

А. Л. Городенцев\*

# ЛИНЕЙНАЯ АЛГЕБРА И ГЕОМЕТРИЯ

1-й курс

Факультет математики НИУ ВШЭ  
2019/20 уч. год

---

\* ВШЭ, НМУ, ИТЭФ, [e-mail:gorod@itep.ru](mailto:gorod@itep.ru), <http://gorod.bogomolov-lab.ru/>

## Оглавление

Оглавление . . . . .	2
Неформальное предисловие . . . . .	6
§1 Аффинная плоскость . . . . .	9
1.1 Векторные пространства . . . . .	9
1.2 Двумерное векторное пространство . . . . .	11
1.3 Площадь ориентированного параллелограмма . . . . .	13
1.4 Аффинные пространства . . . . .	15
1.5 Прямые . . . . .	18
1.6 Треугольники . . . . .	20
§2 Аффинные преобразования . . . . .	24
2.1 Аффинные отображения . . . . .	24
2.2 Аффинная группа . . . . .	28
2.3 Сравнение аффинной и линейной групп . . . . .	30
2.4 Преобразования, переводящие прямые в прямые . . . . .	32
§3 Евклидова плоскость . . . . .	35
3.1 Длина вектора и перпендикулярность . . . . .	35
3.2 Ортонормальные базисы . . . . .	38
3.3 Углы и тригонометрия . . . . .	40
3.4 Движения . . . . .	42
3.5 Комплексные числа . . . . .	45
3.6 Преобразования подобия . . . . .	47
§4 Многомерие . . . . .	50
4.1 Базисы и размерность . . . . .	50
4.2 Подпространства . . . . .	53
4.3 Аффинная геометрия . . . . .	56
4.4 Линейные и аффинные отображения . . . . .	57
4.5 Фактор пространства . . . . .	61
§5 Матрицы . . . . .	63
5.1 Умножение матриц . . . . .	63
5.2 Матрицы перехода . . . . .	64
5.3 Обратимые матрицы . . . . .	66
5.4 Ранг матрицы . . . . .	68
5.5 Системы линейных уравнений . . . . .	69
5.6 Алгебры над полем . . . . .	70
5.7 Матрицы над ассоциативным кольцом . . . . .	72
§6 Метод Гаусса . . . . .	75
6.1 Построение базиса в подпространстве . . . . .	75
6.2 Отыскание обратной матрицы . . . . .	77
6.3 Решение систем линейных уравнений . . . . .	79
6.4 Построение базиса в фактор пространстве . . . . .	82

6.5	Расположение подпространства относительно базиса . . . . .	83
§7	Двойственность . . . . .	86
7.1	Двойственные пространства . . . . .	86
7.2	Аннуляторы . . . . .	89
7.3	Двойственные линейные отображения . . . . .	92
7.4	Отступление: бесконечномерие . . . . .	94
§8	Объёмы и определители . . . . .	99
8.1	Объём $n$ -мерного параллелепипеда . . . . .	99
8.2	Пространство кососимметричных $n$ -линейных форм . . . . .	100
8.3	Определители . . . . .	103
8.4	Правила Крамера . . . . .	106
§9	Вариации на тему определителей . . . . .	112
9.1	Объём и барицентрические координаты . . . . .	112
9.2	Грассмановы многочлены . . . . .	115
9.3	Соотношения Лапласа . . . . .	117
§10	Линейные операторы . . . . .	120
10.1	Пространство с оператором . . . . .	120
10.2	Собственные подпространства . . . . .	123
10.3	Нильпотентные операторы . . . . .	125
10.4	Корневое разложение и функции от операторов . . . . .	127
10.5	Разложение Жордана . . . . .	130
§11	Евклидова геометрия . . . . .	133
11.1	Ортонормальные базисы . . . . .	133
11.2	Матрицы Грама . . . . .	135
11.3	Евклидова двойственность . . . . .	136
11.4	Ортогональное проектирование, расстояния и углы . . . . .	138
11.5	Векторные произведения . . . . .	141
§12	Линейные отображения евклидовых пространств . . . . .	143
12.1	Ортогональные операторы . . . . .	143
12.2	Евклидово сопряжение линейных отображений . . . . .	148
12.3	Сопряжённые и антисопряжённые операторы . . . . .	149
12.4	Сингулярные числа и сингулярные направления . . . . .	151
§13	Выпуклая геометрия . . . . .	155
13.1	Выпуклые фигуры . . . . .	155
13.2	Опорные полупространства . . . . .	156
13.3	Грани и крайние точки . . . . .	159
13.4	Выпуклые многогранники . . . . .	161
13.5	Выпуклые многогранные конусы . . . . .	162
13.6	Проективный и асимптотический конусы многогранника . . . . .	165
§14	Пространство с билинейной формой . . . . .	168
14.1	Билинейные формы . . . . .	168
14.2	Невырожденные формы . . . . .	170
14.3	Ортогоналы и ортогональные проекции . . . . .	175

