ПРОГРАММА СЕМЕСТРОВОГО КУРСА «ГЕОМЕТРИЯ»

Интенсивность занятий: 1,5 пары лекций + 2 пары упражнений в неделю.
Темы, набранные *курсивом* могут стать необязательными или упраздниться вовсе.

ТРЕТЬЯ ЧЕТВЕРТЬ (10 НЕДЕЛЬ)

НЕДЕЛЯ 1. Квадратичные формы: поляризация, корреляция[1], матрица Грама, ранг. Невырожденные квадратичные формы: ортогоналы и ортогональные проекции, отражения, группа изометрий порождается отражениями в гиперплоскостях, размерность изотропного подпространства n-мерного векторного пространства с невырожденной квадратичной формой не превышает $n/2$. Приведение к сумме квадратов и его специализации над полями $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$ и $\mathbb{F}_p$. Независимость сигнатуры вещественной формы от выбора базиса.

НЕДЕЛЯ 2. Гиперболические формы: всякий базис в изотропном пространстве половинной размерности дополняется до гиперболического базиса, разложение векторного пространства с невырожденной квадратичной формой в ортогональную сумму гиперболического и анизотропного, изометрии двумерного гиперболического пространства. Лемма Витта, единственность гиперболического и анизотропного слагаемых с точностью до изометрического изоморфизма. Отыскание сигнатуры вещественной квадратичной формы по последовательности главных угловых миноров.

НЕДЕЛЯ 3. Кососимметричные формы. Нормальная форма Дарбу, всякий базис лагранжева подпространства невырожденной формы дополняется до симплектического базиса. Алгебраическое отступление: грассмановы многочлены, линейные замены переменных и миноры, определитель пучка матриц, пфаффиан.

НЕДЕЛЯ 4. Проективные пространства и проективизация, примеры: $\mathbb{P}(\mathbb{R}^2) \simeq S^1$, $\mathbb{P}(\mathbb{C}^2) \simeq S^2$, $\mathbb{P}(\mathbb{R}^3) \simeq$ $\simeq$ лента Мёбиуса с заклееной диском границей, $\mathbb{P}(\mathbb{R}^4) \simeq \mathrm{SO}_3(\mathbb{R})$, $\mathbb{P}(\Bbbk^{n+1}) = \Bbbk^n \sqcup \ldots \sqcup \Bbbk^1 \sqcup \Bbbk^0$. Каждая точка $v \in \mathbb{P}(V)$ покрывается аффинным пространством, ассоциированным с векторным пространством $V/\Bbbk\cdot v$, локальные аффинные координаты, стандартные аффинные карты. Словарик «Линейная алгебра – проективная геометрия»: проективные подпространства, размерности пересечений и линейных соединений, дополнительные подпространства и проекции. Проективная двойственность: соответствие $\mathbb{P}(U) \leftrightarrow \mathbb{P}(\mathrm{Ann}\, U)$ задаёт оборачивающую включение биекцию между подпространствами размерности k и $n-k-1$ в пространствах $\mathbb{P}_n = \mathbb{P}(V)$ и $\mathbb{P}_n^\times = \mathbb{P}(V^*)$ и переводит пересечения в линейные соединения.

НЕДЕЛЯ 5. Однородные координаты и задание фигур однородными уравнениями. Проективное преобразование $\mathbb{P}_n$ однозначно задаётся действием на $n+2$ точки, никакие $n+1$ из которых не лежат в одной гиперплоскости. Группа $\mathrm{PGL}(V)$. Проективная прямая, дробно линейные преобразования, двойное отношение, гармонические пары точек, инволюции проективной прямой.

