname{Sing} Q$, она целиком лежит на квадрике, а значит, пересекает L в точке, лежащей на квадрике Q'. Поэтому $Q \subset J(Q', \operatorname{Sing} Q)$. □

[1] См. n° 2.3 на стр. 18.

[2] См. n° 1.2.2 на стр. 5.

[3] Т. е. объединением всех прямых вида (ab) с $a \in Q'$ и $b \in \operatorname{Sing} Q$, ср. с упр. 4.9 на стр. 41.

4.3.2. Коники. Квадрики на плоскости называются *кониками*. Примером гладкой коники является кривая из прим. 4.5. Вырожденная коника задаётся квадратичной формой q ранга 1 или 2. В первом случае q является квадратом линейной формы, поскольку в ортогональном базисе записывается в виде $q(x_0, x_1, x_2) = x_0^2$. Соответствующая коника $C = V(q)$ называется *двойной прямой*. Она выглядит как прямая $x_0 = 0$ и совпадает с $\operatorname{Sing} C$. В свете теор. 4.1 коника C является линейным соединением прямой $\operatorname{Sing} C$ и пустой квадрики[1]. Если $\operatorname{rk} q = 2$, пространство $\operatorname{Sing} q$ является точкой — проективизацией одномерного ядра формы Q. По теор. 4.1 пересечение такой коники C с любой не проходящей через особую точку прямой является гладкой квадрикой на этой прямой и, как мы видели прим. 4.6, либо пусто, либо состоит из двух разных точек, причём первый случай над алгебраически замкнутым полем невозможен. В первом случае коника C называется *двойной точкой* и совпадает со своей особой точкой. Например, над полем $\mathbb{R}$ уравнение $x_0^2 + x_1^2 = 0$ задаёт двойную точку $(0 : 0 : 1)$. Во втором случае коника C является объединением двух различных прямых, пересекающихся в её особой точке, и называется *распавшейся*. В ортогональном базисе уравнение коники ранга 2 приводится к тому же самому виду $x_0^2 + \alpha x_1^2 = 0$, что и в прим. 4.6. Точка $(0 : 0 : 1)$ является особой, ограничение формы на дополнительную к ядру прямую $x_2 = 0$ анизотропно если $-\alpha$ не квадрат, и гиперболично если $-\alpha$ является квадратом. Во втором случае форма разлагается в произведение двух линейных множителей, задающих две прямые, на которые распадается коника C.

Невырожденная квадратичная форма q на трёхмерном пространстве либо анизотропна, либо является прямой ортогональной суммой двумерной гиперболической и одномерной анизотропной форм. В первом случае $V(q) = \varnothing$. Над полем $\mathbb{R}$ такая коника задаётся уравнением

$$x_0^2 + x_1^2 + x_2^2 = 0\,.$$

Над алгебраически замкнутым полем таких коник не бывает. Во втором случае квадратичная форма в подходящих координатах записывается уравнением

$$x_1^2 = x_0 x_2\,. \tag{4-6}$$

Поскольку любые значения $x_0 = t_0$, $x_1 = t_1$ однозначно дополняются до тройки

$$(t_0 : t_1 : t_1^2/t_0) = (t_0^2 : t_0 t_1 : t_1^2)\,,$$

удовлетворяющей уравнению (4-6), коника (4-7) является образом вложения

$$\mathbb{P}_1 \hookrightarrow \mathbb{P}_2\,, \quad (t_0 : t_1) \mapsto (t_0^2 : t_0 t_1 : t_1^2)\,. \tag{4-7}$$

Когда точка $(t_0 : t_1)$ пробегает $\mathbb{P}_1$, точка $(x_0 : x_1 : x_2) = (t_0^2 : t_0 t_1 : t_1^2)$ ровно по одному разу пробегает все изотропные подпространства квадратичной формы $x_1^2 - x_0 x_2$.

Итак, над любым полем $\Bbbk$ характеристики $\operatorname{char}\Bbbk \neq 2$ имеется единственная с точностью до линейной замены координат непустая невырожденная коника. В подходящих координатах она задаётся уравнением (4-6) и допускает рациональную параметризацию (4-7).

[1] Дополнительным подпространством к прямой на плоскости является точка — проективизация какого-нибудь одномерного подпространства в V, а невырожденная форма на одномерном пространстве автоматически анизотропна.

Пример 4.7 (проекция коники на прямую)
Получить рациональную параметризацию непустой невырожденной коники $C = V(q)$ можно без приведения её уравнения к виду $x_1^2 = x_0x_2$, если явно известна хотя бы одна точка $p \in C$. Для этого надо спроектировать из точки p на конику C любую не проходящую через p прямую ℓ, как на рис. 4◇8. По сл. 4.1, каждая не касающаяся коники C в точке p прямая (pr) с $r \in \ell$ пересекает конику C ещё ровно в одной, отличной от p точке $x = x(r) \in C$. Для точки $r = T_pC \cap \ell$ положим $x(r) = p$. Полученную биекцию легко описать явными формулами. Если $r \in \ell \cap C$, то $x(r) = r$. Если точка r анизотропна, то отражение[1] изотропного вектора p в гиперплоскости $r^\perp$

$$\sigma_r(p) = p - 2\frac{\widetilde{q}(p,r)}{\widetilde{q}(r,r)}r \tag{4-8}$$

тоже является изотропным вектором и лежит на прямой (pr). Эта точка совпадает с точкой p если и только если $p \in r^\perp$, т. е. когда прямая (rp) касается[2] коники C в точке p. Таким образом, формула (4-8) задаёт биекцию между точками $r \in \ell \smallsetminus C$ и точками $x \in C \smallsetminus \ell$. Соответствующие друг другу точки связаны соотношением

$$q(r) \cdot (p - x) = 2\widetilde{q}(p,r) \cdot r\,. \tag{4-9}$$

Если выбрать на прямой ℓ базис a, b и использовать p, a, b в качестве базиса на $\mathbb{P}_2$, то однородные координаты $(x_p : x_a : x_b)$ точки $x \in C$, удовлетворяющей (4-9), и однородные координаты $(t_a : t_b)$ точки $r = t_a a + t_b b \in \ell$ выразятся друг через друга так:

$$\begin{gathered} (x_p : x_a : x_b) = \big(q(t_a a + t_b b) : -2t_a\widetilde{q}(p, t_a a + t_b b) : -2t_b\widetilde{q}(p, t_a a + t_b b)\big) \\ (t_a : t_b) = (x_a : x_b)\,. \end{gathered} \tag{4-10}$$

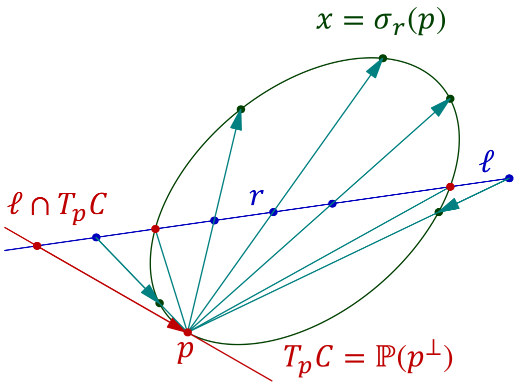

Рис. 4◇8. Проекция коники на прямую.

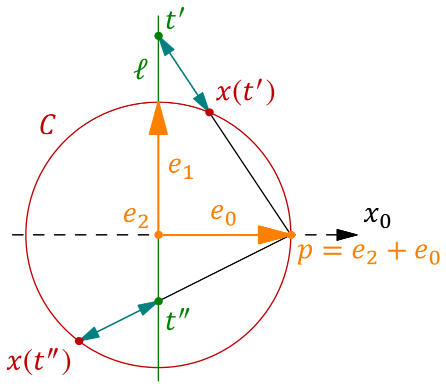

Рис. 4◇9. Параметризация окружности.

Пример 4.8 (рациональная параметризация окружности и пифагоровы тройки)
Окружность $x_0^2 + x_1^2 = 1$ является изображением гладкой проективной коники $x_0^2 + x_1^2 - x_2^2 = 0$ из прим. 4.5 в стандартной аффинной карте U_2, где $x_2 = 1$. Построим рациональную параметризацию этой коники при помощи проекции из точки $p = e_0 + e_2 = (1 : 0 : 1)$ на задаваемую уравнением $x_0 = 0$ прямую $\ell = (e_1e_2)$, см. рис. 4◇9. Беря $r = t_1e_1 + t_2e_2 = (0 : t_1 : t_2)$, получаем $\widetilde{q}(p,r) = -t_2$, $q(r) = t_1^2 - t_2^2$, и по формуле (4-10),

$$x = (pr) \cap C = (t_1^2 - t_2^2)(e_0 + e_2) + 2t_2^2\, e_2 + 2t_1t_2\, e_1 = (t_1^2 - t_2^2)\, e_0 + 2t_1t_2\, e_1 + (t_1^2 + t_2^2)\, e_2$$

[1] См. n° 2.2 на стр. 16.
[2] См. формулу (4-3) на стр. 43.

В стандартном базисе e_0, e_1, e_2 эта точка имеет однородные координаты

$$(x_0 : x_1 : x_2) = ((t_1^2 - t_2^2) : 2\,t_1 t_2 : (t_1^2 + t_2^2)). \tag{4-11}$$

Альтернативный способ получения рациональной параметризации заключается в приведении квадратичной формы $x_0^2 + x_1^2 - x_2^2$ к виду $a_1^2 = a_0 a_2$ и использовании параметризации

$$(a_0 : a_1 : a_2) = (t_0^2 : t_0 t_1 : t_1^2)$$

из форм. (4-7) на стр. 44. Это делается при помощи линейной замены переменных

$$\begin{cases} a_0 = x_2 + x_0 \\ a_1 = x_1 \\ a_2 = x_2 - x_0 \end{cases} \qquad \begin{cases} x_0 = (a_0 - a_2)/2 \\ x_1 = a_1 \\ x_0 = (a_0 + a_2)/2\,, \end{cases}$$

превращающей (4-7) в (4-11). Обратите внимание, что подставляя в правую часть формулы (4-11) всевозможные $(t_0, t_1) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$, мы получим слева все возможные пифагоровы тройки[1] с точностью до пропорциональности.

4.4. Проективные многообразия. Если ковекторы $x_0, x_1, \dots, x_n$ образуют базис векторного пространства V^*, то алгебра многочленов $\Bbbk[x_0, x_1, \dots, x_n]$ от этих ковекторов обозначается SV^* и называется *симметрической алгеброй* векторного пространства V^*. Как векторное пространство над $\Bbbk$, она раскладывается в прямую сумму векторных подпространств:

$$SV^* = \bigoplus_{k \geqslant 0} S^k V^*\,,$$

где $S^k V^*$ — пространство однородных многочленов степени k от $x_0, x_1, \dots, x_n$. Как и для грассмановых многочленов[2], использование не привязанных к выбору базиса названий и обозначений мотивировано тем, что пространство $S^1 V^*$ однородных линейных многочленов канонически отождествляется с векторным пространством V^*, а каждое $S^k V^*$ — с линейной оболочкой всевозможных произведений $\varphi_1 \varphi_2 \,\dots\, \varphi_k$, составленных из произвольных k ковекторов $\varphi_i \in V^*$. Пространство констант $S^0 V^* = \Bbbk \cdot 1$ тоже от выбора базиса не зависит.

Более того, гомоморфизм алгебры многочленов в алгебру функций $V \to \Bbbk$

$$\Bbbk[x_0, x_1, \dots, x_n] \to \Bbbk^V\,,$$

который сопоставляет многочлену $f \in \Bbbk[x_0, x_1, \dots, x_n]$ функцию, принимающую на векторе $v = \sum \lambda_i e_i$ значение $f(v) \overset{\text{def}}{=} f(\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_n)$, где $e_0, e_1, \dots, e_n$ — двойственный к $x_0, x_1, \dots, x_n$ базис в V, тоже не зависит от выбора базиса, поскольку отображает каждое произведение ковекторов $\varphi_1 \varphi_2 \,\dots\, \varphi_k$ в функцию $v \mapsto \prod \varphi_i(v)$, ничего ни про какие базисы не ведающую.

Замечание 4.1. (симметрическая алгебра векторного пространства) Симметрическая алгебра SV имеется у любого векторного пространства V и, по определению, представляет собою алгебру многочленов $\Bbbk[e_1, e_2, \dots, e_m]$ от базисных векторов $e_1, e_2, \dots, e_m$ произвольного базиса в V. Она является прямой суммой векторных пространств $S^k V$, порождённых всевозможными произведениями $v_1 v_2 \,\dots\, v_k$ векторов $v_i \in V$ и называемых k-тыми *симметрическими степенями* векторного пространства V.

