

Коники

- ГЛ4♦1.** Верно ли, что гладкая коника C , проходящая через точки p_1, p_2, p_3, p_4, p_5 , никакие три из которых не коллинеарны, представляет собою ГМТ p , для которых двойное отношение прямых $(pp_1), (pp_2), (pp_3), (pp_4)$ в пучке p^\times , равно двойному отношению прямых $(p_5p_1), (p_5p_2), (p_5p_3), (p_5p_4)$ в пучке p_5^\times ?
- ГЛ4♦2.** Коника C пробегает простой пучок L с четырьмя базисными точками b_1, b_2, b_3, b_4 и тремя особыми кониками S_1, S_2, S_3 . Как связаны двойные отношения $[S_1, S_2, S_3, C]$ на L и $[b_1, b_2, b_3, b_4]$ на C ?
- ГЛ4♦3.** Покажите, что все хорды гладкой коники C на евклидовой плоскости, видимые из данной точки $p \in C$ под прямым углом, пересекаются в одной точке q , причём прямая (pq) перпендикулярна касательной $T_p C$.
- ГЛ4♦4.** На вещественной аффинной плоскости заданы точки p_1, p_2, p_3, p_4 , расположенные в вершинах выпуклого четырёхугольника. Укажите явное условие на точку p_5 , необходимое и достаточное для того, чтобы через точки p_1, p_2, p_3, p_4, p_5 проходил эллипс.
- ГЛ4♦5.** Покажите, что точки, симметричные фокусу параболы относительно всевозможных касательных, лежат на её директрисе.
- ГЛ4♦6.** Покажите, что фокус параболы, касающейся прямых $(ab), (bc), (ca)$, лежит на описанной около $\triangle abc$ окружности.
- ГЛ4♦7.** Может ли парабола на евклидовой плоскости пересекать окружность ровно по
 а) трём вещественным точкам, если центр окружности не лежит на оси параболы,
 б) двум вещественным точками, если центр окружности лежит на оси параболы?
- ГЛ4♦8.** Точка p лежит на одной из главных осей семейства конфокальных¹ центральных коник на евклидовой плоскости. Покажите, что ГМТ касания с кониками всевозможных касательных, опущенных из p , это окружность, проходящая через фокусы, лежащие на другой главной оси.
- ГЛ4♦9.** Две гладкие коники на евклидовой плоскости касаются друг друга в двух разных точках, и их общие касательные в этих точках пересекаются в точке p . Докажите, что прямая, соединяющая фокус одной из коник с точкой p , делит пополам угол между касательными, опущенными из этого фокуса² на другую конику.
- ГЛ4♦10*** (директор коники). Покажите, что ГМТ, из которых гладкая центральная коника C видна под прямым углом, это концентричная с C окружность³.
- ГЛ4♦11*** (гипербола Аполлония). Опишите ГМТ пересечений вращающегося диаметра данной коники с перпендикуляром, опущенным из данной точки на сопряжённый диаметр.
- ГЛ4♦12***. Сколько перпендикуляров можно опустить из данной точки на данную конику?

¹Т. е. имеющих общие фокусы.

²Всякий раз, когда такие касательные можно провести.

³Она называется *директором* коники C .

№	дата	кто принял	подпись
1			
2			
3			
4			
5			
6			
7а			
б			
8			
9			
10			
11			
12			