НЕДЕЛЯ 6. Плоская проективная геометрия: разложение дробно линейного преобразования между прямыми в композицию проекций, построения одной линейкой, перспективные треугольники, теоремы Дезарга, четырёхвершинник и эпиморфизм $S_4 \twoheadrightarrow S_3$. Плоскость $\mathbb{P}_2 = \mathbb{P}(S^2U)$ как множество неупорядоченных пар точек на $\mathbb{P}_1 = \mathbb{P}(U)$, коника Веронезе, рациональная параметризация непустой гладкой коники. *$\mathbb{P}_d = \mathbb{P}(S^dU)$ как множество неупорядоченных наборов из d точек на $\mathbb{P}_1 = \mathbb{P}(U)$, нормальные рациональные кривые.*

НЕДЕЛЯ 7. Проективные квадрики: касательное пространство, всякая квадрика является линейным соединением пространства особых точек и гладкой квадрики в дополнительном подпространстве. Полярное преобразование относительно гладкой квадрики, двойственная квадрика. Пересечение гладкой квадрики с гиперплоскостью, линейные подпространства, лежащие на гладкой квадрике над алгебраически замкнутым полем и над $\mathbb{R}$. Проективная классификация квадрик над $\mathbb{C}$ и над $\mathbb{R}$.

[1] Линейное отображение $V \to V^*$ («опускание индекса»), доставляемое квадратичной формой.

НЕДЕЛЯ 8. Проективные коники и задаваемые ими проективные изоморфизмы между прямыми, теорема Паскаля. Пространство коник, поверхность особых коник, пучки коник.

НЕДЕЛЯ 9. Комплексное проективное описание евклидовых коник: асимптоты, центр, фокусы, директрисы, главные оси и как находить всё это «в уме». Фокальные свойства гладких коник.

НЕДЕЛЯ 10. Квадрика Сегре в $\mathbb{P}_3 = \mathbb{P}(\operatorname{End} U)$. Квадрика Плюккера в $\mathbb{P}_5 = \mathbb{P}(\Lambda^2 V)$ и геометрия прямых в $\mathbb{P}_3 = \mathbb{P}(V)$.

ЧЕТВЁРТАЯ ЧЕТВЕРТЬ (12 НЕДЕЛЬ)

НЕДЕЛЯ 11. Пучки квадрик, коранг особой квадрики пучка не меньше кратности соответствующего корня характеристического многочлена. Простой пучок[1] с точностью до проективного преобразования объемлющего пространства однозначно восстанавливается набором корней характеристического многочлена, рассматриваемым с точностью до дробно-линейного преобразования прямой, параметризующей пучок. Пучок прост тогда и только тогда, когда две задающие его квадрики пересекаются трансверсально[2]. Напоминание из первого семестра: канонический вид самосопряжённого оператора на пространстве с невырожденной квадратичной формой.

НЕДЕЛЯ 12. Вложение аффинной группы в проективную в качестве нормализатора бесконечной гиперплоскости. Аффинные квадрики: гладкие центральные квадрики, параболоиды, простые конусы и цилиндры; их явное описание над $\mathbb{C}$ и над $\mathbb{R}$, планарность вещественных квадрик.

НЕДЕЛЯ 13. Евклидова геометрия квадрик, полуоси гладких квадрик в евклидовом аффинном пространстве. Метрические свойства кривых и поверхностей второго порядка.

НЕДЕЛЯ 14. Геометрия сферы. Инверсия. Группа Мёбиуса.

НЕДЕЛЯ 15. *Образующие и соотношения для групп платоновых тел в $\mathbb{R}^3$ и симметрической группы S_n.*

ТРЕБУЕТ: *задание групп образующими и соотношениями* (алгебра).

НЕДЕЛЯ 16. Эллиптическое пространство $\mathbb{E} = \mathbb{P}(V)$, где V — вещественное векторное пространство с положительно определённой квадратичной формой. Каждая точка $v \in \mathbb{E}$ лежит в аффинном пространстве, ассоциированном с евклидовым векторным пространством $v^\perp$. Геодезические = проективные прямые, вычисление расстояний и углов через скалярное произведение в V, неравенство треугольника. Группа изометрий порождается отражениями в плоскостях и совпадает с проективизацией ортогональной группы.