[1] Т. е. целочисленные решения уравнения Пифагора $x_0^2 + x_1^2 = x_2^2$.

[2] См. n° 3.3 на стр. 29.

4.4.1. Однородные уравнения. Важное отличие проективной геометрии от аффинной состоит в том, что отличный от константы многочлен $f \in SV^*$ *не является* функцией на проективном пространстве $\mathbb{P}(V)$, поскольку его значения $f(v)$ и $f(\lambda v)$ на пропорциональных векторах обычно отличаются друг от друга. Тем не менее, множество нулей однородного многочлена

$$V(f) \stackrel{\text{def}}{=} \{\, v \in V \mid f(v) = 0 \,\}, \quad \text{где} \quad f \in S^k V^*,$$

является геометрической фигурой в $\mathbb{P}(V)$, так как равенства $f(v) = 0$ и $f(\lambda v) = \lambda^k f(v) = 0$ эквиваленты для ненулевых $v \in V$ и $\lambda \in \Bbbk$. На геометрическом языке, аффинная гиперповерхность $V(f) \subset \mathbb{A}(V)$ представляет собою конус, образованный проходящими через начало координат прямыми, а каждая такая прямая является точкой в проективном пространстве. Множество этих точек называется *проективной алгебраической гиперповерхностью* степени $k = \deg f$. Пересечение проективных гиперповерхностей, т. е. множество рассматриваемых с точностью до пропорциональности ненулевых решений системы однородных полиномиальных уравнений, называются *проективным алгебраическим многообразием*.

Простейшими примерами проективных многообразий служат проективные подпространства $\mathbb{P}(U) \subset \mathbb{P}(V)$. Каждое такое подпространство задаётся системой однородных линейных уравнений $\varphi(v) = 0$, где φ пробегает $\operatorname{Ann} U \subset V^*$ или какую-нибудь систему линейных порождающих этого подпространства.

4.4.2. Проективное замыкание аффинной гиперповерхности. Пусть аффинная гиперповерхность $V(f) \subset \mathbb{A}^n$ в аффинном координатном пространстве $\mathbb{A}^n = \mathbb{A}(\Bbbk^n)$ задаётся (неоднородным) многочленом степени d вида

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = f_0 + f_1(x_1, x_2, \dots, x_n) + f_2(x_1, x_2, \dots, x_n) + \cdots + f_d(x_1, x_2, \dots, x_n)$$

где каждый многочлен $f_k \in \Bbbk[x_1, x_2, \dots, x_k]$ однороден степени $\Bbbk$. Вложим $\mathbb{A}^n$ в проективное координатное пространство $\mathbb{P}_n = \mathbb{P}(\Bbbk^{n+1})$ с однородными координатами $(x_0 : x_1 : \ \dots \ : x_n)$ в качестве стандартной аффинной карты U_0 и образуем однородный многочлен

$$\overline{f}(x_0, x_1, \dots, x_n) = f_0 \cdot x_0^d + f_1(x_1, x_2, \dots, x_n) \cdot x_0^{d-1} + \cdots + f_d(x_1, x_2, \dots, x_n),$$

который получается из f умножением каждого монома на такую степень переменной x_0, которая делает степень всего монома равной d. Многочлен $\overline{f}$ превращается в f, если положить $x_0 = 1$. Таким образом, многочлены f и $\overline{f}$ однозначно определяются друг по другу. Проективная гиперповерхность $V(\overline{f}) \subset \mathbb{P}_n$ называется *проективным замыканием* аффинной гиперповерхности $V(f) \subset \mathbb{A}^n$. Последняя является пересечением проективной гиперповерхности $V(\overline{f})$ со стандартной аффинной картой U_0. Дополнение $V(\overline{f}) \smallsetminus U_0 = V(\overline{f}) \cap \mathbb{P}(\operatorname{Ann} x_0)$, т. е. пересечение гиперповерхности $V(\overline{f})$ с бесконечно удалённой проективной гиперплоскостью аффинной карты U_0, задаётся в однородных координатах $(x_1 : x_2 : \ \dots \ : x_n)$ на этой гиперплоскости однородным уравнением $f_d(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0$, т. е. старшей однородной компонентой многочлена f. Точки этой проективной гиперповерхности называются *асимптотическими направлениями* аффинной гиперповерхности $V(f)$.

Пример 4.9 (каспидальная кубика)
Проективным замыканием аффинной кубической кривой $x_1 = x_2^3$ является проективная кубическая кривая $x_0^2 x_1 = x_2^3$, имеющая ровно одну бесконечно удалённую точку $(0 : 1 : 0)$. В покрывающей эту точку стандартной аффинной карте U_1, где $x_1 = 1$, эта кривая задаётся уравнением[1] $x_0^2 = x_2^3$ и имеет остриё в точке $(0 : 1 : 0)$.

[1] Аффинная кривая с таким уравнением называется *полукубической параболой*.

4.4.3. Пространство гиперповерхностей. Поскольку пропорциональные однородные многочлены задают одну и ту же гиперповерхность, каждая гиперповерхность $V(f) \subset \mathbb{P}(V)$ степени d определяется не многочленом f, а задаваемой этим многочленом точкой проективного пространства $\mathbb{P}(S^dV^*)$, которое называется *пространством гиперповерхностей* степени d в $\mathbb{P}(V)$.

Упражнение 4.11. Найдите размерность пространства $\mathbb{P}(S^dV^*)$.

Так как для произвольно зафиксированной точки $p \in \mathbb{P}(V)$ уравнение $f(p) = 0$ является *линейным* уравнением на $f \in S^dV^*$, гиперповерхности степени d, проходящие через заданную точку p, образуют гиперплоскость в пространстве всех гиперповерхностей.

Предложение 4.2
Через любые пять точек на $\mathbb{P}_2$ можно провести конику. Если никакие четыре из пяти точек не коллинеарны, то такая коника единственна, а если никакие три не коллинеарны, то она вдобавок ещё и гладкая.

Доказательство. Согласно упр. 4.11, коники на плоскости $\mathbb{P}_2 = \mathbb{P}(V)$ являются точками пространства $\mathbb{P}_5 = \mathbb{P}(S^2V^*)$. Поскольку любые пять гиперплоскостей в $\mathbb{P}_5$ имеют непустое пересечение, через любые пять точек в $\mathbb{P}_2$ проходит хотя бы одна коника. Если какие-то три из пяти точек коллинеарны, то проходящая через них прямая содержится в конике по сл. 4.1 на стр. 42. Стало быть, коника распадается. Если при этом никакие четыре из пяти точек не коллинеарны, вторая компонента распавшейся коники однозначно фиксируется тем, что проходит через оставшиеся две точки. Если никакие три из пяти точек не коллинеарны, то проходящая через них коника не может быть особой в силу сказанного в n° 4.3.2 на стр. 44. Гладкая коника, проходящая через пять заданных точек автоматически единственна в силу следующего ниже предл. 4.3. □

Предложение 4.3
Гладкая коника и произвольная кривая степени d на $\mathbb{P}_2$ либо пересекаются не более, чем по $2d$ точкам, либо коника целиком содержится в кривой в качестве компоненты.

Доказательство. Согласно форм. (4-7) на стр. 44, гладкая коника на $\mathbb{P}_2$ состоит из точек вида $x = q(t)$, где $q : \mathbb{P}_1 \hookrightarrow \mathbb{P}_2$ — вложение, задаваемое однородными многочленами второй степени. Все значения t, при которых коника пересекает кривую с уравнением $f(x) = 0$, являются корнями однородного уравнения $f\big(q(t)\big) = 0$, левая часть которого либо тождественно обращается в нуль, либо является однородным многочленом степени $2d$ от $t = (t_0, t_1)$. В первом случае вся коника содержится в кривой, во втором случае многочлен имеет не более $2d$ различных корней[1] на $\mathbb{P}_1$. □

4.4.4. Линейные системы. Проективные подпространства в пространстве гиперповерхностей называются *линейными системами* гиперповерхностей. По определению, всякая гиперповерхность из линейной системы, порождённой гиперповерхностями $V(f_1)$, $V(f_2)$, … , $V(f_m)$ задаётся уравнением вида $\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2 + \dots + \lambda_m f_m = 0$, где $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m \in \Bbbk$ — некоторые константы. В частности, любая гиперповерхность из такой системы обязательно содержит пересечение $V(f_1) \cap V(f_2) \cap \dots \cap V(f_m)$, которое называется *базисным множеством* линейной

[1] Ср. с форм. (4-12) на стр. 50 ниже.

системы. Поскольку базисное множество является пресечением *всех* гиперповерхностей системы, оно не зависит от выбора линейных образующих в этой системе.

По старинной традиции, одномерные, двумерные и трёхмерные линейные системы называются *пучками*, *связками* и *сетями* соответственно. Например, все прямые, проходящие через заданную точку $p \in \mathbb{P}_2$, образуют пучок, ибо составляют прямую[1] $p^\times \subset \mathbb{P}_2^\times$. Точно также все двумерные плоскости, проходящие через заданную прямую $\ell \subset \mathbb{P}_3$, составляют прямую $\ell^\times \subset \mathbb{P}_3^\times$ и, стало быть, тоже образуют пучок.

Так как любая прямая в проективном пространстве имеет непустое пересечение с любой гиперплоскостью, в любом пучке гиперповерхностей[2] всегда имеется гиперповерхность, проходящая через любую наперёд заданную точку.

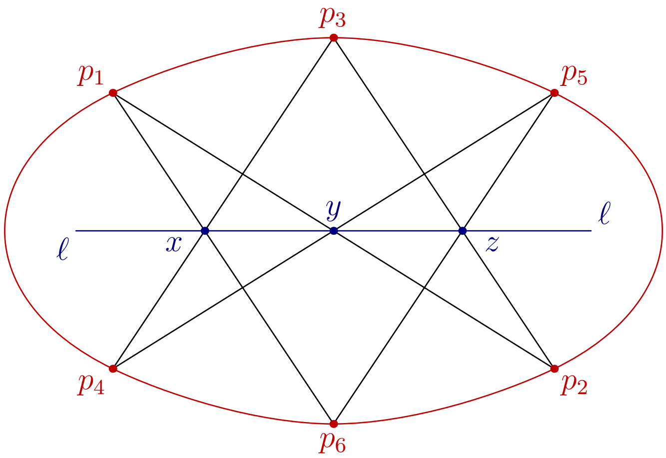

Рис. 4⋄10. Гексограмма Паскаля.

Пример 4.10 (теорема Паскаля)
Существует замечательный критерий того, когда через шесть точек $p_1, p_2, \dots, p_6$, никакие три из которых не коллинеарны, можно провести конику. Для этого необходимо и достаточно, чтобы три точки пересечений пар «противоположных сторон» шестиугольника $p_1, p_2, \dots, p_6$

$$x = (p_3p_4) \cap (p_6p_1), \quad y = (p_1p_2) \cap (p_4p_5), \quad z = (p_2p_3) \cap (p_5p_6)$$

лежали на одной прямой, см. рис. 4⋄10. Следующее простое соображение, принадлежащее Якоби, доказывает необходимость (для $\Bbbk = \mathbb{C}$). Пусть все шесть точек лежат на конике C, автоматически гладкой. Рассмотрим две распавшиеся кубические кривые $F = (p_1p_2) \cup (p_3p_4) \cup (p_5p_6)$ и $G = (p_2p_3) \cup (p_4p_5) \cup (p_6p_1)$ и выберем на конике C седьмую точку p_7, отличную от шести заданных. Все кубические кривые из пучка $(FG) = \{\lambda F + \mu G \mid (\lambda : \mu) \in \mathbb{P}_1\}$ проходят через девять точек $\{p_1, \dots, p_6, x, y, z\} = F \cap G$, и хотя бы одна из этих кривых, назовём её Q, проходит через точку p_7, а значит, пересекает конику C по семи точкам. Согласно предл. 4.3, это означает, что коника C содержится в кубической кривой Q в качестве компоненты. Из теоремы Гильберта о нулях, которая доказывается в курсе коммутативной алгебры, следует, что уравнение кубики Q делится на уравнение коники C. Частное — однородный многочлен первой степени — задаёт прямую, проходящую через не лежащие на конике C базисные точки x, y, z пучка (FG).

В следующем §5 мы дадим два различных самодостаточных доказательства теоремы Паскаля, использующие свойства проективных преобразований.

[1] См. n° 4.2.1 на стр. 41.

[2] Любой степени и над любым полем.