14.4	Симметричные и кососимметричные формы . . . . .	176
§15	Симметричные билинейные и квадратичные формы . . . . .	179
15.1	Пространства со скалярным произведением . . . . .	179
15.2	Изометрии и отражения . . . . .	181
15.3	Квадратичные формы . . . . .	183
15.4	Квадратичные формы над конечными полями . . . . .	185
15.5	Вещественные квадратичные формы . . . . .	187
15.6	Самосопряжённые операторы . . . . .	191
§16	Кососимметричные билинейные и грассмановы квадратичные формы . . . . .	193
16.1	Симплектические пространства . . . . .	193
16.2	Грассмановы квадратичные формы . . . . .	195
16.3	Пфаффиан . . . . .	196
16.4	Симплектическая группа . . . . .	198
§17	Проективная геометрия . . . . .	201
17.1	Проективные пространства . . . . .	201
17.2	Подпространства . . . . .	206
17.3	Проективные квадрики . . . . .	208
17.4	Однородные многочлены . . . . .	212
17.5	Конфигурации точек на прямой . . . . .	214
17.6	Пространства гиперповерхностей . . . . .	217
§18	Проективные преобразования . . . . .	219
18.1	Линейные проективные изоморфизмы . . . . .	219
18.2	Гомографии . . . . .	221
18.3	Двойное отношение . . . . .	226
18.4	Гомографии на гладкой конике . . . . .	230
§19	Гладкие проективные квадрики . . . . .	233
19.1	Полярное преобразование относительно гладкой квадрики . . . . .	233
19.2	Подпространства, лежащие на гладкой квадрике . . . . .	239
19.3	Классификация проективных квадрик . . . . .	240
19.4	Квадратичные поверхности . . . . .	242
19.5	Квадрика Плюккера . . . . .	244
§20	Пучки квадрик . . . . .	247
20.1	Базисное множество и спектр . . . . .	247
20.2	Невырожденные пучки коник . . . . .	248
20.3	Касательное пространство к проективной гиперповерхности . . . . .	252
20.4	Гиперповерхность особых квадрик . . . . .	253
20.5	Регулярные пучки квадрик . . . . .	255
§21	Конформная геометрия вещественных коник . . . . .	258
21.1	Комплексная проективизация вещественной плоскости . . . . .	258
21.2	Гладкие непустые вещественные коники . . . . .	259
21.3	Геометрия центральных коник . . . . .	262
21.4	Геометрия парабол . . . . .	267
§22	Аффинные квадрики . . . . .	272

---

---

22.1 Проективное оснащение аффинного пространства . . . . .	272
22.2 Гладкие центральные квадрики . . . . .	274
22.3 Параболоиды . . . . .	275
22.4 Простые конусы . . . . .	276
22.5 Цилиндры . . . . .	276
22.6 Квадрики в евклидовом пространстве . . . . .	280
§23 Сферы . . . . .	286
23.1 Сферы в евклидовом пространстве . . . . .	286
23.2 Сферы как комплексные проективные квадрики . . . . .	288
23.3 Инверсии . . . . .	292
23.4 Стереографическая проекция и инверсии на сфере . . . . .	297
23.5 Группы Мёбиуса . . . . .	298
Ответы и указания к некоторым упражнениям . . . . .	300

