

Задачи для подготовки к контрольной № 2

ГПК2♦1. Выясните тип коники, и если коника центральная, то найдите её центр и направления главных осей. Для гипербол напишите явные уравнения асимптот. Для парабол найдите вершину, фокус, директрису и направления главных осей.

- а) $-x^2 + 6xy - 6x - 9y^2 + 14y - 5 = 0$ (ответ: парабола с осью вдоль вектора $(-6 : -2)$ и вершиной в точке $(\frac{33}{100}, \frac{91}{100})$)
 б) $5x^2 - 24xy + 8x + 29y^2 - 18y + 4 = 0$ (ответ: эллипс с центром в точке $(-8, -3)$ и главными осями, направленными вдоль векторов $(1 + \sqrt{2} : 1)$ и $(-\sqrt{2} + 1 : 1)$)
 в) $-x^2 + 4xy - 4x - 4y^2 + 6y - 3 = 0$ (ответ: парабола с осью вдоль вектора $(-2 : 1)$ и вершиной в точке $(-\frac{19}{25}, \frac{21}{50})$)
 г) $-3x^2 + 10xy - 2x - 8y^2 + 4y - 1 = 0$ (гипербола с центром в точке $(-2, -1)$ и главными осями, направленными вдоль векторов $(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{5}}{2} : 1)$ и $(-\frac{\sqrt{5}}{2} + \frac{1}{2} : 1)$)

ГПК2♦2. Под каким углом пересекаются касательные к заданной конике, проходящие через заданные точки a, b :

- а) коника $9x^2 + 28xy - 6x + 21y^2 - 10y = -1$, точки $a = (3, -2)$, $b = (0, 1/3)$
 б) коника $9x^2 + 28xy - 6x + 21y^2 - 10y = -1$, точки $a = b = (-2, 2)$
 в) коника $x^2 - 4xy + 4x + 4y^2 - 6y = -4$, точки $a = (-4, -2)$, $b = (-2, -1/2)$
 г) коника $x^2 - 4xy + 4x + 4y^2 - 6y = -4$, точки $a = b = (-5/2, -1)$.

ГПК2♦3. Напишите уравнение коники, проходящей

- а) через точки $(1 : 1 : 0)$, $(1 : 0 : 1)$, $(0 : 1 : 1)$, $(1 : 1 : 1)$, $(1 : -2 : 3)$
 б) через точки $(1 : 1 : 0)$, $(1 : 0 : 1)$, $(0 : 1 : 1)$ и касающейся прямой $x_0 + x_1 + x_2 = 0$ в точке $(1 : -2 : 1)$
 в) через точку $(1 : 2 : 3)$ и касающейся прямых $x_0 = x_1$ и $x_1 = x_2$, соответственно, в точках $(1 : 1 : 0)$ и $(0 : 1 : 1)$.

Выясните, много ли таких коник, и если вдруг одна, то гладкая ли она, и если да, то чем: эллипсом, гиперболой или параболой изображается эта коника в стандартной аффинной карте U_0 .

ГПК2♦4. Напишите рациональную параметризацию коник:

- а) $9x^2 + 10xy - 6x + 6y^2 - 4y + 1 = 0$
 б) $7x^2 + 20xy - 10x + 22y^2 - 18y + 4 = 0$
 в) $25x^2 - 44xy - 20x + 19y^2 + 18y + 4 = 0$.

ГПК2♦5. Найдите неподвижные точки инволюции комплексной проективной прямой, меняющей местами точки

- а) $\infty \leftrightarrow 1$ и $0 \leftrightarrow 2$
 б) $\infty \leftrightarrow 0$ и $-i \leftrightarrow i$
 в) $\infty \leftrightarrow -1$ и $2 \leftrightarrow -3$

ГПК2♦6. Существует ли гомография рациональной проективной прямой, переводящая точки 1, 2, 3, 4 соответственно в точки:

- а) $1/2, 2, 1/3, 4$
 б) $4, 3, 2, 1$
 в) $1/2, 1, 1/3, 1/4$?