4.4.5. Конфигурации точек на прямой. На двумерном векторном пространстве U имеется единственная с точностью до пропорциональности билинейная кососимметричная *форма площади* $\det : U \times U \to \Bbbk$, $(u, w) \mapsto \det(u, w)$, сопоставляющая паре векторов определитель матрицы их координат в каком-нибудь базисе. При замене базиса эта форма умножается на ненулевую константу — определитель матрицы перехода. Правая корреляция формы площади задаёт изоморфизм $\det^\wedge : U \xrightarrow{\sim} U^*$, переводящий вектор $w \in U$ в линейную форму $u \mapsto \det(u, w)$ и с точностью до пропорциональности не зависящий от выбора базиса. Переходя к проективизациям, мы получаем канонический изоморфизм $\overline{\det} : \mathbb{P}(U) \xrightarrow{\sim} \mathbb{P}(U^*)$ между двойственными проективными прямыми $\mathbb{P}_1 = \mathbb{P}(U)$ и $\mathbb{P}_1^\times = \mathbb{P}(U^*)$, переводящий точку $p = (p_0 : p_1) \in \mathbb{P}_1$ в точку $p^* = (p_1 : -p_0) \in \mathbb{P}_1^\times$, задаваемую однородным линейным многочленом

$$p^*(x_0, x_1) \stackrel{\text{def}}{=} \det(x, p) = p_1 x_0 - p_0 x_1 \in S^1 U^* ,$$

который однозначно с точностью до пропорциональности определяется тем, что $p = V(p^*)$. Таким образом, точки проективной прямой, т. е. гиперповерхности степени 1 в $\mathbb{P}_1 = \mathbb{P}(U)$, взаимно однозначно соответствуют точкам пространства $\mathbb{P}(S^1 U^*) = \mathbb{P}_1^\times$ таких гиперповерхностей.

Любая конечная конфигурация из d неупорядоченных точек $p_1, p_2, \dots, p_d \in \mathbb{P}_1$, среди которых могут быть совпадающие, является алгебраической гиперповерхностью $V(f)$ степени d, задаваемой однородным многочленом

$$f(x_0, x_1) = p_1^* p_2^* \dots p_d^* = \prod_{i=1}^{d} \det(x, p_i) = \prod_{\nu=1}^{d} (p_{i,1} x_0 - p_{i,0} x_1) , \tag{4-12}$$

где $(p_{i,0} : p_{i,1})$ это однородная координата точки p_i. Точки $p_1, p_2, \dots, p_d \in \mathbb{P}_1$ называются *корнями* однородного многочлена (4-12). Разложение (4-12) аналогично разложению многочлена от одной переменной на линейные множители, отвечающие корням, с той только разницей, что в формуле (4-12) и многочлен f, и числа $(p_{i,0} : p_{i,1})$ рассматриваются с точностью до пропорциональности, т. е. как точки проективных пространств $\mathbb{P}_d^\times = \mathbb{P}(S^d U^*)$ и $\mathbb{P}_1 = \mathbb{P}_1(U)$. Однородный многочлен степени d от двух переменных имеет не более d различных корней на $\mathbb{P}_1$, а если основное поле $\Bbbk$ алгебраически замкнуто, то таковых корней, с учётом кратностей[1], всегда существует ровно d. Таким образом, над алгебраически замкнутым полем $\Bbbk$ точки пространства $\mathbb{P}_d^\times = \mathbb{P}(S^d V^*)$ гиперповерхностей степени d в $\mathbb{P}_1 = \mathbb{P}(U)$ находятся в биекции со всевозможными конфигурациями из d-неупорядоченных точек на $\mathbb{P}_1$.

4.4.6. Рациональные нормальные кривые. Двойственный способ думать про d-точечные конфигурации $p_1, p_2, \dots, p_d \in \mathbb{P}(U)$ заключается в том, чтобы воспринимать их как точки проективного пространства $\mathbb{P}_d = \mathbb{P}(S^d U)$ однородных многочленов степени d от базисных векторов e_0, e_1 пространства U. При таком подходе конфигурации $p_1, p_2, \dots, p_d \in \mathbb{P}_1$ сопоставляется произведение $p_1 p_2 \dots p_d \in \mathbb{P}_d$.

Покажем, что над произвольным полем $\Bbbk$, характеристика которого не делит d, множество всех тех d-точечных конфигураций на $\mathbb{P}_1$, где все d точек совпадают друг с другом, образуют алгебраическую кривую $C_d \subset \mathbb{P}_d$. Эта кривая называется *кривой Веронезе* или *рациональной нормальной кривой* степени d в $\mathbb{P}_d$. По определению, она является образом *вложения Веронезе*

$$\nu_d : \mathbb{P}(U) = \mathbb{P}\left(S^d U\right) , \quad a \mapsto a^d , \tag{4-13}$$

[1] Кратностью корня p однородного многочлена $f(x_0, x_1)$ по-определению называется максимальная степень линейной формы $\det(x, p)$, на которую многочлен f делится в кольце $\Bbbk[x_0, x_1]$.

переводящего линейный двучлен $a = t_0e_0 + t_1e_1$ в однородный многочлен

$$\left(t_0e_0 + t_1e_1\right)^d = \sum_{i=0}^{d} t_0^{d-i}t_1^i \binom{d}{i} e_0^{d-1}e_1^i \,.$$

Если $\mathrm{char}\,\Bbbk \nmid d$, мономы $\binom{d}{i}e_0^{d-1}e_1^i$ образуют базис[1] векторного пространства S^dU, и в однородных координатах относительно этого базиса отображение Веронезе $\nu_d : \mathbb{P}_1 \to \mathbb{P}_d$ имеет вид

$$(t_0 : t_1) \mapsto \left(t_0^d : t_0^{d-1}t_1 : t_0^{d-2}t_1^2 : \ldots : t_1^d\right) .$$

Координаты в правой части образуют геометрическую прогрессию со знаменателем t_1/t_0. Наоборот, любой набор из $d+1$ чисел $a_0, a_1, \ldots, a_n$, образующих геометрическую прогрессию, т. е. таких, что

$$\mathrm{rk}\begin{pmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & \ldots & a_{d-2} & a_{d-1} \\ a_1 & a_2 & a_3 & \ldots & a_{d-1} & a_d \end{pmatrix} = 1\,,$$

находится в образе отображения Веронезе. Тем самым, кривая Веронезе описывается системой однородных квадратных уравнений

$$\det\begin{pmatrix} a_i & a_j \\ a_{i+1} & a_{j+1} \end{pmatrix} = a_ia_{j+1} - a_{i+1}a_j = 0\,, \quad \text{где} \quad 0 \leqslant i < j \leqslant d\,. \tag{4-14}$$

Лемма 4.1
Если $\mathrm{char}\,\Bbbk \nmid d$, никакая гиперплоскость в $\mathbb{P}_d$ не пересекает кривую Веронезе $C_d \subset \mathbb{P}_d$ более, чем по d точкам. В частности, любые k различных точек кривой Веронезе порождают $(k-1)$-мерное проективное подпространство при $1 \leqslant k \leqslant d+1$.

Доказательство. Гиперплоскость, задаваемая уравнением $A_0a_0 + A_1a_1 + \cdots + A_da_d = 0$, пересекает кривую C_d по образам тех точек $(t_0 : t_1) \in \mathbb{P}_1$, которые являются корнями однородного многочлена $\sum A_\nu t_0^{d-i}t_1^i$ степени d. □

Пример 4.11 (коника Веронезе)
Коника Веронезе $C_2 \subset \mathbb{P}_2 = \mathbb{P}(S^2U)$, где $\dim U = 2$, состоит из всех таких квадратичных форм

$$a_0e_0^2 + 2a_1e_0e_1 + a_2e_1^2$$

от базисных векторов e_0, e_1 пространства U, которые являются квадратами линейных форм. Система (4-14) в этом случае состоит из одного, хорошо известного с седьмого класса уравнения

$$D/4 = -\det\begin{pmatrix} a_0 & a_1 \\ a_1 & a_2 \end{pmatrix} = a_1^2 - a_0a_2 = 0\,, \tag{4-15}$$

решения которого имеют вид $(a_0 : a_1 : a_2) = (t_0^2 : t_0t_1 : t_1^2)$, где $t = (t_0 : t_1)$ пробегает $\mathbb{P}_1$, что мы уже видели в форм. (4-7) на стр. 44. Таким образом, приведение уравнения непустой невырожденной коники $C \subset \mathbb{P}_2$ к виду (4-15) на геометрическом языке означает такое отождествление объемлющей конику плоскости $\mathbb{P}_2$ с пространством $\mathbb{P}(S^2U)$ неупорядоченных пар точек на $\mathbb{P}_1 = \mathbb{P}(U)$, при котором коника C становится множеством двойных точек a^2.

Упражнение 4.12. Убедитесь, что множество пар ab, в которых точка a фиксирована, а b пробегает $\mathbb{P}(U)$, является прямой на плоскости $\mathbb{P}(S^2U)$.

[1] Обратите внимание, что $(t_0e_0 + t_1e_1)^d = t_0^dx_0^d + t_1^de_1^d$, когда $d \mid \mathrm{char}\,\Bbbk$.

Мы видим, что пара касательных, которые можно опустить на конику Веронезе из точки ab, это прямые, образованные парами at и bt, где t пробегает $\mathbb{P}(U)$. Они касаются коники C_2 в точках a^2 и b^2 соответственно. Отметим, что если основное поле $\Bbbk$ не является алгебраически замкнутым, то на плоскости $\mathbb{P}(S^2U)$ могут быть точки, не представимые в виде ab, поскольку могут существовать не раскладывающиеся на линейные множители однородные многочлены второй степени.

§5. Проективные преобразования

5.1. Линейные проективные изоморфизмы. Всякий линейный изоморфизм векторных пространств $F : U \xrightarrow{\sim} W$ корректно задаёт биекцию $\overline{F} : \mathbb{P}(U) \xrightarrow{\sim} \mathbb{P}(W)$ между одномерными подпространствами в U и W, которая называется *линейным проективным преобразованием* или *проективным изоморфизмом*.

Пример 5.1 (перспектива между гиперплоскостями)
Для любой пары проективных гиперплоскостей $L_1, L_2 \subset \mathbb{P}_n = \mathbb{P}(V)$ и произвольной точки $p \notin L_1 \cup L_2$ центральная проекция гиперплоскости L_1 из точки p на гиперплоскость L_2 задаёт проективный изоморфизм между L_1 и L_2, который мы будем обозначать $p : L_1 \xrightarrow{\sim} L_2$ и называть *перспективой* с центром в p.

В самом деле, пусть $L_1 = \mathbb{P}(U)$, $L_2 = \mathbb{P}(W)$ и $p = \mathbb{P}(\Bbbk \cdot e)$. Тогда $V = W \oplus \Bbbk \cdot e$, ибо $p \notin L_2$, и центральная проекция из p задаётся ограничением линейной проекции $V \twoheadrightarrow W$ вдоль одномерного подпространства $\Bbbk \cdot e$ на подпространство $U \subset V$. Так как $p \notin L_1$, подпространство U имеет нулевое пересечение с ядром проекции и, стало быть, проектируется на W изоморфно.

Теорема 5.1
Для любых двух векторных пространств U, W одинаковой размерности $\dim U = \dim W = n + 1$ и упорядоченных наборов из $n + 2$ точек $p_0, p_1, \dots, p_{n+1} \in \mathbb{P}(U)$, $q_0, q_1, \dots, q_{n+1} \in \mathbb{P}(W)$, в каждом из которых никакие $n + 1$ точек не лежат в одной гиперплоскости, существует единственный с точностью до пропорциональности линейный изоморфизм $F : U \xrightarrow{\sim} W$, такой что $\overline{F}(p_i) = q_i$ при всех i.