## Неформальное предисловие

**Аксиомы vs определения.** Есть две точки зрения на то, как выстраивать курс геометрии. Лежащий в основе большинства школьных учебников аксиоматический подход восходит к Евклиду. Однако приемлемая с точки зрения современной математической логики система «аксиом Евклида» была предложена лишь в начале XX века Д. Гильбертом, и только через несколько десятилетий была адаптирована А. Н. Колмогоровым настолько, что вошла в регулярный школьный учебник под его редакцией<sup>1</sup> в виде нескольких страниц убористого петита в добавлении, предназначенном для факультативных занятий. Альтернативный «аналитический подход» вместо аксиоматического описания основных геометрических понятий (точек, прямых, их взаимного расположения и т. п.) даёт всем используемым объектам явные определения, основанные на известном из алгебры и анализа понятии числа. Так, *вещественная плоскость*  $\mathbb{R}^2$  определяется как множество, точками в котором являются пары вещественных чисел  $p = (p_1, p_2)$ . Прямая на такой плоскости определяется как траектория точки, равномерно движущейся в заданном направлении, т. е. как ГМТ<sup>2</sup> вида

$$p + v \cdot t = (p_1, p_2) + (v_1, v_2) \cdot t = (p_1 + v_1 t, p_2 + v_2 t),$$

где параметр  $t \in \mathbb{R}$  играет роль времени,  $p = (p_1, p_2) \in \mathbb{R}^2$  — произвольным образом выбранная начальная точка, отвечающая нулевому моменту времени, а *вектор*  $v = (v_1, v_2)$  задаёт скорость движения. После этих определений высказывания о том, что через любые две точки плоскости проходит одна и только одна прямая и что через любую точку плоскости, не лежащую на данной прямой  $\ell$ , проходит ровно одна не пересекающая  $\ell$  прямая, становятся *теоремами*.

УПРАЖНЕНИЕ 0.1. Докажите эти две теоремы.

**Точки и векторы.** Вектор  $v = (v_1, v_2)$ , хотя и записывается формально точно такой же парой чисел, как и точка  $p$ , является объектом совершенно иной геометрической природы. Его правильно представлять себе как *преобразование сдвига*<sup>3</sup>

$$\tau_v : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad p \mapsto p + v,$$

переводящее каждую точку  $p = (p_1, p_2)$  в точку  $\tau_v(p) = p + v = (p_1 + v_1, p_2 + v_2)$ . Координаты  $(v_1, v_2)$  вектора  $v$  суть числа, описывающие этот сдвиг, а именно — разность  $\tau_v(p) - p$ , которая одинакова для всех точек  $p \in \mathbb{R}^2$ . При переносе начала координат из нуля в какую-нибудь другую точку  $a = (a_1, a_2) \in \mathbb{R}^2$  координаты каждой точки  $p$  поменяются и станут равны  $(p_1 - a_1, p_2 - a_2)$ , тогда как координаты вектора  $v$ , задающего сдвиг  $\tau_v$  не изменятся.

<sup>1</sup>Основное учебное пособие по геометрии в советской средней школе 70-х – 80-х годов XX века.

<sup>2</sup>Здесь и далее «ГМТ» является сокращением фразы «геометрическое место точек».

<sup>3</sup>Или *параллельный перенос*.

**Группы преобразований.** Рассмотрим произвольное множество  $X$  и обозначим через  $\text{End}(X)$  множество всех отображений  $f : X \rightarrow X$  из  $X$  в себя<sup>1</sup>. На множестве  $\text{End}(X)$  имеется естественная операция *композиции*, сопоставляющая упорядоченной паре отображений  $f : X \rightarrow X, g : X \rightarrow X$ , результат их последовательного выполнения справа налево:  $f \circ g : X \rightarrow X, x \mapsto f(g(x))$ .

УПРАЖНЕНИЕ 0.2. Приведите пример множества  $X$  и таких трёх отображений  $f, g, h : X \rightarrow X$ , что а)  $f \circ g \neq g \circ f$  б)  $f \circ h = g \circ h$ , но  $f \neq g$  в)  $h \circ f = h \circ g$ , но  $f \neq g$ .

Множество отображений  $G \subset \text{End}(X)$  называется *группой*, если все отображения  $g \in G$  взаимно однозначны<sup>2</sup>, и вместе с каждым отображением  $g \in G$  обратное ему отображение<sup>3</sup>  $g^{-1}$  тоже принадлежит  $G$ , а вместе с каждым двумя отображениями  $g_1, g_2 \in G$  в  $G$  лежит и их композиция  $g_1 \circ g_2$ . Отметим, что из этих требований вытекает, что тождественное отображение  $\text{Id}_X$ , переводящее каждую точку в себя, автоматически содержится в  $G$ , поскольку представимо в виде композиции  $\text{Id}_X = g \circ g^{-1} = g^{-1} \circ g$ , где  $g \in G$  — любое преобразование из группы.

