

Инволюции, двойственность, сопряжение, гомографии

- ГС6♦1. Найдите образы точек $\infty, 0, 1, -1, 3$ комплексной проективной прямой при инволюции с неподвижными точками а) $2, 1/2$ б) $-3, 2$.
- ГС6♦2. Найдите неподвижные точки инволюции комплексной проективной прямой, при которой а) $1 \leftrightarrow -2, 2 \leftrightarrow -1$ б) $1 \leftrightarrow 2, 3 \leftrightarrow 4$.
- ГС6♦3. Коника $C \subset \mathbb{P}_2$ имеет уравнение $x_0^2 + x_1^2 + 12x_2^2 - 2x_0x_1 + 10x_0x_2 - 8x_1x_2 = 0$. Напишите уравнение двойственной коники $C^\times \subset \mathbb{P}_2^\times$ в двойственном базисе.
- ГС6♦4. Сколько общих касательных может быть у двух гладких коник?
- ГС6♦5. Над полем \mathbb{C} напишите уравнения касательных, опущенных из точки $(1 : 1 : 1)$ на конику из зад. ГС6♦3.

Поляритет и сопряжение относительно гладкой кватрики. Гладкая кватрика $Q = V(q) \subset \mathbb{P}(V)$ задаёт линейное биективное полярное преобразование $\bar{q} : \mathbb{P}(V) \xrightarrow{\sim} \mathbb{P}(V^*)$ переводящее точку $p \in \mathbb{P}(V)$ в её полярную гиперплоскость¹ $\mathbb{P}(p^\perp) \subset \mathbb{P}(V)$. Две точки (соотв. гиперплоскости) называются сопряжёнными относительно Q , если одна из них лежит на поляре (соотв. проходит через полюс) другой.

ГС6♦6. Опишите полярное преобразование евклидовой плоскости² \mathbb{R}^2 относительно «мнимой окружности» $x^2 + y^2 = -1$.

ГС6♦7. Докажите, что точки a и b прямой, которая пересекает гладкую кватрику Q в отличных от a, b точках c и d , сопряжены относительно Q если и только если a и b гармоничны c и d .

ГС6♦8 (двойное отношение точек на конике). Двойным отношением $[a, b, c, d]_C$ четырёх различных точек гладкой коники C называется двойное отношение проходящих через них прямых $[(pa), (pb), (pc), (pd)]$ в пучке прямых с центром в какой-либо пятой точке $p \in C$. Покажите, что оно не зависит от выбора точки p , и что две хорды коники C тогда и только тогда сопряжены относительно C , когда их концы гармоничны на C .

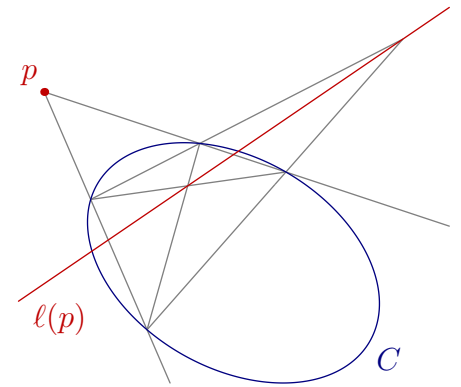


Рис. 1♦1.

ГС6♦9 (построение Штейнера). Обоснуйте показанное на рис. 1♦1 построение одной линейкой полярной $\ell(p)$ данной точки p относительно данной коники C .

ГС6♦10. Одной линейкой постройте полярную данной точки и полюс данной прямой при полярном преобразовании евклидовой плоскости \mathbb{R}^2 относительно данной окружности в случае, когда прямая не пересекает окружности, а точка лежит внутри очерчиваемого окружностью круга.

ГС6♦11*. Назовём гомографией на гладкой конике C любую сохраняющую двойное отношение биекцию $\gamma : C \xrightarrow{\sim} C$. Убедитесь, что это определение согласуется с определением из зад. ГС5 ♦ 10*, и что ГМТ пересечения прямых $(x\gamma(y)) \cap (y\gamma(x))$, где $x \neq y$ независимо пробегают C , представляет собою прямую, проходящую через неподвижные точки гомографии γ . Как одной линейкой построить неподвижные точки гомографии, если известно действие этой гомографии на три различные точки?

ГС6♦12*. Постройте вписанный в данную гладкую конику треугольник со сторонами³, проходящими через три данные точки. Сколько решений может иметь эта задача в принципе и сколько — при достаточно общем расположении прямых и коники?

¹Или полярну. Точка p называется полюсом гиперплоскости $\mathbb{P}(p^\perp)$.

²Вложенной в $\mathbb{P}_2(\mathbb{R})$ в виде стандартной карты U_0

³Понимаемыми как прямые, а не как «отрезки».