Доказательство. Рассмотрим какие-нибудь ненулевые векторы u_i и w_i, представляющие точки p_i и q_i, и зафиксируем наборы векторов $\boldsymbol{u} = (u_0, u_1, \dots, u_n)$ и $\boldsymbol{w} = (w_0, w_1, \dots, w_n)$ в качестве базисов векторных пространств U и W. Отображение $\overline{F} : \mathbb{P}(U) \to \mathbb{P}(W)$ тогда и только тогда переводит точку p_i в точку q_i, когда $F(u_i) = \lambda_i w_i$ для некоторых ненулевых $\lambda_i \in \Bbbk$. Поэтому точки $p_0, p_1, \dots, p_n$ переходят в точки $q_0, q_1, \dots, q_n$ если и только если матрица $F_{\boldsymbol{wu}}$ оператора F в выбранных нами базисах диагональна с ненулевыми элементами $\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_n$ на диагонали. В силу наложенных на точки условий все координаты x_i в разложении $u_{n+1} = x_0 u_0 + x_1 u_1 + \dots + x_n u_n$ вектора u_{n+1} по базису $\boldsymbol{u}$ отличны от нуля, так как при занулении i-той координаты точка p_{n+1} и n точек p_ν с $\nu \neq i$ оказываются в одной гиперплоскости $x_i = 0$. Если $w_{n+1} = y_0 w_0 + y_1 w_1 + \dots + y_n w_n$ и $F(u_{n+1}) = \lambda w_{n+1}$ для некоторого ненулевого $\lambda \in \Bbbk$, то $y_i = \lambda \lambda_i x_i$ при всех $0 \leqslant i \leqslant n$, откуда $\lambda_i = \lambda^{-1} y_i / x_i$, т. е. матрица оператора F определяется однозначно с точностью до умножения на ненулевую константу λ^{-1}. □

Следствие 5.1
Два линейных изоморфизма тогда и только тогда задают равные проективные изоморфизмы, когда они пропорциональны. □

Пример 5.2 (четырёхвершинник и эпиморфизм $S_4 \twoheadrightarrow S_3$)
Любые четыре точки $a, b, c, d \in \mathbb{P}_2$, никакие три из которых не коллинеарны, задают конфигурацию из трёх пар прямых, соединяющих непересекающиеся пары точек (см. рис. 5◊1). Эта конфигурация называется *четырёхвершинником* $abcd$, а пары прямых, проходящих через непересекающиеся пары точек, называются *противоположными сторонами* этого четырёхвершинника. Точки пересечений пар противоположных сторон

$$x = (ab) \cap (cd), \quad y = (ac) \cap (bd), \quad z = (ad) \cap (bc) \tag{5-1}$$

и проходящие через них три прямые называют *ассоциированным треугольником* xyz четырёхвершинника $abcd$. Согласно теор. 5.1 на стр. 53, каждая перестановка точек a, b, c, d однозначно задаёт проективное преобразование $\mathbb{P}_2 \xrightarrow{\sim} \mathbb{P}_2$, переводящее четырёхвершинник $abcd$ в себя, а значит, как-то переставляющее вершины x, y, z ассоциированного с ним треугольника. Возникающий таким образом гомоморфизм групп $\pi : S_4 \twoheadrightarrow S_3$ сюрьективен, поскольку транспозиция точек a, b и транспозиция точек a, c приводят, соответственно, к транспозициям точек y, z и точек x, z, которые порождают группу треугольника xyz. Ядро гомоморфизма[1] π состоит из тождественной перестановки и трёх пар независимых транспозиций:

$$\ker \pi = \{(a, b, c, d), (b, a, d, c), (c, d, a, b), (d, c, b, a)\} .$$

Эта четырёхэлементная группа перестановок называется *группой Клейна* или *группой двуугольника* и обозначается V_4 или D_2.

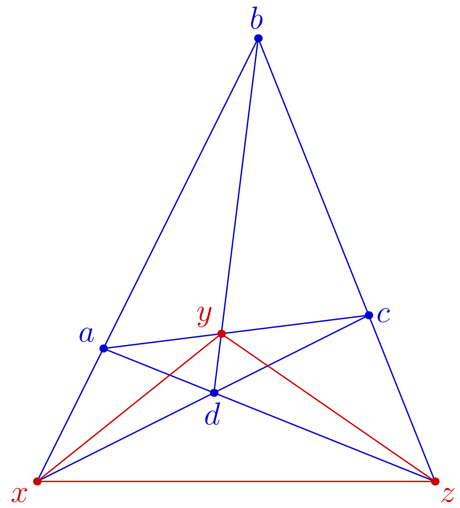

Рис. 5◇1. Четырёхвешинник.

Определение 5.1 (линейные проективные группы)
Согласно теор. 5.1 линейные проективные автоморфизмы пространства $\mathbb{P}(V)$ образуют группу, изоморфную фактор группе полной линейной группы $\mathrm{GL}(V)$ по подгруппе скалярных гомотетий $H = \{\lambda \cdot \mathrm{Id} \mid \lambda \neq 0\} \subset \mathrm{GL}(V)$. Эта фактор группа обозначается $\mathrm{PGL}(V) = \mathrm{GL}(V)\,/\,H$ и называется *линейной проективной группой* пространства V. Если при помощи выбора базиса отождествить линейную группу $\mathrm{GL}(V)$ с группой невырожденных матриц GL_{n+1}, проективная группа $\mathrm{PGL}(V)$ отождествится с группой PGL_{n+1} невырожденных матриц, рассматриваемых с точностью до пропорциональности.

Пример 5.3 (дробно линейные преобразования прямой)
Группа $\mathrm{PGL}_2(\Bbbk)$ состоит из классов пропорциональности матриц $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ с $ad - bc \neq 0$. Она действует на $\mathbb{P}_1$ по правилу

$$A : (x_0 : x_1) \mapsto ((ax_0 + bx_1) : (cx_0 + dx_1)) .$$

В стандартной аффинной карте $U_1 \simeq \mathbb{A}^1$ с аффинной координатой $t = x_0/x_1$, это действие имеет вид дробно линейного преобразования $t \mapsto (at+b)/(ct+d)$. Единственное дробно линейное преобразование, переводящее три заданных различных точки a, b, c в ∞, 0, 1, очевидно, таково:

$$t \mapsto \frac{t-b}{t-a} \cdot \frac{c-a}{c-b} . \tag{5-2}$$

Образ точки $d \in \mathbb{P}_1$ при таком преобразовании называется *двойным отношением* упорядоченной четвёрки точек a, b, c, d и обозначается

$$[a,\, b,\, c,\, d] \stackrel{\text{def}}{=} \frac{(a-c)(b-d)}{(a-d)(b-c)} .$$

[1]Напомню, что *ядром* гомоморфизма групп $\varphi : G_1 \to G_2$ называется подгруппа $\ker \varphi \subset G_1$, состоящая из всех элементов группы G_1, отображающихся в единицу группы G_2.

Теорема 5.2

Над алгебраически замкнутым полем $\Bbbk$ характеристики нуль всякое биективное отображение

$$\varphi : \mathbb{P}_1 \smallsetminus \{\text{конечное множество}\} \xrightarrow{\sim} \mathbb{P}_1 \smallsetminus \{\text{конечное множество}\} ,$$

которое может быть задано в некоторой аффинной карте с координатой t формулой

$$\varphi(t) = g(t)/h(t) , \quad \text{где} \quad g, h \in \Bbbk[t] , \tag{5-3}$$

продолжается на всю прямую и является линейным проективным изоморфизмом.

Доказательство. Переходя к однородным координатам $(x_0 : x_1)$, для которых $t = x_0 / x_1$, и меняя при необходимости конечное множество точек неопределённости отображения φ, перепишем формулу (5-3) в виде $\varphi : (x_0 : x_1) \mapsto \big(f(x_0, x_1) : g(x_0, x_1)\big)$, где f и g — взаимно простые однородные многочлены от (x_0, x_1) одинаковой степени $\deg f = \deg g = d$. Точка $\vartheta = (\vartheta_0 : \vartheta_1) \in \mathbb{P}_1$ имеет при отображении φ ровно один прообраз если и только если однородный многочлен $\vartheta_1 \cdot f(x_0, x_1) - \vartheta_0 \cdot g(x_0, x_1)$ имеет на $\mathbb{P}_1$ ровно один корень $\zeta = \varphi^{-1}(\vartheta)$. Над алгебраически замкнутым полем такое возможно, только если этот корень d-кратный, т. е.

$$\vartheta_1 \cdot f(x) - \vartheta_0 \cdot g(x) = \det{}^d(x, \zeta) .$$

Поскольку алгебраически замкнутое поле $\Bbbk$ бесконечно, а отображение φ биективно вне конечного множества точек, прямая (fg) в пространстве $\mathbb{P}_d$ однородных многочленов степени d от (x_0, x_1) имеет бесконечно много точек пересечения с кривой Веронезе[1] $C_d \subset \mathbb{P}_d$, состоящей из d-тых степеней линейных двучленов. Поскольку при $d \geqslant 2$ никакие три точки кривой C_d не лежат на одной прямой[2], мы заключаем, что $d = 1$ и $\varphi \in \mathrm{PGL}_2(\Bbbk)$. □

5.2. Гомографии. Линейные проективные изоморфизмы между проективными прямыми называются *гомографиями*. Простейший пример гомографии — перспектива $o : \ell_1 \xrightarrow{\sim} \ell_2$ между двумя прямыми на плоскости, задаваемая центральной проекцией из какой-нибудь точки $o \notin \ell_1 \cup \ell_2$, как в прим. 5.1 выше, см. рис. 5◊2.

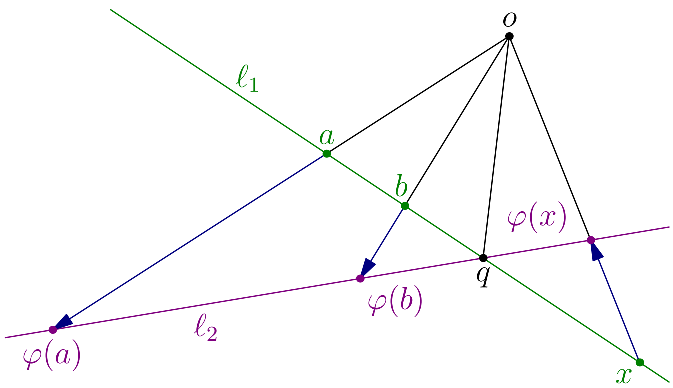

Рис. 5◊2. Перспектива.

Согласно теор. 5.1, каждая гомография однозначно определяется своим действием на три различные точки.

[1] См. n° 4.4.6 на стр. 50.

[2] См. лем. 4.1 на стр. 51.

Лемма 5.1
Гомография $\varphi : \ell_1 \xrightarrow{\sim} \ell_2$ между прямыми $\ell_1, \ell_2 \subset \mathbb{P}_2$ является перспективой если и только если она переводит точку пересечения прямых $\ell_1 \cap \ell_2$ в себя.

Доказательство. Обозначая через o точку пересечения прямых $(a, \varphi(a))$ и $(b, \varphi(b))$, соединяющих произвольные точки $a, b \in \ell_1 \smallsetminus \ell_2$ с их образами $\varphi(a)$, $\varphi(b)$, как на рис. 5◇2, видим, что перспектива $o : \ell_1 \xrightarrow{\sim} \ell_2$ действует на три точки a, b и $\ell_1 \cap \ell_2$ так же, как и φ. □

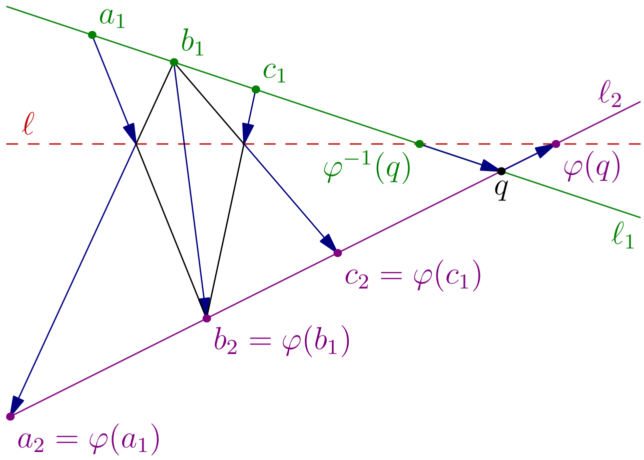

Рис. 5◇3. Перекрёстная ось.

Предложение 5.1 (перекрёстная ось гомографии)
Каждая гомография $\varphi : \ell_1 \xrightarrow{\sim} \ell_2$ между прямыми $\ell_1, \ell_2 \subset \mathbb{P}_2$ раскладывается в композицию $\varphi = b_1 \circ b_2$ двух перспектив $b_2 : \ell_1 \to \ell$ и $b_1 : \ell \to \ell_2$ с центрами в точках $b_1 \in \ell_1$, $b_2 \in \ell_2$. При этом точку b_1 можно выбрать на прямой ℓ_1 произвольно, точка $b_2 = \varphi(b_1)$, а прямая ℓ не зависит от выбора точки b_1, проходит через точки $\varphi(\ell_1 \cap \ell_2)$ и $\varphi^{-1}(\ell_1 \cap \ell_2)$ и представляет собою ГМТ пересечения «перекрёстных прямых» $(x, \varphi(y)) \cap (y, \varphi(x))$, где $x \neq y$ независимо пробегают ℓ_1. Более того, любое разложение гомографии φ в композицию $b_1 \circ b_2$ перспектив с центрами в точках $b_1 \in \ell_1$, $b_2 \in \ell_2$ имеет именно такой вид.