НЕДЕЛЯ 17. Примеры из плоской эллиптической геометрии: кратчайший геодезический отрезок; множество точек, равноудалённых от двух данных; конфигурации попарно равноудалённых точек на эллиптической плоскости и правильные многогранники в $\mathbb{R}^3$, треугольники первого[3] и второго[4] рода, площадь сферического треугольника.

ТРЕБУЕТ: площадь полусферы (анализ).

НЕДЕЛЯ 18. Пространство Лобачевского $\mathbb{L} \subset \mathbb{P}(V)$, где V — вещественное векторное пространство с невырожденной квадратичной формой сигнатуры $(1, n)$, состоит из точек с положительным скалярным квадратом. Каждая точка $v \in \mathbb{L}$ лежит в аффинном пространстве, ассоциированном с евклидовым векторным пространством $v^\perp$, углы и длины в котором вычисляются в терминах взятого с обратным знаком скалярного произведения в V, ограниченного на $v^\perp$. Абсолют = изотропная квадрика в $\mathbb{P}(V)$. Геодезические = проективизации гиперболических плоскостей, вычисление углов и

[1] Пучок квадрик на $\mathbb{P}_n$, в котором ровно $n+1$ особых квадрик.
[2] Коразмерность пересечения касательных пространств в каждой точке пересечения (включая особые точки) равна двум.
[3] Стягиваемые в $\mathbb{RP}_2$.
[4] Не стягиваемые в $\mathbb{RP}_2$.

расстояний через скалярное произведение на V, неравенство треугольника. Группа изометрий порождается отражениями в плоскостях, ортогональных векторам с отрицательным квадратом, и совпадает с проективизацией ортогональной группы лоренцевой формы на V. Гиперболическая изометрия однозначно задаётся своим действием на абсолюте.

НЕДЕЛЯ 19. Примеры из плоской гиперболической геометрии: перпендикулярные прямые сопряжены относительно абсолюта, общий перпендикуляр к двум прямым, срединный перпендикуляр к отрезку, *площадь гиперболического треугольника*. Гиперболические сферы и орициклы. *Пучок неевклидовых геометрий: деформация эллиптической плоскости в плоскость Лобачевского*.

ТРЕБУЕТ: *умение вычислять интегралы, желательно даже двойные* (анализ).

НЕДЕЛЯ 20. Конформная модель гиперболического пространства в шаре. Конформная модель гиперболической плоскости в верхней полуплоскости. Группы изометрий в этих моделях.

НЕДЕЛЯ 21. Кватернионы = вещественная подалгебра в алгебре комплексных матриц 2×2, состоящая из вещественных матриц относительно вещественной структуры, переводящей стандартную эрмитову структуру на пространстве матриц в поляризацию квадратичной формы $\det$. Норма $= \det$, обращение, образующие и соотношения. Корни уравнения $q^2 = -1$ образуют сферу S^2 чисто мнимых кватернионов нормы 1. Сфера S^3 всех кватернионов нормы 1 это SU_2, действие кватерниона $q \in \mathrm{SU}_2$ сопряжением на пространстве $I \simeq \mathbb{R}^3$ чисто мнимых кватернионов заключается в повороте вокруг прямой, которая высекается из I плоскостью Π_q, порождённой 1 и q, на угол, равный удвоенному аргументу кватерниона q, рассматриваемого как комплексное число в плоскости Π_q, отождествлённой с $\mathbb{C}$ по правилу $\mathbb{C} \ni x+iy \leftrightarrow x\cdot 1+y\cdot v_q \in \Pi_q$, где v_q — единичный направляющий вектор прямой $I\cap\Pi_q$, глядя вдоль которого измеряется угол поворота пространства I относительно этой прямой. Универсальное накрытие $\mathrm{SU}_2 \twoheadrightarrow \mathrm{SO}_3(\mathbb{R})$, расслоение Хопфа $S^3 \twoheadrightarrow S^2$.

НЕДЕЛЯ 22. *Правильные многогранники в* $\mathbb{R}^4$.