Неформальное предисловие

Аксиомы *vs* определения. Есть две точки зрения на то, как выстраивать курс геометрии. Лежащий в основе большинства школьных учебников аксиоматический подход восходит к Евклиду. Однако приемлемая с точки зрения современной математической логики система «аксиом Евклида» была предложена лишь в начале XX века Д. Гильбертом, и только через несколько десятилетий была адаптирована А. Н. Колмогоровым настолько, что вошла в регулярный школьный учебник под его редакцией[1] в виде нескольких страниц убористого петита в добавлении, предназначенном для факультативных занятий. Альтернативный «аналитический подход» вместо аксиоматического описания основных геометрических понятий (точек, прямых, их взаимного расположения и т. п.) даёт всем используемым объектам явные определения, основанные на известном из алгебры и анализа понятии *числа*. Так, *вещественная плоскость* $\mathbb{R}^2$ определяется как множество, точками в котором являются пары вещественных чисел $p = (p_1, p_2)$. Прямая на такой плоскости определяется как траектория точки, равномерно движущейся в заданном направлении, т. е. как ГМТ[2] вида

$$p + v \cdot t = (p_1, p_2) + (v_1, v_2) \cdot t = (p_1 + v_1 t, p_2 + v_2 t)\,,$$

где параметр $t \in \mathbb{R}$ играет роль времени, $p = (p_1, p_2) \in \mathbb{R}^2$ — произвольным образом выбранная начальная точка, отвечающая нулевому моменту времени, а *вектор* $v = (v_1, v_2)$ задаёт скорость движения. После этих определений высказывания о том, что через любые две точки плоскости проходит одна и только одна прямая и что через любую точку плоскости, не лежащую на данной прямой ℓ, проходит ровно одна не пересекающая ℓ прямая, становятся *теоремами*.

Упражнение 0.1. Докажите эти две теоремы.

Точки и векторы. Вектор $v = (v_1, v_2)$, хотя и записывается формально точно такой же парой чисел, как и точка p, является объектом совершенно иной геометрической природы. Его правильно представлять себе как *преобразование сдвига*[3]

$$\tau_v : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2\,, \quad p \mapsto p + v\,,$$

переводящее каждую точку $p = (p_1, p_2)$ в точку $\tau_v(p) = p + v = (p_1 + v_1, p_2 + v_2)$. Координаты (v_1, v_2) вектора v суть числа, описывающие этот сдвиг, а именно — разность $\tau_v(p) - p$, которая одинакова для всех точек $p \in \mathbb{R}^2$. При переносе начала координат из нуля в какую-нибудь другую точку $a = (a_1, a_2) \in \mathbb{R}^2$ координаты каждой точки p поменяются и станут равны $(p_1 - a_1, p_2 - a_2)$, тогда как координаты вектора v, задающего сдвиг τ_v не изменятся.

[1] Основное учебное пособие по геометрии в советской средней школе 70-х – 80-х годов XX века.

[2] Здесь и далее «ГМТ» является сокращением фразы «геометрическое место точек».

[3] Или *параллельный перенос*.

Группы преобразований. Рассмотрим произвольное множество X и обозначим через $\mathrm{End}(X)$ множество всех отображений $f : X \to X$ из X в себя[1]. На множестве $\mathrm{End}(X)$ имеется естественная операция *композиции*, сопоставляющая упорядоченной паре отображений $f : X \to X$, $g : X \to X$, результат их последовательного выполнения справа налево: $f \circ g : X \to X$, $x \mapsto f(g(x))$.

Упражнение 0.2. Приведите пример множества X и таких трёх отображений $f, g, h : X \to X$, что а) $f \circ g \neq g \circ f$ б) $f \circ h = g \circ h$, но $f \neq g$ в) $h \circ f = h \circ g$, но $f \neq g$.

Множество отображений $G \subset \mathrm{End}(X)$ называется *группой*, если все отображения $g \in G$ взаимно однозначны[2], и вместе с каждым отображением $g \in G$ обратное ему отображение[3] g^{-1} тоже принадлежит G, а вместе с каждыми двумя отображениями $g_1, g_2 \in G$ в G лежит и их композиция $g_1 \circ g_2$. Отметим, что из этих требований вытекает, что тождественное отображение Id_X, переводящее каждую точку в себя, автоматически содержится в G, поскольку представимо в виде композиции $\mathrm{Id}_X = g \circ g^{-1} = g^{-1} \circ g$, где $g \in G$ — любое преобразование из группы.