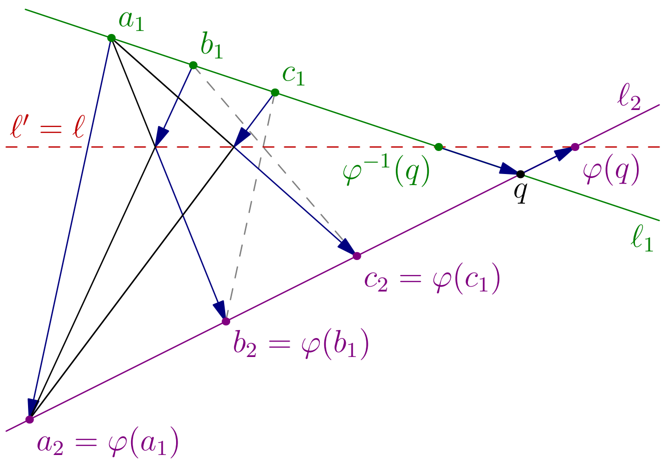

Рис. 5◇4. Равенство $\ell' = \ell$.

Доказательство предл. 5.1. Рассмотрим какие-нибудь три различные точки $a_1, b_1, c_1 \in \ell_1$, отличные от точки $q = \ell_1 \cap \ell_2$, и обозначим через $a_2, b_2, c_2 \in \ell_2$ их образы, а через ℓ — прямую, проходящую через точки $(a_1 b_2) \cap (b_1, a_2)$ и $(c_1 b_2) \cap (b_1, c_2)$. Поскольку композиция перспектив $b_1 \circ b_2$ переводит точки a_1, b_1, c_1 в a_2, b_2, c_2, она совпадает с φ, см. рис. 5⋄3 на стр. 56. Чтобы убедиться, что прямая ℓ не зависит от выбора точки b_1 повторим наше рассуждение, заменив в нём тройку a_1, b_1, c_1 тройкой c_1, a_1, b_1, как на рис. 5⋄4 на стр. 56. Получим разложение $\varphi = a_1 \circ a_2$ в композицию перспектив $a_2 : \ell' \to \ell$ и $a_1 : \ell' \to \ell_2$, где прямая ℓ' проходит через точки $(a_1 c_2) \cap (c_1, a_2)$ и $(b_1 a_2) \cap (a_1, b_2)$. Заметим, что обе прямые ℓ и ℓ' проходят через точки[1] $\varphi(q)$ и $\varphi^{-1}(q)$, а также через отличную от них точку $(b_1 a_2) \cap (a_1, b_2)$. Поэтому $\ell = \ell'$. Все остальные утверждения теперь очевидны из рис. 5⋄3. □

Упражнение 5.1. Для заданной пары прямых $\ell_1, \ell_2 \subset \mathbb{P}_2$ и гомографии $\varphi : \ell_1 \xrightarrow{\sim} \ell_2$, переводящей заданные три точки $a_1, b_1, c_1 \in \ell_1$ в заданные три точки $a_2, b_2, c_2 \in \ell_2$, постройте при помощи одной линейки образ $\varphi(x)$ произвольно заданной точки $x \in \ell_1$.

5.2.1. Гомографии между пучками прямых. Если рассмотренные выше прямые ℓ_1, ℓ_2 лежат на двойственной плоскости $\mathbb{P}_2^\times$, то они представляют собою два пучка прямых $\ell_i = p_i^\times$ с центрами в двух различных точках $p_1, p_2 \in \mathbb{P}_2$, а гомография $\varphi : p_1^\times \xrightarrow{\sim} p_2^\times$ является гомографией между этими пучками. Проективно двойственным к существованию перекрёстной оси для гомографии между двумя прямыми является следующее утверждение.

Следствие 5.2
Для любой гомографии $\varphi : p_1^\times \xrightarrow{\sim} p_2^\times$ между пучками прямых с центрами в двух различных точках $p_1 \neq p_2$ все прямые, соединяющие пары точек вида $\ell_1 \cap \varphi(\ell_2)$ и $\ell_2 \cap \varphi(\ell_1)$, где прямые $\ell_1 \neq \ell_2$ независимо пробегают пучок $p_1^\times$, пересекаются в одной точке[2] □

Предложение 5.2
Пусть гомография $\varphi : p_1^\times \xrightarrow{\sim} p_2^\times$ пучка прямых с центром в точке p_1 в пучок прямых с центром в точке $p_2 \neq p_1$ переводит три различные прямые $\ell_1', \ell_2', \ell_3' \ni p_1$, отличные от прямой $(p_1 p_2)$, в прямые $\ell_1'', \ell_2'', \ell_3'' \ni p_2$, и пусть $q_i = \ell_i' \cap \ell_i''$, $i = 1, 2, 3$. Тогда ГМТ пересечения соответственных прямых $\ell \cap \varphi(\ell)$ это единственная коника, проходящая через пять точек p_1, p_2, q_1, q_2, q_3. Эта коника распадается тогда и только тогда, когда гомография φ является перспективой[3]. Для неперспективной гомографии эта коника гладкая.

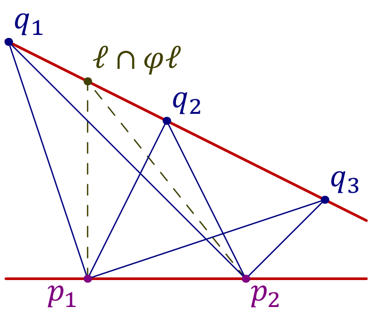

Рис. 5⋄5. Перспектива $\varphi : p_1^\times \to p_2^\times$.

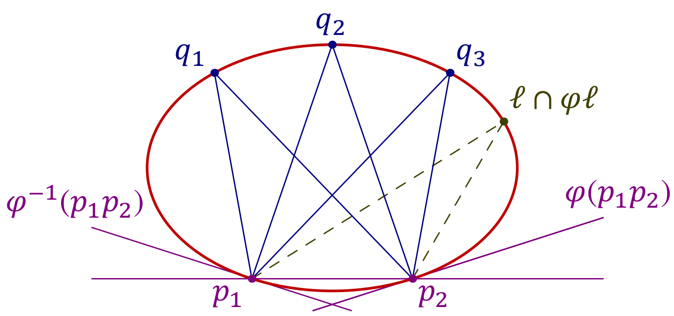

Рис. 5⋄6. Неперспективная гомография $\varphi : p_1^\times \to p_2^\times$.

[1] Которые могут совпадать, если гомография φ перспектива.
[2] Эта точка называется *перекрёстным центром* гомографии φ.
[3] Т. е. переодит прямую $(p_1 p_2) \in p_1^\times$ в прямую $(p_1 p_2) \in p_2^\times$.

Доказательство. Из условия вытекает, что никакие четыре из точек p_1, p_2, q_1, q_2, q_3 не коллинеарны. По предл. 4.2 на стр. 48 через них проходит единственная коника C.

Упражнение 5.2. Убедитесь, что отображение $C : p_1^\times \to p_2^\times$, переводящее прямую (p_1p) в прямую (p_2p) для всех $p \in C_\varphi$, является гомографией.

Гомография C из упр. 5.2 действует на три прямые ℓ_i' точно также, как φ, см. рис. 5◇6. Если коника C гладкая, то она переводит касательную прямую $T_{p_1}C_\varphi$ в прямую (p_1p_2), а прямую (p_1p_2) — в касательную $T_{p_2}C_\varphi$. Если коника C_φ распавшаяся, то $C_\varphi = (p_1p_2) \cup (q_iq_j)$, точки q_1, q_2, q_3 коллинеарны, и гомография φ переводит прямую (p_1p_2) в себя, т. е. является перспективой, см. рис. 5◇5. □

Пример 5.4 (трассировка коники линейкой)
Из сл. 5.2 вытекает следующий способ построения одной линейкой образа прямой $\ell \ni p_1$ при гомографии $\varphi : p_1^\times \simeq p_2^\times$, если известны образы $\ell_1'', \ell_2'', \ell_3'' \ni p_2$ каких-либо трёх различных прямых $\ell_1', \ell_2', \ell_3' \ni p_1$: строим перекрёстный центр o — точку пересечения прямой, проходящей через точки $\ell_1' \cap \ell_2''$, $\ell_2' \cap \ell_1''$, и прямой, проходящей через точки $\ell_2' \cap \ell_3''$, $\ell_3' \cap \ell_2''$, после чего прямая $\varphi(\ell) \ni p_2$ будет пересекать прямую ℓ_1' в той же точке, что и прямая, проходящая через o и точку $\ell \cap \ell_1''$. Так как точки пересечения $\ell \cap \varphi(\ell)$ заметают конику C, проходящую через p_1, p_2 и три точки пересечений $q_i = \ell_i' \cap \ell_i''$, мы получаем возможность одной линейкой строить точки коники, проходящей через пять заданных точек. Это построение можно сделать куда более эффективным при помощи следующего наблюдения, см. рис. 5◇7.

Отождествим пучок $p_1^\times$ с прямой $\ell_1 = (q_1q_3)$, а пучок $p_2^\times$ — с прямой $\ell_2 = (q_2q_3)$, сопоставляя каждой прямой из пучка $p_i^\times$ её пересечение с соответствующей прямой ℓ_i. Задаваемая коникой C гомография $\varphi : p_1^\times \to p_2^\times$ превращается при этом в гомографию $\varphi : \ell_1 \to \ell_2$, которая является композицией проекции $p_1 : \ell_1 \simeq C$ прямой ℓ_1 на конику C из точки p_1 и проекции $p_2 : C \simeq \ell_2$ коники C на прямую ℓ_2 из точки p_2, и в то же время является перспективой с центром в точке $c = (p_1q_2) \cap (p_2q_1)$, поскольку последняя действует на точки q_3, q_1 и $r = \varphi^{-1}(q_2)$ прямой ℓ_1 так же, как и композиция указанных проекций, см. рис. 5◇7. Таким образом, каждая проходящая через точку c прямая ℓ пересекает прямые ℓ_1 и ℓ_2 в точках t_1 и $t_2 = \varphi(t)$ соответственно, а значит, точка $x(\ell) = (p_1t_1) \cap (p_2t_2)$ лежит на конике C, см. рис. 5◇7. Когда ℓ пробегает пучок прямых с центром в c, точка $x(\ell)$ рисует конику C.

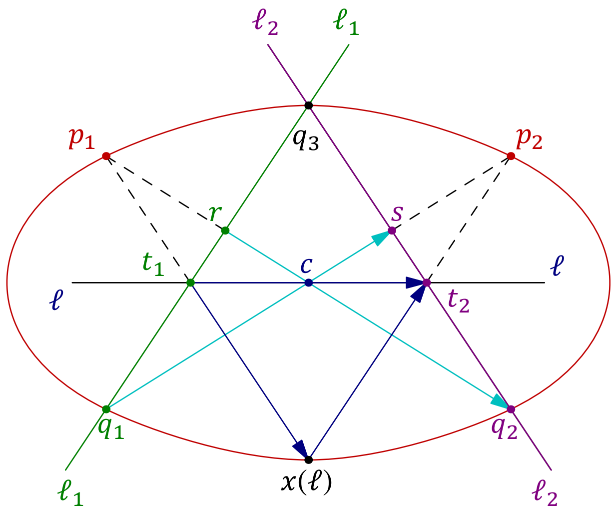

Рис. 5◇7. Трассировка коники линейкой.

Теорема 5.3 (теорема Паскаля)
Шесть точек $p_1, p_2, \dots, p_6$, никакие три из которых не коллинеарны, тогда и только тогда лежат на одной гладкой конике, когда коллинеарны три точки пересечений

$$x = (p_3p_4) \cap (p_6p_1), \quad y = (p_1p_2) \cap (p_4p_5), \quad z = (p_2p_3) \cap (p_5p_6)$$

пар «противоположных сторон» шестиугольника $p_1, p_2, \dots, p_6$, см. рис. 5◇8.

