

Евклидова геометрия

ГЛ5♦1. Верно ли, что любые две гладкие центральные аффинные квадрики, имеющие одну и ту же асимптотическую квадрику, обладают общим аффинным гиперплоским сечением?

ГЛ5♦2. Эллипсоид $E \subset \mathbb{R}^3$ с полуосями попарно разной длины секут плоскостями, проходящими через его центр z и не лежащую на главных осях точку $a \in E$. Для скольких сечений отрезок $[z, a]$ является главной полуосью?

ГЛ5♦3. Зависит ли длина диагонали прямоугольного параллелепипеда, описанного около данного эллипсоида¹ в \mathbb{R}^n , от расположения параллелепипеда а) при $n = 2, 3$ б*) при любом n ?

ГЛ5♦4 (теорема Аполлония). В евклидовом пространстве \mathbb{R}^n задан эллипсоид E с центром z . Направления $v_1, \dots, v_n \in L_\infty$ называются *сопряжёнными*, если симплекс z, v_1, \dots, v_n автополярен относительно E . Точки $a_1, \dots, a_n \in E$ называются *сопряжёнными*, если сопряжены направления $\overline{za}_1, \dots, \overline{za}_n$. Верно ли, что для каждого $1 \leq k \leq n$ у всех наборов сопряжённых точек $a_1, \dots, a_n \in E$ сумма определителей Грама $\sum_{i_1 < \dots < i_k} G(\overline{za}_{i_1}, \dots, \overline{za}_{i_k})$ одна и та же а) при² $n = 2$ б*) при любом n ?

ГЛ5♦5. Рассмотрим тройки прямых, проходящих через фиксированную точку x внутри эллипсоида $E \subset \mathbb{R}^3$. Пусть они пересекают E по парам точек $a_1, b_1; a_2, b_2; a_3, b_3$. Покажите, что а) $|a_1x| \cdot |xb_1| + |a_2x| \cdot |xb_2| + |a_3x| \cdot |xb_3| = \text{const}$ если направления прямых сопряжены б) $|a_1x|^{-1} \cdot |xb_1|^{-1} + |a_2x|^{-1} \cdot |xb_2|^{-1} + |a_3x|^{-1} \cdot |xb_3|^{-1} = \text{const}$ если прямые попарно перпендикулярны.

ГЛ5♦6. Для произвольных k точек p_1, p_2, \dots, p_k евклидова пространства \mathbb{R}^n образуем симметричную $k \times k$ матрицу $D_{p_1, p_2, \dots, p_k} \stackrel{\text{def}}{=} (|p_i p_j|^2)$ квадратов расстояний между ними и обозначим через C_{p_1, p_2, \dots, p_k} матрицу размера $(k+1) \times (k+1)$, получающуюся приписыванием к D_{p_1, p_2, \dots, p_k} строки единиц сверху, столбца единиц слева и нуля в левый верхний угол. Покажите, что а) $\det C_{p_0, p_1, \dots, p_n}$ равен умноженному на $(-1)^{n+1} 2^n$ определителю Грама векторов³ $\overline{p_0 p_1}, \overline{p_0 p_2}, \dots, \overline{p_0 p_n}$ б) $(n+1)$ точек p_0, p_1, \dots, p_n лежат в одной гиперплоскости если и только если $\det C_{p_0, p_1, \dots, p_n} = 0$ в) $(n+2)$ точки p_0, p_1, \dots, p_{n+1} лежат на одной сфере или в одной гиперплоскости если и только если $\det D_{p_0, p_1, \dots, p_{n+1}} = 0$ г) квадрат диаметра шара, описанного около симплекса $[p_0, p_1, \dots, p_n]$, равен $-2 \det D_{p_0, p_1, \dots, p_n} / \det C_{p_0, p_1, \dots, p_n}$.

ГЛ5♦7*. Дана симметричная матрица $D = (d_{ij}^2)$ размера $(n+1) \times (n+1)$, в которой все $d_{ii} = 0$ и $d_{ij} = d_{ji} > 0$ при $i \neq j$. Покажите, что n -мерный симплекс $[p_0, p_1, \dots, p_n]$ с длинами сторон $|p_i p_j| = d_{ij}$ существует если и только если для каждого $r = 2, 3, \dots, (n+1)$ и каждой главной $r \times r$ -подматрицы⁴ $D' \subset D$ определитель $(r+1) \times (r+1)$ -матрицы C' , которая получается из D' дописыванием строки единиц сверху, столбца единиц слева и нуля в левом верхнем углу, либо нулевой, либо имеет знак $(-1)^r$.

ГЛ5♦8* (октаплекс). Выпуклая оболочка вершин четырёхмерного куба со стороной 2 и точек пересечения описанной около него сферы с прямыми, проходящими через центры противоположных трёхмерных граней, называется стандартным *октаплексом*. Подсчитайте у него а) количество граней в каждой размерности б) длины рёбер и радиус вписанного шара, а также выясните, как выглядят в) трёхмерные грани и каковы их объёмы г) двумерные грани и каковы их площади.

¹Это означает, что каждая грань параллелепипеда касается эллипсоида.

²В этом случае теорема Аполлония утверждает, что сумма квадратов длин $|za_1|^2 + |za_2|^2$ и площадь треугольника $\Delta za_1 a_2$ обе не зависят от выбора пары сопряжённых точек a_1, a_2 на эллипсе.

³Обратите внимание, что тут сравниваются определители матриц *разного* размера.

⁴Т. е. подматрицы, главная диагональ которой содержится в главной диагонали матрицы D .

№	дата	кто принял	подпись
1			
2			
3а			
б			
4а			
б			
5а			
б			
6а			
б			
в			
г			
7			
8а			
б			
в			
г			