

Пучки коник

Терминология. В этом листке основное поле \mathbb{k} по умолчанию предполагается алгебраически замкнутым характеристике нуль. Проективные подпространства в пространстве $\mathbb{P}(S^d V^*)$ гиперповерхностей степени d в $\mathbb{P}(V)$ называются *линейными системами* гиперповерхностей. Линейные системы размерностей 1, 2 и 3 называются *пучками*, *связками* и *сетями* соответственно. Пересечение всех гиперповерхностей линейной системы называется *базисным множеством* этой системы.

ГС7♦1. Каким может быть уравнение гладкой коники C в базисе (e_0, e_1, e_2) , если треугольник $\Delta e_0 e_1 e_2$ а) вписан в C б) автополярен относительно C ?

ГС7♦2 (сеть окружностей). Рассмотрим евклидову плоскость \mathbb{R}^2 как множество вещественных точек комплексной плоскости \mathbb{C}^2 , вложенной в $\mathbb{P}_2 = \mathbb{P}(\mathbb{C}^3)$ в качестве стандартной аффинной карты U_0 . Найдите на \mathbb{P}_2 две точки ι_{\pm} , через которые проходят все евклидовы окружности, и докажите, что каждая гладкая коника, проходящая через точки ι_{\pm} и пересекающая \mathbb{R}^2 , видна в \mathbb{R}^2 как окружность.

ГС7♦3. Верно ли, что все коники, проходящие через точки $(1 : 1 : 0)$, $(1 : 0 : 1)$, $(0 : 1 : 1)$ и точку а) $(1 : 1 : 1)$ б) $(2 : 1 : 1)$ образуют пучок? Если да, напишите явное однопараметрическое уравнение коник такого пучка, если нет, объясните, почему.

ГС7♦4. Могут ли все коники в пучке быть вырожденными? Пусть в пучке есть хоть одна гладкая коника. Может ли в нём быть ровно а) 0 б) 1 в) 2 г) 3 д) 4 вырожденные коники? Если да, приведите явный пример такого пучка, если нет, объясните, почему.

ГС7♦5. Могут ли две гладкие коники пересекаться ровно по а) 0 б) 1 в) 2 г) 3 д) 4 е) 5 точкам? Если да, приведите явные примеры таких коник, если нет, объясните, почему.

ГС7♦6. Может ли пучок коник содержать ровно одну особую конику, не являющуюся двойной прямой? Если да, напишите явное однопараметрическое уравнение коник такого пучка, если нет, объясните, почему.

ГС7♦7. Напишите явное однопараметрическое уравнение пучка коник с тремя базисными точками. Сколько особых коник может быть в таком пучке?

ГС7♦8. Образуют ли пучок коники, касающиеся прямых $x_0 = 0$ и $x_1 = 0$, соответственно, в точках а) $(0 : 1 : 0)$ и $(1 : 0 : 0)$ б) $(0 : 0 : 1)$ и $(1 : 0 : 0)$? Если да, напишите явное однопараметрическое уравнение коник такого пучка, если нет, объясните, почему.

ГС7♦9*. Покажите, что особые точки гиперповерхности¹ $\Sigma \subset \mathbb{P}_5 = \mathbb{P}(S^2 V^*)$ особых коник в $\mathbb{P}_2 = \mathbb{P}(V)$ суть двойные прямые и только они, и покажите, что касательное пространство² к Σ в гладкой точке, представляющей собою распавшуюся конику $\ell_1 \cup \ell_2 \subset \mathbb{P}_2$, состоит из всех коник, проходящих через точку $\ell_1 \cap \ell_2$.

ГС7♦10*. Найдите размерность линейной системы кубических кривых в \mathbb{P}_2 , проходящих через фиксированные, не лежащие на одной конике шесть точек, никакие три из которых не коллинеарны.

ГС7♦11*. Опишите эффективный способ сведения системы из двух однородных уравнений второй степени на три неизвестные к одному кубическому уравнению на одну неизвестную.

¹Точка p гиперповерхности $V(f) \subset \mathbb{P}_n$ называется *особой*, если ограничение многочлена f на любую проходящую через p прямую либо тождественно нулевое, либо имеет кратный корень в точке p .

²Касательное пространство $T_p S$ к гиперповерхности $S = V(f) \subset \mathbb{P}_n$ в точке $p \in S$ есть объединение всех проходящих через p прямых, на которые многочлен f ограничивается либо в тождественный нуль, либо в многочлен, имеющий кратный корень в точке p .