**Группа сдвигов.** Параллельные переносы плоскости  $\mathbb{R}^2$  на всевозможные векторы образуют группу: обратным преобразованием к сдвигу  $\tau_v$  на вектор  $v = (v_1, v_2)$  является сдвиг  $\tau_v^{-1} = \tau_{-v}$  на *противоположный* вектор  $-v = (-v_1, -v_2)$ , а композиция сдвигов на векторы  $u = (u_1, u_2)$  и  $w = (w_1, w_2)$  это сдвиг на вектор

$$u + w = (u_1 + w_1, u_2 + w_2). \quad (0-1)$$

Подчеркнём, что эта формула является координатной записью для операции *композиции отображений*, которая сама по себе определяется без использования координат. Из формулы (0-1) вытекает, что не смотря на упр. 0.2 композиция сдвигов не зависит от того, какой сдвиг делается первым, а какой — вторым.

Группа, состоящая из попарно перестановочных друг с другом преобразований<sup>4</sup> называется *коммутативной* или *абелевой*. Таким образом, векторы составляют абелеву группу преобразований плоскости  $\mathbb{R}^2$ .

Отметим, что на множестве *точек* никакого естественного сложения нет. Например, если попытаться определить «сумму точек» складывая их координаты, то одна и та же пара точек будет иметь разные суммы в разных координатных системах, поскольку при сдвиге начала координат в точку  $a$  от координат всех точек отнимаются координаты точки  $a$ , и точки, имевшие в исходной координатной системе координаты

$$(p_1, p_2), \quad (q_1, q_2) \quad \text{и} \quad (p_1 + q_1, p_2 + q_2)$$

в сдвинутой координатной системе приобретают координаты

$$(p_1 - a_1, p_2 - a_2), \quad (q_1 - a_1, q_2 - a_2) \quad \text{и} \quad (p_1 + q_1 - a_1, p_2 + q_2 - a_2)$$

так что «сумма» первых двух из них перестаёт быть равна третьей.

<sup>1</sup>Такие отображения обычно называют *эндоморфизмами* множества  $X$ , откуда и обозначение.

<sup>2</sup>Т.е. у каждой точки  $y \in X$  имеется ровно один *прообраз* — такая точка  $x = g^{-1}(y) \in X$ , что  $g(x) = y$ .

<sup>3</sup>Переводящее каждую точку  $y \in X$  в её прообраз  $x = g^{-1}(y)$ .

<sup>4</sup>Это означает, что  $g_1 \circ g_2 = g_2 \circ g_1$  для всех  $g_1, g_2 \in G$ .

**Об этом курсе.** Наш курс будет выстроен по схеме, предложенной в 30-х годах XX века Г. Вейлем. Первичным геометрическим объектом для нас будет *векторное пространство* — абелева группа *векторов*, которые можно складывать друг с другом и умножать на числа по известным из школы правилам. Мы напомним список этих правил в §1, он гораздо короче «аксиом Евклида». После чего мы свяжем с векторными пространствами разные *точечные* пространства, в которых можно будет рисовать фигуры и изучать свойства этих фигур по отношению к различным геометрическим преобразованиям. Подчеркнём, что в конечном итоге все эти свойства будут *выводиться* из явных определений и алгебраических свойств операций с векторами.

Первым делом мы покажем, как вписывается в эту картину школьная планиметрия — определим вещественную евклидову плоскость и убедимся в том, что в ней выполняются все постулаты и теоремы школьной планиметрии. Затем мы построим разные другие точечные пространства, имеющие произвольные размерности и определённые над любыми полями констант.