Доказательство. Отождествляя рис. 5◇8 с рис. 5◇7, положим $\ell_1 = (p_3p_4)$ и $\ell_2 = (p_3p_2)$. Если $z \in (xy)$, то x переходит в z при перспективе

$$y : \ell_1 \to \ell_2, \tag{5-4}$$

которая, как мы видели в прим. 5.4, раскладывается в композицию проекций

$$\left(p_5 : C \rightsquigarrow \ell_2\right) \circ (p_1 : \ell_1 \rightsquigarrow C) \tag{5-5}$$

где C — гладкая коника, проходящая через $p_1, p_2, \dots, p_5$. Поэтому $p_6 = (p_5z) \cap (p_3x) \in C$. Наоборот, если $p_6 \in C$ и $z = \ell \cap (p_5p_6)$, то z является образом точки $x \in \ell_1$ при композиции проекций (5-5), а значит, и при перспективе (5-4), откуда $z \in (xy)$. □

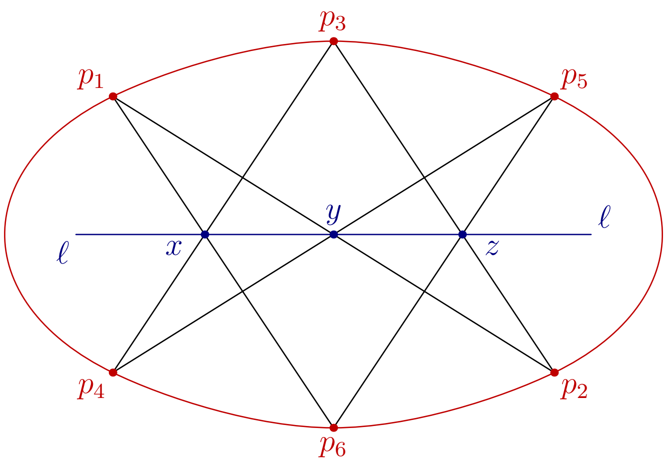

Рис. 5◇8. Гексограмма Паскаля.

5.3. Двойное отношение. Рассмотрим проективную прямую $\mathbb{P}_1 = \mathbb{P}(\Bbbk^2)$ со стандартными однородными координатами $(x_0 : x_1)$ и стандартную аффинную карту U_1 на ней с координатой $x = x_0 / x_1$. Разность аффинных координат $a = a_0 / a_1$ и $b = b_0 / b_1$ любых двух точек, лежащих в карте U_1, с точностью до ненулевого множителя совпадает с определителем однородных координат $(a_0 : a_1)$ и $b = (b_0 : b_1)$ этих же точек, поскольку

$$a - b = \frac{a_0}{a_1} - \frac{b_0}{b_1} = \frac{a_0b_1 - a_1b_0}{a_1b_1} = \frac{\det(a, b)}{a_1b_1}\,.$$

Для упорядоченной четвёрки различных точек $p_1,\ p_2,\ p_3,\ p_4 \in \mathbb{P}_1$ число

$$[p_1,\ p_2,\ p_3,\ p_4] = \frac{\left(p_1 - p_3\right)\left(p_2 - p_4\right)}{\left(p_1 - p_4\right)\left(p_2 - p_3\right)} = \frac{\det\left(p_1, p_3\right) \cdot \det\left(p_2, p_4\right)}{\det\left(p_1, p_4\right) \cdot \det\left(p_2, p_3\right)}\,. \tag{5-6}$$

называется *двойным отношением*[1] этих четырёх точек. Как мы видели в прим. 5.3 на стр. 54, оно равно аффинной координате образа точки p_4 при единственной гомографии, переводящей точки p_1, p_2, p_3 в $\infty,\ 0,\ 1$ с сохранением порядка. Тем самым, двойное отношение четырёх различных точек может принимать любые значения кроме ∞, 0 и 1.

Предложение 5.3
Две упорядоченных четвёрки точек тогда и только тогда переводятся одна в другую гомографией, когда их двойные отношения одинаковы.

Доказательство. Пусть гомографии φ_p и φ_q переводят упорядоченные тройки точек p_1, p_2, p_3 и q_1, q_2, q_3 в тройку $\infty,\ 0,\ 1$. Если $[p_1, p_2, p_3, p_4] = [q_1, q_2, q_3, q_4]$, то $\varphi_p(p_4) = \varphi_q(q_4)$ и гомография $\varphi_q^{-1} \circ \varphi_p$ переводит p_1, p_2, p_3, p_4 в q_1, q_2, q_3, q_4. Наоборот, если существует гомография ψ, переводящая p_1, p_2, p_3, p_4 в q_1, q_2, q_3, q_4, то гомография $\varphi_p \circ \psi^{-1}$ переводит четвёрку q_1, q_2, q_3, q_4 в четвёрку $\infty,\ 0,\ 1,\ [p_1, p_2, p_3, p_4]$, откуда $[p_1, p_2, p_3, p_4] = [q_1, q_2, q_3, q_4]$. □

Следствие 5.3
Правая часть равенства (5-6) не зависит от выбора однородных координат, а средняя часть, содержащая разности аффинных координат точек, не зависит ни от выбора аффинной карты, ни от выбора локальной аффинной координаты в ней, при условии, что эта карта содержит все четыре точки, т. е. значения p_1, p_2, p_3, p_4 конечны.

Доказательство. Поскольку замена однородных координат является гомографией, первое утверждение следует из предл. 5.3. Второе утверждение является следствием первого. □

Упражнение 5.3. Докажите сл. 5.3 прямым вычислением и убедитесь, что для точек $c, d \in \mathbb{P}_1$, лежащих в аффинной карте с нулём в точке b и бесконечностью в точке a, так что $c = b+\gamma a$, $d = b + \delta a$ для некоторых $\gamma, \delta \in \Bbbk$, двойное отношение $[a, b, c, d] = \delta/\gamma$.

Предложение 5.4
Биекция $\varphi\colon\ \mathbb{P}_1 \xrightarrow{\sim} \mathbb{P}_1$ является гомографиейесли и только если она сохраняет двойные отношения.

Доказательство. Пусть φ переводит точки a, b и c в ∞, 0 и 1. Если φ сохраняет двойные отношения, то каждая точка $t \in \mathbb{P}_1 \smallsetminus \{a, b, c\}$ переходит в точку

$$\varphi(t) = [a, b, c, t] = \frac{(t-b)(c-a)}{(t-a)(c-b)}\,.$$

Таким образом, преобразование φ дробно линейно. □

5.3.1. Специальные четвёрки точек. Одновременная перестановка двух непересекающихся пар точек в формуле (5-6) не меняет двойного отношения. Пусть

$$[p_1, p_2, p_3, p_4] = [p_2, p_1, p_4, p_3] = [p_3, p_4, p_1, p_2] = [p_4, p_3, p_2, p_1] = t\,, \tag{5-7}$$

означает аффинную координату образа точки p_4 при гомографии $\varphi\colon\ (p_1, p_2, p_3) \mapsto (\infty, 0, 1)$. Двойное отношение $[p_2, p_1, p_3, p_4]$ равно образу точки p_4 под действием композиции гомографий $\sigma_{12}\varphi\colon\ (p_1, p_2, p_3) \mapsto (0, \infty, 1)$, в которой $\sigma_{12}\colon\ (\infty, 0, 1) \mapsto (0, \infty, 1)$ действует на аффинную координату t по правилу $t \mapsto 1/t$. Тем самым,

$$[p_2, p_1, p_3, p_4] = [p_1, p_2, p_4, p_3] = [p_3, p_4, p_2, p_1] = [p_4, p_3, p_1, p_2] = 1/t \tag{5-8}$$

[1] По-английски *cross-ratio*.

Аналогичным образом, точка p_4 переводится в точки $[p_3, p_2, p_1, p_4]$ и $[p_1, p_3, p_2, p_4]$ композициями гомографий $\sigma_{13}\varphi : (p_1, p_2, p_3) \mapsto (1, 0, \infty)$ и $\sigma_{23}\varphi : (p_1, p_2, p_3) \mapsto (\infty, 1, 0)$, где гомографии $\sigma_{13} : (\infty, 0, 1) \mapsto (1, 0, \infty)$ и $\sigma_{23} : (\infty, 0, 1) \mapsto (\infty, 1, 0)$ действуют по формулам $t \mapsto t/(t-1)$ и $t \mapsto 1 - t$. Поэтому

$$\begin{aligned} [p_3, p_2, p_1, p_4] = [p_2, p_3, p_4, p_1] = [p_1, p_4, p_3, p_2] = [p_4, p_1, p_2, p_3] = t/(t-1) \\ [p_1, p_3, p_2, p_4] = [p_3, p_1, p_4, p_2] = [p_2, p_4, p_1, p_3] = [p_4, p_2, p_3, p_1] = 1 - t\,. \end{aligned} \tag{5-9}$$

Гомографии $(p_1, p_2, p_3) \mapsto (1, \infty, 0)$ и $(p_1, p_2, p_3) \mapsto (0, 1, \infty)$ получаются применением вслед за φ гомографий $\tau : (\infty, 0, 1) \mapsto (1, \infty, 0)$ и $\tau^{-1} : (\infty, 0, 1) \mapsto (0, 1, \infty)$, действующих по формулам $t \mapsto (t-1)/t$ и $t \mapsto 1/(1-t)$. Поэтому

$$\begin{aligned} [p_2, p_3, p_1, p_4] = [p_3, p_2, p_4, p_1] = [p_1, p_4, p_2, p_3] = [p_4, p_1, p_3, p_2] = (t-1)/t \\ [p_3, p_1, p_2, p_4] = [p_1, p_3, p_4, p_2] = [p_2, p_4, p_3, p_1] = [p_4, p_2, p_1, p_3] = 1/(1-t)\,. \end{aligned} \tag{5-10}$$

Формулы (5-7)-(5-10) описывают все возможные значения двойного отношения, возникающие при 24 перестановках точек p_1, p_2, p_3, p_4. Если $t \in \Bbbk$ таково, что все шесть значений

$$t\,, \quad 1/t\,, \quad t/(t-1)\,, \quad 1-t\,, \quad (t-1)/t\,, \quad 1/(1-t) \tag{5-11}$$

из правых частей формул (5-7)-(5-10) различны, то никакую перестановку точек p_i кроме четырёх перестановок[1] (p_1, p_2, p_3, p_4), (p_2, p_1, p_4, p_3), $(p_3, p_4, p_1, p_2$, (p_4, p_3, p_2, p_1) невозможно осуществить дробно линейным преобразованием проективной прямой. Такие четвёрки точек называются *общими*.

При значениях $t = -1,\ 2,\ 1/2$, которые, соответственно, удовлетворяют равенствам $t = 1/t$, $t = t/(t-1)$, $t = 1-t$, двойное отношение $[p_1, p_2, p_3, p_4] = t$ не меняется, соответственно, при транспозициях[2] $(1,2)$, $(1,3)$, $(1,4)$ и пробегает при всевозможных перестановках точек всего три различных значения. Если t является корнем уравнения[3] $t^2 - t + 1 = 0$, то $t = (t-1)/t$ и $t = 1/(1-t)$, а двойное отношение не меняется при всех циклических перестановках точек p_1, p_2, p_3, принимая всего два различных значения при произвольных перестановках точек.

Четвёрка точек с двойным отношением, равным одному из пяти только что перечисленных специальных значений, называется *специальной*. Таким образом, при перестановках точек, образующих специальную четвёрку, двойное отношение принимает либо три, либо два различных значения. Геометрически, специальность четвёрки точек означает существование гомографии, осуществляющей перестановку этих точек, отличную от четырёх клейновских перестановок.

5.3.2. Гармонические пары точек. Четвёрка точек $\{a, b; c, d\} \in \mathbb{P}_1$ называется *гармонической*, если двойное отношение $[a, b, c, d] = -1$. Геометрически это условие означает, что в аффинной карте, для которой точка a является бесконечностью, точка b является центром тяжести точек c и d. При его выполнении говорят также, что пары точек $\{a, b\}$ и $\{c, d\}$ *гармоничны* по отношению друг к другу. Выше мы видели, что гармоничность двух пар точек равносильна тому, что их двойное отношение не меняется при перестановке точек в одной из этих пар[4]. Так

[1] Составляющих *группу Клейна* из прим. 5.2 на стр. 53.

[2] А также остальных восьми перестановках из подгруппы, порождённой такой транспозицией и четырьмя клейновскими перестановками.

[3] Т. е. является отличным от -1 кубическим корнем из единицы в поле $\Bbbk$.

[4] См. формулу (5-8) на стр. 60.

как двойное отношение не меняется при перестановке пар между собой как единого целого, гармоничность является симметричным бинарным отношением на множестве неупорядоченных пар точек на $\mathbb{P}_1$.

Пример 5.5 (гармонические пары прямых в четырёхвершиннике, продолжение прим. 5.2) Покажем, что в каждом из трёх пучков прямых с центрами в вершинах x, y, z треугольника, ассоциированного с четырёхвершинником $abcd$, пара сторон четырёхвершинника гармонична паре сторон треугольника xyz, см. рис. 5◇9. Для этого запараметризуем пучок всех проходящих через точку x прямых точками прямой (ad) и одновременно — точками прямой (bc). Мы должны проверить, что прямая (xy) пересекает прямые (ad) и (bc) по таким точкам x', x'', что $[a,d,z,x'] = [b,c,z,x''] = -1$. Поскольку центральные проекции из x и из y являются дробно линейными изоморфизмами между прямыми (ad) и (bc), возникают следующие равенства двойных отношений соответственных точек: $[a,d,z,x'] = [b,c,z,x''] = [d,a,z,x']$. Так как при перестановке первых двух точек двойное отношение не поменялось, оно равно -1.

