Пространства со скалярным произведением

ГЛ1◇1. Какими могут быть ранг и сигнатура ограничения невырожденной вещественной квадратичной формы сигнатуры (p, q) на гиперплоскость[1]?

ГЛ1◇2. Убедитесь, что функция $A \mapsto \det A$ является квадратичной формой на пространстве $\mathrm{Mat}_2(\Bbbk)$, и опишите такое линейное преобразование $Y \mapsto Y^?$ пространства $\mathrm{Mat}_2(\Bbbk)$, что поляризация формы det имеет вид $2\,\widetilde{\det}(X, Y) = \mathrm{tr}(X \cdot Y^?)$. Найдите сигнатуру формы det над $\Bbbk = \mathbb{R}$. Гиперболична ли эта форма над $\Bbbk = \mathbb{F}_p$?

ГЛ1◇3. Для $X \in \mathrm{Mat}_n(\mathbb{R})$ пусть $\det(tE - X) = t^n - \sigma_1(X)\,t^{n-1} + \sigma_2(X)\,t^{n-2} - \cdots$. Покажите, что $\sigma_2(X)$ является квадратичной формой на пространстве $\mathrm{Mat}_n(\mathbb{R})$, и вычислите её ранг и сигнатуру. Если общий случай вызывает затруднения, решите задачу для $n = 2, 3, 4$.

ГЛ1◇4. Найдите сигнатуру квадратичной формы $\mathrm{tr}\left(A^2\right)$ на пространстве $\mathrm{Mat}_n(\mathbb{R})$. Если общий случай вызывает затруднения, решите задачу для $n = 2, 3, 4$.

ГЛ1◇5. Рассмотрим кольцо $K = \mathbb{F}_3[x]/(x^3 - x + 1)$ как трёхмерное векторное пространство над полем $\mathbb{F}_3$ с симметричной билинейной формой[2] $\mathrm{tr}(ab)$. Напишите её матрицу Грама в базисе $1, [x], [x^2]$ и выясните, есть ли в K гиперболическая плоскость.

ГЛ1◇6. Покажите, что гиперболичность пространства W с невырожденной квадратичной формой равносильна каждому из условий: **а)** $\dim W = 2k$ и в W есть k-мерное изотропное подпространство, **б)** $W = U_1 \oplus U_2$, где U_1 и U_2 изотропны.

ГЛ1◇7. Перечислите все анизотропные формы над полем $\mathbb{F}_p = \mathbb{Z}/(p)$.

ГЛ1◇8. Покажите, что симплектическая группа транзитивно действует на симплектических и на изотропных подпространствах любой фиксированной размерности.

ГЛ1◇9*. Приведите пример пространства V с вырожденной билинейной формой β и дополнительного к ядру левой корреляции $^\wedge\beta : V \to V^*$, $v \mapsto \beta(v, *)$, подпространства $U \subset V$ таких, что ограничение формы β на U вырождено.

ГЛ1◇10*. Пусть билинейная форма β на пространстве V ограничивается в невырожденную форму на конечномерном подпространстве $U \subset V$. Постройте сохраняющий скалярное произведение[3] линейный изоморфизм между пространствами

$$^\perp U \stackrel{\text{def}}{=} \{v \in V \mid \forall u \in U\ \beta(v, u) = 0\} \quad \text{и} \quad U^\perp \stackrel{\text{def}}{=} \{v \in V \mid \forall u \in U\ \beta(u, v) = 0\}.$$

ГЛ1◇11*. Пусть билинейная форма β на конечномерном векторном пространстве V имеет матрицу Грама $B_{\boldsymbol{e}}$ в некотором базисе $\boldsymbol{e}$. Многочлен $\chi_{\beta,\boldsymbol{e}}(t_0, t_1) = \det(t_0 B_{\boldsymbol{e}} + t_1 B_{\boldsymbol{e}}^t) \in \Bbbk[t_0, t_1]$ называется *характеристическим*, а его рассматриваемые с точностью до пропорциональности корни $t = t_0/t_1 \in \Bbbk \cup \infty$ — *характеристическими числами* формы β. Покажите, что $\chi_{\beta,\boldsymbol{e}} \neq 0$ если и только если $\ker {}^\wedge\beta \cap \ker \beta^\wedge = 0$, и в этом случае набор характеристических чисел не зависит от выбора базиса, причём для любого характеристического числа λ число λ^{-1} тоже характеристическое той же кратности.

---

[1] Т. е. на векторное подпространство коразмерности 1.

[2] След умножения на ab : $K \to K$, $x \mapsto ab\,x$.

[3] Т. е. такой изоморфизм $f : {}^\perp U \xrightarrow{\sim} U^\perp$, что $\beta\big(f(v), f(w)\big) = \beta(v, w)$ для всех $v, w \in {}^\perp U$.

Персональный табель ______________________________________ . **Листок № 1 (9 января 2019)**

(напишите свои имя, отчество и фамилию)

№	дата	кто принял	подпись
1			
2			
3			
4			
5			
6а			
б			
7			
8			
9			
10			
11			