Группа сдвигов. Параллельные переносы плоскости $\mathbb{R}^2$ на всевозможные векторы образуют группу: обратным преобразованием к сдвигу τ_v на вектор $v = (v_1, v_2)$ является сдвиг $\tau_v^{-1} = \tau_{-v}$ на *противоположный* вектор $-v = (-v_1, -v_2)$, а композиция сдвигов на векторы $u = (u_1, u_2)$ и $w = (w_1, w_2)$ это сдвиг на вектор

$$u + w = (u_1 + w_1, u_2 + w_2). \tag{0-1}$$

Подчеркнём, что эта формула является координатной записью для операции *композиции отображений*, которая сама по себе определяется *без использования координат*. Из формулы (0-1) вытекает, что не смотря на упр. 0.2 композиция сдвигов не зависит от того, какой сдвиг делается первым, а какой — вторым.

Группа, состоящая из попарно перестановочных друг с другом преобразований[4] называется *коммутативной* или *абелевой*. Таким образом, векторы составляют абелеву группу преобразований плоскости $\mathbb{R}^2$.

Отметим, что на множестве *точек* никакого естественного сложения нет. Например, если попытаться определить «сумму точек» складывая их координаты, то одна и та же пара точек будет иметь разные суммы в разных координатных системах, поскольку при сдвиге начала координат в точку a от координат всех точек отнимаются координаты точки a, и точки, имевшие в исходной координатной системе координаты

$$(p_1, p_2), \quad (q_1, q_2) \quad \text{и} \quad (p_1 + q_1, p_2 + q_2)$$

в сдвинутой координатной системе приобретают координаты

$$(p_1 - a_1, p_2 - a_2), \quad (q_1 - a_1, q_2 - a_2) \quad \text{и} \quad (p_1 + q_1 - a_1, p_2 + q_2 - a_2)$$

так что «сумма» первых двух из них перестаёт быть равна третьей.

[1] Такие отображения обычно называют *эндоморфизмами* множества X, откуда и обозначение.
[2] Т. е. у каждой точки $y \in X$ имеется ровно один *прообраз* — такая точка $x = g^{-1}(y) \in X$, что $g(x) = y$.
[3] Переводящее каждую точку $y \in X$ в её прообраз $x = g^{-1}(y)$.
[4] Это означает, что $g_1 \circ g_2 = g_2 \circ g_1$ для всех $g_1, g_2 \in G$.

Об этом курсе. Наш курс будет выстроен по схеме, предложенной в 30-х годах XX века Г. Вейлем. Первичным геометрическим объектом для нас будет *векторное пространство* — абелева группа *векторов*, которые можно складывать друг с другом и умножать на числа по известным из школы правилам. Мы напомним список этих правил в §1, он гораздо короче «аксиом Евклида». После чего мы свяжем с векторными пространствами разные *точечные* пространства, в которых можно будет рисовать фигуры и изучать свойства этих фигур по отношению к различным геометрическим преобразованиям. Подчеркнём, что в конечном итоге все эти свойства будут *выводиться* из явных определений и алгебраических свойств операций с векторами.

Первым делом мы покажем, как вписывается в эту картину школьная планиметрия — определим вещественную евклидову плоскость и убедимся в том, что в ней выполняются все постулаты и теоремы школьной планиметрии. Затем мы построим разные другие точечные пространства, имеющие произвольные размерности и определённые над любыми полями констант.

О числах. Понятие *числа* столь же фундаментально для геометрии, сколь и понятие *вектора*. Чтобы перечислить свойства векторов необходимо зафиксировать множество констант, на которые векторы можно умножать. Для нас будет существенно, что константы образуют *поле*, т. е. их можно складывать, вычитать, умножать и делить по тем же формальным алгебраическим правилам, что рациональные числа. Мы всегда обозначаем поле констант через $\Bbbk$ и называем его *основным полем* или *полем определения* рассматриваемой геометрии. Если специально не оговаривается противное, читатель на первых порах может без ущерба для понимания происходящего считать, что $\Bbbk = \mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$ — это поле рациональных, или действительных, или комплексных чисел (выбирайте наиболее привычное). Однако, то обстоятельство, что многие из доказываемых ниже теорем справедливы *над любым* основным полем, следует всё-таки иметь в виду. Скажем, над полем вычетов по простому модулю p, которое состоит из p чисел[1], геометрические пространства становятся конечными множествами, и некоторые всем привычные картинки в этих пространствах превращаются в любопытные комбинаторные утверждения.

[1] Их можно воспринимать как всевозможные остатки от деления целых чисел на p.

Ответы и указания к некоторым упражнениям

Упр. 0.1. См. предл. 1.2 на стр. 17.