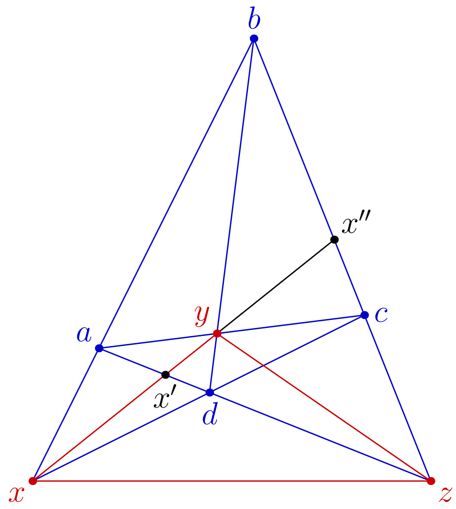

Рис. 5◇9.

5.3.3. Двойное отношение на невырожденной конике. Имеется несколько способов определить *двойное отношение* $[p_1, p_2, p_3, p_4]_C$ четырёх точек p_1, p_2, p_3, p_4 на невырожденной конике $C \subset \mathbb{P}_2$. Можно выбрать пятую точку $p_5 \in C$, отличную от четырёх данных, и положить $[p_1, p_2, p_3, p_4]_C$ равным двойному отношению четырёх прямых (p_5p_i), $1 \leqslant i \leqslant 4$, в пучке $p_5^\times \subset \mathbb{P}_2^\times$ всех прямых, проходящих через точку p_5, или двойному отношению проекций точек p_1, p_2, p_3, p_4 из точки p_5 на какую-нибудь прямую $\ell \subset \mathbb{P}_2$. А можно, как в прим. 4.11 на стр. 51, изоморфно отобразить содержащую конику плоскость $\mathbb{P}_2$ на плоскость $\mathbb{P}(S^2\Bbbk^2)$ неупорядоченных пар точек на $\mathbb{P}_1 = \mathbb{P}(\Bbbk^2)$ так, чтобы коника C биективно отобразилась на состоящую из двойных точек конику Веронезе $C_2 = \{a^2 \in S^2\Bbbk^2 \mid a \in U\}$. Если точки $p_i \in C$ переходят при этом в квадраты $a_i^2 \in C_2$ точек $a_i \in \mathbb{P}_1 = \mathbb{P}(\Bbbk^2)$, мы полагаем $[p_1, p_2, p_3, p_4]_C = [a_1, a_2, a_3, a_4]$. Покажем, что эти способы корректны[1] и дают одинаковый результат, предполагая для простоты, что основное поле $\Bbbk$ алгебраически замкнуто и имеет характеристику нуль[2], чтобы можно было применять теор. 5.2 на стр. 55.

Прямые, проходящие через фиксированную точку $p_5 \in \mathbb{P}_2$, образуют прямую $p_5^\times \subset \mathbb{P}_2^\times$, и для любой прямой $\ell \subset \mathbb{P}_2$ отображение $p_5^\times \to \ell$, переводящее прямую из пучка $p_5^\times$ в точку её пересечения с прямой ℓ, является гомографией, т. е. линейно и биективно.

Упражнение 5.4. Убедитесь в этом.

Поскольку гомографии сохраняют двойное отношение, двойное отношение прямых (p_5p_i) в пучке $p_5^\times$ равно двойному отношению проекций точек p_i из точки p_5 на любую прямую ℓ. В

[1] Т. е. не зависят ни от выбора точки $p_5 \in C \smallsetminus \{p_1, p_2, p_3, p_4\}$, ни от выбора прямой ℓ, на которую проектируются точки p_i, ни от выбора линейного проективного изоморфизма данной коники C с коникой Веронезе C_2.

[2] В действительности, это верно для непустой неособой коники над любым полем характеристики $\operatorname{char}\Bbbk \neq 2$.

частности, последнее одинаково для всех прямых ℓ, не проходящих через точку p_5.

Для любых двух точек $a, b \in C$ и не проходящей через них прямой ℓ композиция проекции прямой ℓ на конику C из точки a и проекции коники C обратно на прямую ℓ из точки b биективна и в однородных координатах на прямой ℓ задаётся рациональными функциями согласно форм. (4-10) на стр. 45. По теор. 5.2 эта композиция является гомографией и сохраняет двойные отношения. Таким образом, двойное отношение проекций точек p_i на прямую из точки $p_5 \in C$ не зависит от выбора точки p_5.

Поскольку композиция вложения Веронезе $\nu_2 : \mathbb{P}(\Bbbk^2) \to \mathbb{P}(S^2\Bbbk^2)$, $a \mapsto a^2$, с проекцией коники Веронезе $C_2 = \operatorname{im}\nu_2$ из любой точки $a^2 \in C_2$ на любую прямую $\ell \subset \mathbb{P}(S^2\Bbbk^2)$ биективна и задаётся в координатах рациональным функциями, она тоже является гомографией и сохраняет двойные отношения. Поэтому для коники Веронезе двойное отношение проекций любых четырёх двойных точек $a_1^2,\ a_2^2,\ a_3^2, a_4^2 \in C_2$ на любую прямую $\ell \subset \mathbb{P}(S^2\Bbbk^2)$ из любой точки на C_2 совпадает с двойным отношением $[a_1,\ a_2,\ a_3,\ a_4]$ самих точек a_i на прямой $\mathbb{P}(\Bbbk^2)$.

Наконец, пусть заданы два линейных проективных изоморфизма $\varphi, \psi :\ \mathbb{P}_2 \xrightarrow{\sim} \mathbb{P}(S^2\Bbbk^2)$, биективно отображающих данную невырожденную конику $C \subset \mathbb{P}_2$ на конику Веронезе и переводящих точки $p_i \in C$ в точки $a_i^2 = \varphi(p_i)$ и $b_i^2 = \psi(p_i)$. Композиция $\eta = \varphi \circ \psi^{-1}$ является линейным проективным автоморфизмом пространства $\mathbb{P}(S^2\Bbbk^2)$ и переводит конику Веронезе в себя. Ограничение автоморфизма η на любую прямую ℓ является гомографией между прямыми ℓ и $\eta(\ell)$ и сохраняет двойные отношения. Если точки $q_1,\ q_2,\ q_3,\ q_4 \in \ell$ являются образами точек $b_1^2,\ b_2^2,\ b_3^2, b_4^2 \in C_2$ при проекции из точки $c^2 \in C_2$, то их образы $\eta(q_i)$ будут образами точек $a_i^2 = \eta(a_i^2)$ при проекции из точки $\eta(c^2)$ на прямую $\eta(\ell)$. Поскольку двойное отношение точек q_i такое же, как и у точек $\eta(q_i)$, вычисленные любым из трёх описанных выше способов двойные отношения точек a_i^2 и точек b_i^2 на конике Веронезе тоже будут одинаковы.

Предложение 5.5

Гладкая коника C, проходящая через пять точек $p_1, p_2, \dots, p_5$, никакие три из которых не коллинеарны, представляет собою ГМТ p, таких что в пучке прямых с центром в p двойное отношение четырёх прямых (p, p_i), $1 \leqslant i \leqslant 4$, равно двойному отношению четырёх прямых (p_5, p_i), $1 \leqslant i \leqslant 4$, в пучке прямых с центром в точке p_5.

Доказательство. Мы уже видели выше, что все точки $p \in C$ обладают требуем свойством. Для любой другой точки p, обладающей этим свойством, обозначим через Q конику, проходящую через точки p, p_1, p_2, p_3 и p_5. Отображение $\gamma_Q :\ p^\times \to p_5^\times$ из пучка прямых с центром в точке p в пучок прямых с центром в p_5, переводящее прямую (pq) в прямую (p_5q) для всех $q \in Q$, биективно и рационально, а значит является гомографией. Гомография γ_Q переводит три прямые (pp_i), $1 \leqslant i \leqslant 3$, в три прямые (p_5p_i), $1 \leqslant i \leqslant 3$. Поскольку $[(p, p_1), (p, p_2), (p, p_3), (p, p_4)] = [(p_5, p_1), (p_5, p_2), (p_5, p_3), (p_5, p_4)]$, прямая (pp_4) переходит в прямую (p_5p_4), откуда $p_4 \in Q$. Но единственная коника, проходящая через пять точек $p_1, p_2, \dots, p_5$, это коника C. Поэтому $Q = C$ и $p \in C$. □

5.4. Гомографии на невырожденной конике. Биективное преобразование $\varphi :\ C \xrightarrow{\sim} C$ невырожденной коники C называется *гомографией*, если оно сохраняет двойные отношения. Согласно предл. 5.4 на стр. 60 это требование равносильно тому, что для некоторой сохраняющей двойные отношения биекции $\psi :\ C \xrightarrow{\sim} \mathbb{P}_1$ преобразование $\psi\varphi\psi^{-1} :\ \mathbb{P}_1 \xrightarrow{\sim} \mathbb{P}_1$ является гомографией на $\mathbb{P}_1$. Если это условие выполняется для какой-нибудь сохраняющей двойные отношения биекции между C и $\mathbb{P}_1$, то по тому же предл. 5.4 оно выполняется для любых таких биекций.

Как и гомография на прямой, гомография на конике однозначно определяется своим действием на какие-нибудь три различные точки.

Пример 5.6 (инволюции)
Гомография $\sigma : C \to C$ называется *инволюцией*, если она обратна самой себе, т. е. $\sigma^2 = \mathrm{Id}_C$. Тождественная инволюция $\sigma = \mathrm{Id}_C$ называется *тривиальной*. Пусть точки a_1, a_2, b_1, b_2 на конике C различны и инволюция $\sigma : C \to C$ переставляет одноимённые точки $a_1 \leftrightarrow a_2$ и $b_1 \leftrightarrow b_2$ как на рис. 5◇10. Обозначим точку пересечения прямых (a_1a_2) и (b_1b_2) через s. Пучок прямых с центром в s задаёт биективное преобразование $\sigma_s : C \xrightarrow{\sim} C$, переставляющее точки пересечения коники C с каждой проходящей через s прямой.

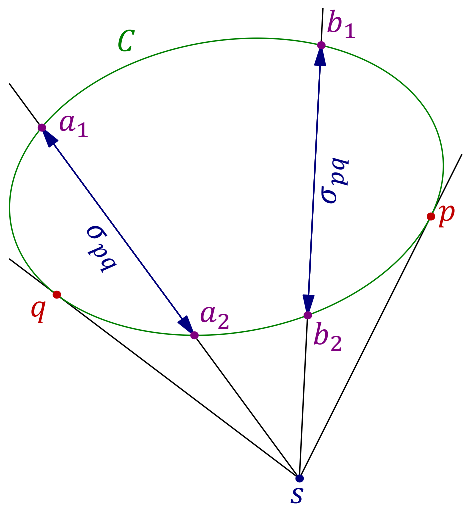

Рис. 5◇10. Инволюция на конике.

Упражнение 5.5. Убедитесь, что это преобразование рационально.

Следовательно, σ_s является гомографией, а значит, совпадает с инволюцией σ, поскольку действует на четыре точки a_1, a_2, b_1, b_2 также, как и σ. В частности, неподвижными точками инволюции σ являются две точки, образующие видимый из точки s контур коники C.

Таким образом, над алгебраически замкнутым полем $\Bbbk$ с $\mathrm{char}(\Bbbk) \neq 2$ каждая нетривиальная инволюция на проективной прямой или на невырожденной конике имеет ровно две различных неподвижных точки, и для любой пары различных точек существует единственная инволюция оставляющая каждую из точек на месте. Геометрически, инволюция $\sigma_{pq} : \mathbb{P}_1 \xrightarrow{\sim} \mathbb{P}_1$ с неподвижными точками $p, q \in \mathbb{P}_1$ переставляет друг с другом такие точки a, b, что точки a^2 и b^2 коники Веронезе $C_2 \subset \mathbb{P}_2$ лежат на одной прямой с точкой $pq \in \mathbb{P}_2$.

Упражнение 5.6. Убедитесь, что $\sigma_{pq}(a) = b$ для четырёх различных точек a, b, p, q если и только если a, b и p, q гармоничны, и напишите явную формулу для координат неподвижных точек p, q инволюции σ_{pq}, если известны координаты точек a, b, $\sigma_{pq}(a)$, $\sigma_{pq}(b)$.