**О числах.** Понятие *числа* столь же фундаментально для геометрии, сколь и понятие *вектора*. Чтобы перечислить свойства векторов необходимо сначала зафиксировать множество констант, на которые векторы можно умножать. Для нас будет существенно, что константы образуют *поле*, т. е. их можно складывать, вычитать, умножать и делить по тем же формальным алгебраическим правилам, что рациональные числа. Мы всегда обозначаем поле констант через  $\mathbb{k}$  и называем его *основным полем* или *полем определения* рассматриваемой геометрии. Если специально не оговаривается противное, читатель на первых порах может без ущерба для понимания происходящего считать, что  $\mathbb{k} = \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$  — это поле рациональных, или действительных, или комплексных чисел (выбирайте наиболее привычное). Однако, то обстоятельство, что многие из доказываемых ниже теорем справедливы *над любым* основным полем, следует всё-таки иметь в виду. Скажем, над полем вычетов по простому модулю  $p$ , которое состоит из  $p$  чисел<sup>1</sup>, геометрические пространства становятся конечными множествами, и некоторые всем привычные картинки в этих пространствах превращаются в любопытные комбинаторные утверждения.

---

<sup>1</sup>Их можно воспринимать как всевозможные остатки от деления целых чисел на  $p$ .



## §1. Аффинная плоскость

**1.1. Векторные пространства.** Фиксируем произвольное поле<sup>1</sup>  $\mathbb{k}$ , элементы которого будем называть *числами* или *скалярами*. Множество  $V$ , элементы которого мы будем называть *векторами*<sup>2</sup>, является *векторным пространством* над полем  $\mathbb{k}$ , если на  $V$  определены операция *сложения векторов*, сопоставляющая каждой паре векторов  $v_1, v_2 \in V$  их сумму  $v_1 + v_2 \in V$ , и операция *умножения векторов на числа*, сопоставляющая каждому вектору  $v \in V$  и скаляру  $\lambda \in \mathbb{k}$  вектор  $\lambda \cdot v = v \cdot \lambda \in V$  так, что выполняются следующие аксиомы.

1. Свойства сложения векторов:

(1а)  $a + b = b + a$  для всех  $a, b \in V$  (см. рис. 1◊1)

(1б)  $a + (b + c) = (a + b) + c$  для всех  $a, b, c \in V$  (см. рис. 1◊2)

(1в) имеется такой *нулевой вектор*  $0 \in V$ , что  $a + 0 = a$  для всех  $a \in V$

(1г) для каждого вектора  $a \in V$  имеется *противоположный вектор*  $-a \in V$ , такой что  $a + (-a) = 0$ .

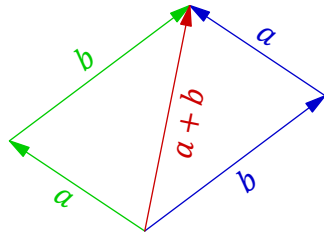


Рис. 1◊1. Правило параллелограмма.

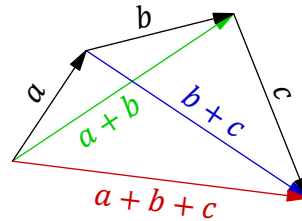


Рис. 1◊2. Правило четырёхугольника.

2. Свойства умножения векторов на числа:

(2а)  $\lambda(\mu a) = (\lambda\mu)a$  для всех  $a \in V$  и  $\lambda, \mu \in \mathbb{k}$

(2б)  $(\lambda + \mu)a = \lambda a + \mu a$  для всех  $a \in V$  и  $\lambda, \mu \in \mathbb{k}$

(2в)  $\lambda(a + b) = \lambda a + \lambda b$  для всех  $a, b \in V$  и  $\lambda \in \mathbb{k}$

(2г)  $1 \cdot a = a$  для всех  $a \in V$ .

Подмножество  $U$  векторного пространства  $V$  называется *векторным подпространством*, если для любых двух векторов  $u, w \in U$  все их линейные комбинации  $\lambda u + \mu w$  с произвольными  $\lambda, \mu \in \mathbb{k}$  тоже лежат в  $U$ . Из написанных аксиом формально вытекает ещё несколько интуитивно ожидаемых свойств операций над векторами.

<sup>1</sup>Точное определение поля будет дано в курсе алгебры (см., например, лекцию <http://gorod.bogomolov-lab.ru/ps/stud/algebra-1/1314/lec-02.pdf>).

<sup>2</sup>Векторы продуктивно представлять себе как направленные отрезки, рассматриваемые с точностью до параллельного переноса.

