

## Вопросы коллоквиума по материалам первой четверти

**Вопрос 1.** Определение векторного пространства. Единственность нулевого вектора. Противоположный вектор  $-v$  однозначно определяется по  $v$ . Соотношения  $(-1) \cdot v = -v$ ,  $0 \cdot v = 0$ ,  $\lambda \cdot 0 = 0$ . Примеры векторных пространств. Определитель  $2 \times 2$  и правила Крамера для разложения вектора по базису в двумерном векторном пространстве  $\mathbb{K}^2$  и для решения систем из двух линейных уравнений на две неизвестных.

**Вопрос 2.** Два определения аффинного пространства, ассоциированного с данным векторным пространством. Равенства  $\overline{pp} = 0$  и  $\overline{pq} = -\overline{qp}$ . Равносильность равенств  $\overline{pq} = \overline{rs}$  и  $\overline{pr} = \overline{qs}$ . Векторизация и аффинизация. Примеры аффинных пространств. Существование и единственность барицентра набора взвешенных точек. Теорема о группировании масс. Барицентрические комбинации точек, независимость барицентрической комбинации от выбора начальной точки, барицентрическая комбинация барицентрических комбинаций является барицентрической комбинацией.

**Вопрос 3.** Площадь ориентированного параллелограмма в двумерном векторном пространстве: её определение, свойства, существование и единственность с точностью до пропорциональности. Площадь ориентированного треугольника на аффинной плоскости. Равенства  $s(abc) = s(bca) = -s(bac)$  и  $s(abc) = s(pab) + s(pbc) + s(pca)$ . Выражение барицентрических координат точки относительно треугольника на плоскости через площади.

**Вопрос 4.** Определение евклидова пространства и длины вектора. Теорема Пифагора. Ортогональная проекция и нормальная составляющая произвольного вектора по отношению к ненулевому вектору. Существование ортонормального базиса на евклидовой плоскости. Неравенства Коши – Буняковского – Шварца и треугольника.

**Вопрос 5.** Равенство  $\det^2(u, w) = \det \begin{pmatrix} (u, u) & (u, w) \\ (w, u) & (w, w) \end{pmatrix}$  на евклидовой плоскости  $\mathbb{R}^2$ . Положительно и отрицательно ориентированные базисы в  $\mathbb{R}^2$ . Ориентированный угол  $\sphericalangle(u, w)$  между векторами  $u, w$ . Равенства  $\cos \sphericalangle(u, w) = \cos \sphericalangle(u, v) \cos \sphericalangle(v, w) - \sin \sphericalangle(u, v) \sin \sphericalangle(v, w)$  и  $\sin \sphericalangle(u, w) = \cos \sphericalangle(u, v) \sin \sphericalangle(v, w) + \sin \sphericalangle(u, v) \cos \sphericalangle(v, w)$ .

**Вопрос 6.** Определение прямой. Геометрические свойства уравнения прямой на аффинной и евклидовой плоскости. Примеры: уравнение прямой, проходящей через две данные точки, расстояние от точки до прямой, уравнение срединного перпендикуляра к отрезку и уравнения биссектрис углов между двумя заданными прямыми.

**Вопрос 7.** Скалярное произведение однозначно восстанавливается по функции длины. Собственное ортогональное линейное преобразование двумерного евклидова векторного пространства является поворотом, а несобственное — отражением. Собственное движение евклидовой плоскости является сдвигом или поворотом, а несобственное — скользящей симметрией<sup>1</sup>.

**Вопрос 8.** Определения порождающего набора векторов, линейной зависимости и базиса в произвольном векторном пространстве. Набор линейно зависим если и только если один из векторов линейно выражается через другие. Порождающий набор является базисом тогда и только тогда, когда он линейно независим. Каждый минимальный по включению порождающий набор является базисом. Каждый максимальный по включению линейно

<sup>1</sup>При ответе на этот вопрос разрешается использовать (без доказательства) тот факт, что биективное отображение  $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ , переводящее прямые в прямые, является композицией сдвига и линейного изоморфизма  $\mathbb{R}^2 \simeq \mathbb{R}^2$ , оставляющего на месте некоторую точку.

независимый набор является базисом. Аффинный репер и аффинные координаты точки в аффинном пространстве.

