Гомографии и проекции

Терминология. Биекции между проективными прямыми $\mathbb{P}(U)$ и $\mathbb{P}(W)$, задаваемые линейными изоморфизмами $U \xrightarrow{\sim} W$, называются *гомографиями*. Группа гомографий $\mathbb{P}(\Bbbk^2) \xrightarrow{\sim} \mathbb{P}(\Bbbk^2)$ обозначается $\mathrm{PGL}_2(\Bbbk)$. Образ точки $d \in \mathbb{P}_1 = \mathbb{P}(\Bbbk^2) = \Bbbk \sqcup \infty$ при (единственной) гомографии $\mathbb{P}_1 \xrightarrow{\sim} \mathbb{P}_1$, переводящей три различные точки $a, b, c \in \mathbb{P}_1$, соответственно, в ∞, 0, 1, обозначается $[a, b, c, d]$ и называется *двойным отношением* этих точек. Для дополнительных друг к другу подпространств $L, H \subset \mathbb{P}_n$ *проекция* из L на H сопоставляет каждой точке $p \in \mathbb{P}_n \smallsetminus L$ точку $\ell \cap H$, где ℓ — это (единственная) проходящая через p прямая, пересекающая и L, и H, а каждую точку пространства T оставляет на месте. Подпространство L называется *центром* проекции. Проекции из точки называются *центральными* или *перспективами*.

ГС5◇1. Убедитесь, что в однородных координатах и в любой аффинной карте на $\mathbb{P}(\Bbbk^2)$

$$[p_1, p_2, p_3, p_4] = \frac{\det(p_1, p_3)\det(p_2, p_4)}{\det(p_1, p_4)\det(p_2, p_3)} = \frac{(p_1 - p_3)(p_2 - p_4)}{(p_1 - p_4)(p_2 - p_3)}$$

не зависит ни от выбора базиса в $\Bbbk^2$, ни от аффинной карты[1], и что две упорядоченные четвёрки точек на $\mathbb{P}_1$ тогда и только тогда переводятся одна в другую некоторой гомографией, когда их двойные отношения одинаковы.

ГС5◇2. Опишите все такие преобразования из PGL_2, что **а)** $\infty \mapsto \infty$ **б)** $(\infty, 0) \mapsto (\infty, 0)$ **в)** $(\infty, 0, 1) \mapsto (0, \infty, 1)$ **г)** $(\infty, 0, 1) \mapsto (1, 0, \infty)$ **д)** $(\infty, 0, 1) \mapsto (\infty, 1, 0)$ и без вычислений получите из этих описаний равенства $[p_2, p_1, p_3, p_4] = [p_1, p_2, p_3, p_4]^{-1}$, $[p_1, p_3, p_2, p_4] = 1 - [p_1, p_2, p_3, p_4]$, $[p_1, p_4, p_3, p_2] = \big([p_1, p_2, p_3, p_4] - 1\big) / [p_1, p_2, p_3, p_4]$.

ГС5◇3. Пусть $[p_1, p_2, p_3, p_4] = \vartheta$. Найдите $[p_{\sigma(1)}, p_{\sigma(2)}, p_{\sigma(3)}, p_{\sigma(4)}]$ для всех 24 перестановок $\sigma \in S_4$ и опишите все ϑ, орбита которых под действием S_4 короче, чем у общего ϑ. Подсказка: действие S_4 пропускается через эпиморфизм $S_4 \twoheadrightarrow S_3$, задаваемый действием группы перестановок вершин плоского четырёхвершинника на вершинах ассоциированного с ним треугольника.

ГС5◇4. Нетождественная гомография $\sigma : \mathbb{P}_1 \xrightarrow{\sim} \mathbb{P}_1$ называется *инволюцией*, если $\sigma^2 = \mathrm{Id}$. Покажите, что над алгебраически замкнутым полем каждая инволюция на $\mathbb{P}_1$

а) имеет ровно две различных неподвижных точки

б) в подходящей аффинной карте выглядит как центральная симметрия.

в) Если $\sigma(p) = p$ и $\sigma(q) = q$, то $\sigma(x) = y \iff [x, y, p, q] = -1$.

ГС5◇5. Постройте инволюцию без неподвижных точек на вещественной проективной прямой. Может ли инволюция вещественной проективной прямой иметь ровно одну неподвижную точку?

ГС5◇6. Постройте рациональную параметризацию коники $x_0^2 = x_1^2 + x_2^2$, спроектировав её из точки $(1 : 1 : 0)$ на прямую $x_1 = 0$, и перечислите все пифагоровы тройки[2].

ГС5◇7 (обязательная задача на дом). Постройте рациональную параметризацию коник[3]:

а) $3x_0^2 + 5x_1^2 + 34x_2^2 + 4x_0x_1 + 12x_0x_2 = 10x_1x_2$ (подсказка: точка $(-7 : 5 : 2)$ изотропна)

б) $x_1^2 + 11x_2^2 + 2x_0x_2 = 10x_1x_2$

ГС5◇8. Рассмотрим комплексную проективную плоскость $\mathbb{P}_2 = \mathbb{P}_2(S^2U)$ как множество неупорядоченных пар точек $ab = \{a, b\}$ на $\mathbb{P}_1 = \mathbb{P}_1(U)$ и обозначим через $C \subset \mathbb{P}_2$ конику Веронезе, образованную всеми парами $a^2 = \{a, a\}$ совпадающих точек.