## ЛЕММА 1.1

В каждом векторном пространстве  $V$  нулевой вектор  $0 \in V$  единствен. Для любого  $a \in V$  противоположный к  $a$  вектор  $-a$  однозначно определяется по  $a$ . Кроме того,  $0 \cdot a = 0$  и  $(-1) \cdot a = -a$ , где  $0$  и  $-1$  в левых частях равенств суть числа из поля  $\mathbb{k}$ , а  $0$  и  $-a$  в правых — векторы из пространства  $V$ . Аналогично,  $\lambda \cdot 0 = 0$  для всех  $\lambda \in \mathbb{k}$ , где  $0 \in V$  — нулевой вектор.

Доказательство. Для любых двух нулевых векторов  $0_1, 0_2 \in V$  по аксиоме (1в) выполняется равенство  $0_1 = 0_1 + 0_2 = 0_2$ . Если векторы  $b$  и  $c$  оба противоположны к  $a$ , то  $b = b + 0 = b + (a + c) = (b + a) + c = 0 + c = c$ . Если к левой и правой частям равенства

$$a + 0 \cdot a = 1 \cdot a + 0 \cdot a = (1 + 0) \cdot a = 1 \cdot a = a$$

прибавить противоположный к  $a$  вектор  $-a$ , мы получим  $0 \cdot a = 0$ . Аналогично, прибавляя к обеим частям равенства  $\lambda \cdot 0 = \lambda \cdot (0 + 0) = \lambda \cdot 0 + \lambda \cdot 0$  вектор, противоположный вектору  $\lambda \cdot 0$ , получаем  $0 = \lambda \cdot 0$ . Вектор  $(-1) \cdot a$  противоположен к  $a$ , поскольку  $a + (-1) \cdot a = 1 \cdot a + (-1) \cdot a = (1 - 1) \cdot a = 0 \cdot a = 0$ .  $\square$

## ПРИМЕР 1.1

Простейшие примеры векторных пространств суть *нулевое* или *тривиальное пространство*  $0$ , состоящее из одного лишь нулевого вектора  $0$ , такого что  $0 + 0 = 0 = -0$  и  $\lambda \cdot 0 = 0$  для всех  $\lambda \in \mathbb{k}$ , а также само поле  $\mathbb{k}$ , где сложение векторов и их умножение на числа суть сложение и умножение, которые имеются в поле  $\mathbb{k}$ .

ПРИМЕР 1.2 ( $n$ -МЕРНОЕ КООРДИНАТНОЕ ПРОСТРАНСТВО  $\mathbb{k}^n$ )

По определению, векторами пространства  $\mathbb{k}^n$  являются упорядоченные наборы из  $n$  чисел<sup>1</sup>

$$(x_1, x_2, \dots, x_n), \quad x_i \in \mathbb{k}.$$

Сложение векторов и их умножение на числа задаются правилами

$$\begin{aligned} (x_1, x_2, \dots, x_n) + (y_1, y_2, \dots, y_n) &\stackrel{\text{def}}{=} (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \dots, x_n + y_n) \\ \lambda \cdot (x_1, x_2, \dots, x_n) &\stackrel{\text{def}}{=} (\lambda x_1, \lambda x_2, \dots, \lambda x_n). \end{aligned}$$

## ПРИМЕР 1.3 (ПРОСТРАНСТВО МНОГОЧЛЕНОВ)

Многочлены с коэффициентами в поле  $\mathbb{k}$  образуют векторное пространство над  $\mathbb{k}$  относительно операций сложения многочленов и умножения их на константы. Это пространство обозначается  $\mathbb{k}[x]$ . Многочлены степени не выше  $n$  образуют в  $\mathbb{k}[x]$  векторное подпространство, которое мы будем обозначать  $\mathbb{k}[x]_{\leq n}$ .

**1.1.1. Линейные отображения.** Отображение  $F : U \rightarrow W$  из векторного пространства  $U$  в векторное пространство  $W$  называется *линейным*, если оно перестановочно со сложением векторов и их умножением на числа в том смысле, что  $F(\alpha a + \beta b) = \alpha F(a) + \beta F(b)$  для всех  $a, b \in U$  и  $\alpha, \beta \in \mathbb{k}$ . Векторные пространства, между которыми имеется взаимно однозначное линейное отображение, называются *изоморфными*, а само это отображение называется *изоморфизмом* векторных пространств. Изоморфизмы  $V \simeq V$  пространства с самим собою называются *автоморфизмами*. Автоморфизмы векторного пространства  $V$  образуют *группу преобразований*<sup>2</sup>. Эта группа обозначается  $GL(V)$  и называется *полной линейной группой* векторного пространства  $V$ .