**Вопрос 9.** Лемма о замене. В конечно порождённом векторном пространстве любой линейно независимый набор включается в базис, любой порождающий набор содержит базис, и все базисы имеют одинаковую мощность. Определение размерности векторного пространства. В  $n$ -мерном векторном пространстве каждый линейно независимый набор из  $n$  векторов, и каждый порождающий набор из  $n$  векторов являются базисами.

**Вопрос 10.** Сумма и пересечение векторных подпространств  $U, W \subset V$ , равенство

$$\dim(U) + \dim(W) = \dim(U \cap W) + \dim(U + W).$$

**Вопрос 11.** Трансверсальные подпространства, прямая сумма подпространств. Каждый вектор  $v \in U + W$  имеет единственное представление  $v = u + w$  с  $u \in U, w \in W$  если и только если  $U \cap W = 0$  и  $\dim(U+W) = \dim U + \dim W$ . Условие на подпространства  $U_1, U_2, \dots, U_m \subset V$ , необходимое и достаточное для существования прямого разложения  $V = U_1 \oplus U_2 \oplus \dots \oplus U_m$ .

**Вопрос 12.** Определение линейного отображения  $f: V \rightarrow W$ , равенства  $f(0) = 0$  и  $f(-v) = -f(v)$ . Композиция линейных отображений линейна. Подпространства  $\ker f$  и  $\operatorname{im} f$ . Равенства  $f^{-1}(f(v)) = v + \ker f$  и  $\dim V = \dim \ker f + \dim \operatorname{im} f$ . Линейный эндоморфизм  $f: V \rightarrow V$  конечномерного векторного пространства  $V$  биективен если и только если  $\ker f = 0$  и если и только если  $\operatorname{im} f = V$ .

**Вопрос 13.** Фактор пространство  $V/U$  векторного пространства  $V$  по подпространству  $U \subset V$ . Изоморфизм  $V/\ker f \cong \operatorname{im} f$  для линейного отображения  $f: V \rightarrow W$ . Равенство  $\dim V/U = \dim V - \dim U$ .

**Вопрос 14.** Аффинные отображения. Независимость дифференциала от выбора начальной точки. Отображение аффинно если и только если оно перестановочно со взятием барицентрических комбинаций. В  $n$ -мерном аффинном пространстве  $\mathbb{A}^n$  любой не содержащийся в гиперплоскости упорядоченный набор из  $n + 1$  точек переводится в любой упорядоченный набор из  $n + 1$  точек единственным аффинным отображением  $\mathbb{A}^n \rightarrow \mathbb{A}^n$ .

**Вопрос 15.** Взаимное расположение двух аффинных подпространств в конечномерном аффинном пространстве.

**Вопрос 16.** Матрица перехода  $C_{uw}$ , выражающая набор векторов  $w = (w_1, w_2, \dots, w_m)$  через набор векторов  $u = (u_1, u_2, \dots, u_m)$  по формуле  $w = u \cdot C_{uw}$ . Три определения произведения матриц, равенство  $(AB)^t = B^t A^t$ . Равенство  $C_{uw} = C_{uv} C_{vw}$ , изменение координат вектора при изменении базиса. Ассоциативность и дистрибутивность умножения матриц.

**Вопрос 17.** Матрица линейного отображения. Размерность пространства линейных отображений. Матрица композиции линейных отображений. Изменение матрицы линейного отображения при изменении базисов.

**Вопрос 18.** Обратимые матрицы. Квадратная матрица над полем обратима если и только если её строки линейно независимы и если и только если её столбцы линейно независимы. Совпадение размерностей линейных оболочек строк и столбцов матрицы над полем, ранг матрицы.

**Вопрос 19.** Системы линейных уравнений, связь между пространствами решений системы однородных и неоднородных линейных уравнений с одной и той же левой частью, альтернатива Фредгольма, критерий Кронекера–Капелли совместности системы, оценка размерности пространства решений системы линейных однородных уравнений.

**Вопрос 20.** Преобразование матрицы над полем к приведённому ступенчатому виду и отыскание базиса в линейной оболочке заданного набора векторов в координатном пространстве  $\mathbb{k}^n$  методом Гаусса.