а) Из каких пар xy состоят касательные, опущенные на C из точки $ab \in \mathbb{P}_2 \smallsetminus C$?

б) Покажите, что отображение $\sigma_{ab} : \mathbb{P}_1 \to \mathbb{P}_1$, переводящее точку $x \in \mathbb{P}_1$ в такую точку

[1] При условии, что она содержит все четыре точки.

[2] Т. е. натуральные решения *уравнения Пифагора* $c^2 = a^2 + b^2$.

[3] Ср. с контрольной работой № 1

$y \in \mathbb{P}_1$, что три пары точек x^2, ab, y^2 коллинеарны на $\mathbb{P}_2$, является инволютивной гомографией, и найдите её неподвижные точки.

в) Докажите, что каждая инволюция на $\mathbb{P}_1$ представляется в таком виде, и выведите отсюда зад. ГС5⋄4, см. рис. 1⋄1.

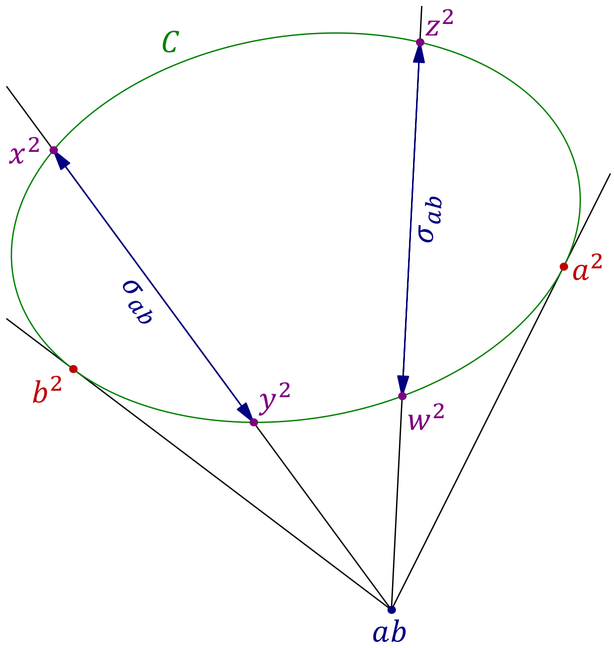

Рис. 1⋄1. Инволюция на конике.

ГС5⋄9. Покажите, что две разных инволюции комплексной проективной прямой всегда одинаково действуют ровно на одну пару точек этой прямой.

ГС5⋄10*. В условиях зад. ГС5⋄8 рассмотрим для произвольной гомографии $\gamma : \mathbb{P}_1 \xrightarrow{\sim} \mathbb{P}_1$ биекцию $\gamma_C : C \xrightarrow{\sim} C$, $a^2 \mapsto \gamma(a)^2$. Покажите, что она продолжается до единственного линейного проективного преобразования $\mathbb{P}_2 \xrightarrow{\sim} \mathbb{P}_2$, и найдутся такие точки $p_1, p_2 \in C$ и прямая ℓ, что проекция каждой точки $x \in C$ на прямую ℓ из точки p_2 совпадает с проекцией точки $\gamma_C(x)$ на ℓ из p_1, см. рис. 1⋄2.

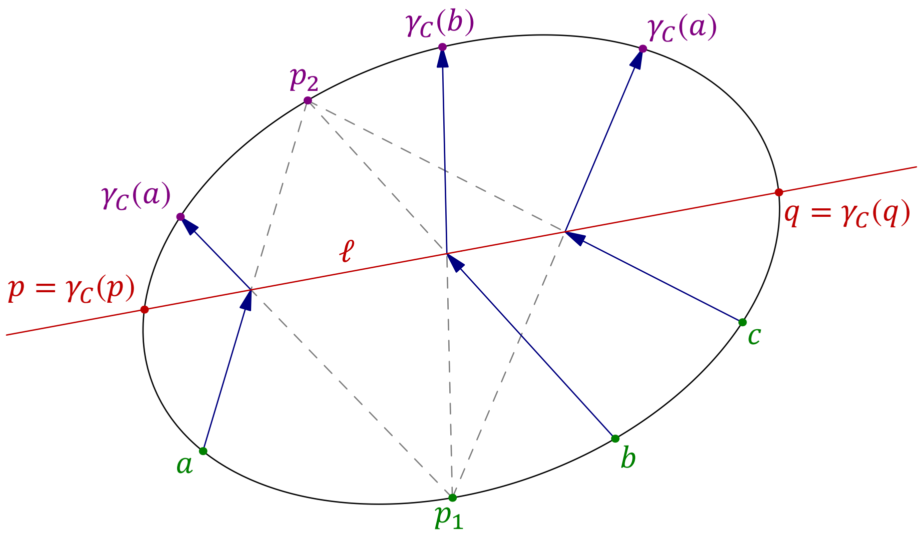

Рис. 1⋄2. Перекрёстная ось гомографии на конике.

ГС5⋄11*. Пусть для заданных точек $a, b, c \in C$ известны их образы при преобразовании γ_C. Одной линейкой постройте удовлетворяющие условию предыдущей задачи прямую ℓ и точки $p_1, p_2 \in C$, а также неподвижные точки преобразования γ_C. Сколько их может быть?