<sup>1</sup>Для экономии бумаги мы пишем их в строчку, но иногда бывает удобно представлять векторы пространства  $\mathbb{k}^n$  и в виде столбцов.

<sup>2</sup>См. стр. 7.

## ПРИМЕР 1.4

Пространство  $\mathbb{k}[x]_{\leq n}$  многочленов степени не выше  $n$  изоморфно  $(n + 1)$ -мерному координатному пространству  $\mathbb{k}^{n+1}$  посредством линейного биективного отображения, сопоставляющего многочлену  $a_0x^n + a_1x^{n-1} + \dots + a_{n-1}x + a_n$  набор его коэффициентов  $(a_0, a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{k}^{n+1}$ .

**Предостережение 1.1.** Обратите внимание, что отображение  $\varphi : \mathbb{k} \rightarrow \mathbb{k}$ , заданное формулой  $\varphi(x) = a \cdot x + b$ , которое в школе принято называть «линейной функцией», линейно в смысле п° 1.1.1 только при  $b = 0$ . Если же  $b \neq 0$ , то  $\varphi(\lambda x) \neq \lambda\varphi(x)$  и  $\varphi(x + y) \neq \varphi(x) + \varphi(y)$ , т. е.  $\varphi$  не является линейным отображением.

**УПРАЖНЕНИЕ 1.1.** Докажите, что для любого линейного отображения  $F$  выполняются равенства

$$F(0) = 0 \quad \text{и} \quad F(-v) = -F(v) \quad \text{для всех } v \in V.$$

**1.1.2. Пропорциональные векторы и одномерные пространства.** Векторы  $a$  и  $b$  из векторного пространства  $V$  называются *пропорциональными*, если  $x \cdot a = y \cdot b$  для некоторых чисел  $x, y \in \mathbb{k}$ , не равных одновременно нулю. Таким образом, нулевой вектор пропорционален любому вектору, а пропорциональность ненулевых векторов  $a$  и  $b$  означает, что  $a = \lambda b$  и  $b = \lambda^{-1}a$  для некоторого ненулевого  $\lambda \in \mathbb{k}$ .

Векторное пространство  $V$  называется *одномерным*, что принято записывать равенством<sup>1</sup>  $\dim V = 1$ , если в нём есть ненулевые векторы, но все они пропорциональны друг другу. Фиксируя в одномерном пространстве  $V$  какой-нибудь ненулевой вектор  $e$ , мы можем однозначно записать любой вектор  $v \in V$  как  $v = xe$  с  $x \in \mathbb{k}$ . Такое представление единственно, поскольку из равенства  $xe = ye$  вытекает, что  $(x - y)e = 0$ , откуда  $x - y = 0$ , ибо в противном случае, умножая обе части равенства  $(x - y)e = 0$  на число  $(x - y)^{-1}$ , мы получили бы  $e = 0$ .

Число  $x$  называется *координатой* вектора  $v = xe$  относительно *базисного* вектора  $e$ . Отображение  $V \rightarrow \mathbb{k}$ , переводящее каждый вектор  $v = xe \in V$  в его координату  $x \in \mathbb{k}$  устанавливает изоморфизм между  $V$  и  $\mathbb{k}$ . При выборе другого базисного вектора  $e' = \lambda e$  координата  $x'$  каждого вектора  $v = x'e' = x'\lambda e = xe$  относительно этого нового базисного вектора связана со старой координатой  $x$  соотношением  $x' = \lambda^{-1}x$ .

Каждое линейное отображение  $F : V \rightarrow V$  одномерного пространства  $V$  в себя однозначно задаётся тем, куда оно переводит какой-нибудь базисный вектор  $e$  пространства  $V$ . Если  $F(e) = \lambda e$ , то для произвольного вектора  $v = xe$  получим  $F(xe) = xF(e) = \lambda xe$ . В частности, эндоморфизм  $F$  либо отображает все векторы в нуль, либо является гомотетией с ненулевым коэффициентом  $\lambda \in \mathbb{k}$ . Таким образом, полная линейная группа  $\text{GL}(V)$  одномерного пространства  $V$  состоит из гомотетий с ненулевыми коэффициентами и изоморфна мультипликативной группе  $\mathbb{k}^*$  ненулевых элементов поля  $\mathbb{k}$ .