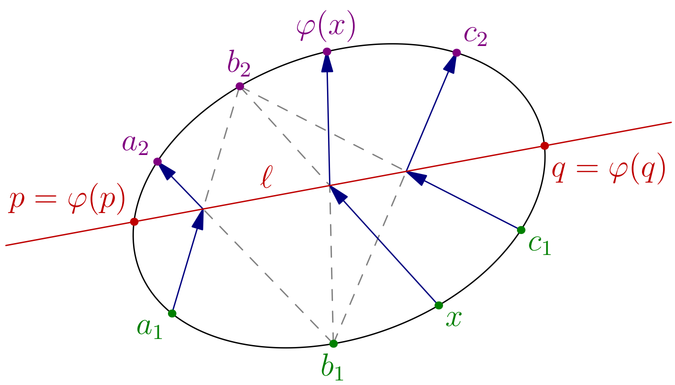

Рис. 5◇11. Перекрёстная ось гомографии на конике.

Пример 5.7 (перекрёстная ось гомографии на конике)
Гомография $\varphi : C \to C$, переводящая три различные точки $a_1, b_1, c_1 \in C$ в точки $a_2, b_2, c_2 \in C$ является композицией проекций $b_2 : C \to \ell$ и $b_1 : \ell \to C$, где прямая ℓ соединяет точки пересечения $(a_1b_2) \cap (b_1a_2)$ и $(c_1b_2) \cap (b_1c_2)$ пар перекрёстных прямых на рис. 5⋄11. Поскольку неподвижные точки гомографии φ суть точки пересечения $\ell \cap C$, прямая ℓ не зависит от выбора точек $a_1, b_1, c_1 \in C$, а φ имеет либо ровно две неподвижные точки, либо ровно одну, и последнее означает, что прямая ℓ касается коники C в этой неподвижной точке. Таким образом, прямая ℓ представляет собой ГМТ пересечения всех перекрёстных прямых $(x, \varphi(y)) \cap (y, \varphi(x))$, где $x \neq y$ независимо пробегают конику C. Отсюда получается ещё одно доказательство теоремы Паскаля[1]: три точки пересечений пар противоположных сторон вписанного в C шестиугольника $a_1c_2b_1a_2c_1b_2$, будучи точками пересечений перекрёстных прямых гомографии, которая переводит точки a_1, b_1, c_1 в точки a_2, b_2, c_2, лежат на перекрёстной оси ℓ этой гомографии.

Перекрёстная ось гомографии $\varphi : C \to C$ легко строится одной линейкой, если известно действие φ на какие-нибудь три точки. Это позволяет одной линейкой построить образ $\varphi(z)$ любой точки $z \in C$, а также указать неподвижные точки гомографии φ. В частности, две касательные к невырожденной конике $C \subset \mathbb{P}_2$, опущенные из заданной точки $s \in \mathbb{P}_2$, тоже можно построить одной линейкой, найдя неподвижные точки инволюции $\sigma_s : C \to C$, задаваемой пучком прямых с центром в s, см. рис. 5⋄12. Более простое построение можно извлечь из упр. 5.7.

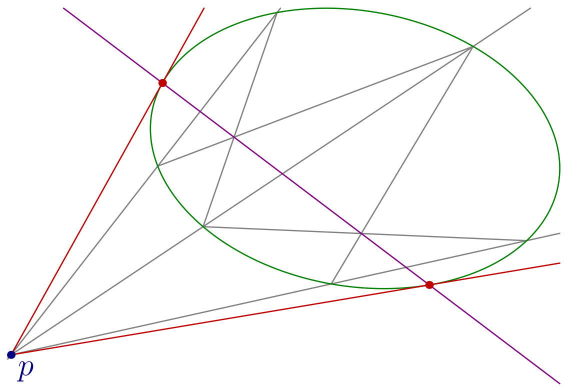

Рис. 5⋄12. Построение касательных.

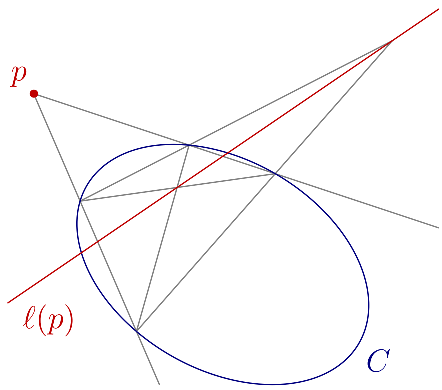

Рис. 5⋄13. Построение поляры.

Упражнение 5.7 (построение Штейнера). Обоснуйте показанное на рис. 5⋄13 построение[2] одной линейкой поляры[3] $\ell(p)$ данной точки p относительно данной коники C.

[1] См. теор. 5.3 на стр. 59.

[2] Принадлежащее Якобу Штейнеру (1796 – 1863), см. *Я. Штейнер*. «Геометрические построения, выполняемые с помощью прямой линии и неподвижного круга», Харьковская математическая библиотека, Харьков, 1910 (или любое другое издание).

[3] См. 4-4 на стр. 43.

Ответы и указания к некоторым упражнениям

Упр. 1.5. В клетке (i,j) матрицы $B^{\wedge}_{e^*,e}$ отображения $\beta^{\wedge}\colon\ e_j \mapsto \beta(*,e_j)$ стоит i-тая координата линейной функции $u \mapsto \beta(u,e_j)$ в базисе $\boldsymbol{e}^*$, равная значению этой функции на базисном векторе e_i, т. е. скалярному произведению $\beta(e_i,e_j)$.

Упр. 1.7. Линейная оболочка векторов $e_\nu + ie_{n+\nu}$ с $1 \leqslant \nu \leqslant n$.

Упр. 1.8. Если матрица $B \in \mathrm{Mat}_n(\Bbbk)$ кососимметрична, то $\det B = \det B^t = \det(-B) = (-1)^n \det B$.

Упр. 1.9. Пусть $v = \sum x_i e_i$. Скалярно умножая v слева на ${}^{\vee}e_i$, получаем $\beta({}^{\vee}e_i, v) = x_i$. Скалярно умножая v справа на $e_i^{\vee}$, получаем $\beta(v, e_i^{\vee}) = x_i$.

Упр. 2.6. Ненулевые квадраты составляют образ гомоморфизма мультипликативных групп $\mathbb{F}_p^* \to \mathbb{F}_p^*$, $x \mapsto x^2$. Так как уравнение $x^2 = 1$ имеет в поле $\mathbb{F}_p$ ровно два корня $x = \pm 1$, ядро этого гомоморфизма состоит из двух элементов, а значит, образ является подгруппой порядка $(p-1)/2$.

Упр. 2.7. Если оператор f самосопряжён, то $\beta_f(u,w) = (u,fw) = (fu,w) = (w,fu) = \beta_f(w,u)$. Если билинейная форма β_f симметрична, то $(fu,w) = (w,fu) = \beta_f(w,u) = \beta_f(u,w) = (u,fw)$

Упр. 3.6. При чётном n центр алгебры $\Bbbk\langle\xi_1,\xi_2,\dots,\xi_n\rangle$ линейно порождается мономами чётных степеней, при нечётном n — мономами чётных степеней и старшим мономом $\xi_1\wedge\xi_2\wedge\ldots\wedge\xi_n$, степень которого нечётна.

Упр. 3.7. Это сразу следует из равенства $\det A = \det A^t$.

Упр. 3.9. Перестановка одной пары с другой как единого целого чётная (это пара транспозиций). Перестановка между собою элементов из ν-й пары меняет знак $\mathrm{sgn}\big(i_1 j_1 i_2 j_2 \dots i_n j_n\big)$, но одновременно заменяет матричный элемент $a_{i_\nu j_\nu}$ элементом $a_{j_\nu i_\nu} = -a_{i_\nu j_\nu}$.

Упр. 4.2. В правой части стоит геометрическая прогрессия $q^n + q^{n-1} + \dots + q + 1$, а слева — количество ненулевых векторов в $(n+1)$-мерном пространстве, делённое на количество ненулевых векторов в одномерном пространстве, т. е. $(q^{n+1}-1)/(q-1)$; кто знает, может, именно поэтому полученная формула называется формулой суммирования *геометрической* прогрессии

Упр. 4.4. Это следует из соотношения $(s:1) = (x_0:x_1) = (1:t)$.

Упр. 4.5. Если стягиваемая петля настолько мала, что почти не отличается от точки, устойчивое к малым шевелениям количество точек её пересечения с любой петлёй равно нулю. При изменении размеров петли устойчивые точки пересечения появляются и исчезают по две.

Упр. 4.7. Пусть $K = \mathbb{P}(W)$. Векторное подпространство $W \subset V$ имеет размерность $k+1$ и либо содержится в гиперплоскости $\mathrm{Ann}(\xi)$, либо пересекается с нею по k-мерному векторному пространству $W' = \mathrm{Ann}(\xi|_W) \subset W$. В первом случае K не пересекается с картой U_ξ, во втором случае пересечение $K \cap U_\xi$ представляет собою аффинное пространство над векторным пространством $W \cap \mathrm{Ann}\,\xi = W'$.

Упр. 4.10. Если $v = u + w$, где $u \in U$, $w \in W$ и $v \notin U \cup W$, то u и w линейно независимы, и $v \in (u,w)$. Если отвечающая вектору v точка проективного пространства лежит на какой-то ещё прямой (ab) с $a \in U$ и $b \in W$, то $v = \lambda a + \mu b$ для некоторых ненулевых $\lambda, \mu \in \Bbbk$, причём $\lambda a = u$ и $\mu b = w$ в силу единственности разложения вектора v. Поэтому a и u, так же как b и w, суть совпадающие точки проективного пространства. В частности, $(uw) = (ab)$.

Упр. 4.11. Ответ: $\binom{n+d}{d} - 1$.

Упр. 4.12. Пусть $a = \alpha_0 e_0 + \alpha_1 e_1$, $b = \lambda e_0 + \mu e_1$, где $\alpha_0, \alpha_1 \in \Bbbk$ фиксированы, а отношение $(\lambda : \mu)$ пробегает $\mathbb{P}_1$. Тогда произведение $ab = \lambda(\alpha_0 e_0^2 + \alpha_1 e_0 e_1) + \mu(\alpha_1 e_1^2 + \alpha_0 e_0 e_1)$ пробегает в $\mathbb{P}(S^2 U)$ прямую, проходящую через точки $\alpha_0 e_0^2 + \alpha_1 e_0 e_1$ и $\alpha_1 e_1^2 + \alpha_0 e_0 e_1$.

Упр. 5.1. Строим перекрёстную ось ℓ, соединяющую точки $(a_1 b_2) \cap (b_1, a_2)$ и $(c_1 b_2) \cap (b_1, c_2)$, и берём в качестве $\varphi(x)$ точку пересечения прямой ℓ_2 с прямой, соединяющей точки b_1 и $\ell \cap (x, b_2)$.

Упр. 5.2. Зафиксируем не проходящую через p_1, p_2 прямую ℓ. Отображения $\pi_i : p_i^\times \to \ell$, $i = 1, 2$, переводящие прямую $\ell' \in p_i^\times$ в точку $\ell \cap \ell'$, являются гомографиями, поскольку для любого базиса a, b прямой ℓ переводят линейную форму $\xi \in V^*$, задающую прямую ℓ', в точку с однородными координатами $(\xi(b) : -\xi(a))$, линейно зависящими от ξ. Отображение $\gamma : \ell \to \ell$, являющееся композицией проекции $p_1 : \ell \xrightarrow{\sim} C$ прямой ℓ на конику C из точки p_1 и проекции $p_2 : C \xrightarrow{\sim} \ell$ коники C на прямую ℓ из точки p_2, биективно и, согласно форм. (4-10) на стр. 45, задаётся в однородных координатах многочленами. По теор. 5.2 на стр. 55 оно является гомографией. Отображение $C : p_1^\times \to p_2^\times$ является композицией $\pi_2^{-1} \gamma \pi_1$.

Упр. 5.3. При замене однородных координат все определители в правой части 5-6 на стр. 59 умножатся на определитель матрицы замены координат, что не поменяет правой дроби, ну а средняя дробь всегда равна правой в силу вычисления, предворявшего формулу 5-6. Последнее утверждение проверяется выкладкой

$$\frac{\det(a,c)}{\det(a,d)} \cdot \frac{(b,d)}{\det(b,c)} = \frac{\det(a, b+\gamma a)}{\det(a, b+\delta a)} \cdot \frac{(b, b+\delta a)}{\det(b, b+\gamma a)} = \frac{\delta}{\gamma} \,.$$

Упр. 5.4. См. решение упр. 5.2

Упр. 5.5. Преобразование, переставляющее изотропные точки на проходящей через s прямой, это отражение в ортогональной гиперплоскости $s^\perp$ к анизотропному вектору $s \notin C$, ср. с прим. 4.7 на стр. 44.