**1.2. Двумерное векторное пространство.** Векторное пространство  $V$  называется *двумерным*, что принято записывать равенством  $\dim V = 2$ , если в нём есть пара непропорциональных векторов  $e_1, e_2$ , и каждый вектор  $v \in V$  выражается через них в виде  $v = x_1e_1 + x_2e_2$ , где  $x_1, x_2 \in \mathbb{k}$ . Любая пара векторов  $e_1, e_2$ , обладающая этими двумя свойствами, называется *базисом* пространства  $V$ . Коэффициенты  $x_1, x_2$  разложения вектора  $v$  по базису *однозначно* определяются вектором  $v$  и базисом, поскольку из равенства  $x_1e_1 + x_2e_2 = y_1e_1 + y_2e_2$  вытекает равенство

<sup>1</sup>Обозначение  $\dim$  является сокращением от *dimension* (размерность). В полной общности мы обсудим это понятие в п° 4.1 на стр. 50 ниже.

$(x_1 - y_1)e_1 = (x_2 - y_2)e_2$ , возможно только при  $(x_1 - y_1) = (x_2 - y_2) = 0$  в силу того, что векторы  $e_1$  и  $e_2$  не пропорциональны. Числа  $x_1, x_2 \in \mathbb{k}$  из разложения  $v = x_1e_1 + x_2e_2$  называются *координатами* вектора  $v$  в базисе  $e = (e_1, e_2)$ . Сопоставляя каждому вектору столбец его координат в базисе  $e$ , мы получаем биективное отображение

$$c_e : V \xrightarrow{\sim} \mathbb{k}^2, \quad v = x_1e_1 + x_2e_2 \mapsto \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{k}^2.$$

**УПРАЖНЕНИЕ 1.2.** Проверьте, что это отображение линейно, т. е. при сложении векторов столбцы их координат складываются, а при умножении на число — умножаются на число по правилам координатного пространства  $\mathbb{k}^2$ .

Таким образом, всякое двумерное векторное пространство  $V$  изоморфно координатному пространству  $\mathbb{k}^2$ .

**1.2.1. Определитель  $2 \times 2$ .** Пропорциональность векторов  $a = (a_1, a_2)$  и  $b = (b_1, b_2)$  в  $\mathbb{k}^2$  равносильна равенству перекрёстных произведений  $a_1b_2 = a_2b_1$ . Число

$$\det(a, b) \stackrel{\text{def}}{=} a_1b_2 - a_2b_1 \quad (1-1)$$

называется *определителем* векторов  $a, b \in \mathbb{k}^2$  или  $2 \times 2$ -матрицы, составленной из координат этих векторов. В последнем случае определитель записывают как

$$\det \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{pmatrix} = a_1b_2 - a_2b_1 = \det \begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{pmatrix}$$

Обратите внимание, что неважно, каким образом записаны координаты векторов — по строкам или по столбцам матрицы, поскольку величина (1-1) не меняется при отражении матрицы относительно диагонали, ведущей из левого верхнего угла в правый нижний<sup>1</sup>. Очевидно, что для всех векторов  $a, b, c \in \mathbb{k}^2$  и чисел  $\lambda \in \mathbb{k}$  выполняются равенства

$$\det(a, b) = 0 \iff a \text{ и } b \text{ пропорциональны} \quad (1-2)$$

$$\det(a, b) = -\det(b, a) \quad (1-3)$$

$$\det(\lambda a, b) = \lambda \det(a, b) = \det(a, \lambda b) \quad (1-4)$$

$$\det(a + b, c) = \det(a, c) + \det(b, c) \quad (1-5)$$

$$\det(a, b + c) = \det(a, b) + \det(a, c)$$

**УПРАЖНЕНИЕ 1.3.** Убедитесь в этом!

Свойство (1-3) называется *закопеременностью*, (1-4) — *однородностью*, (1-5) — *аддитивностью*. Вместе однородность и аддитивность означают, что определитель *линеен* по каждому из двух своих аргументов, т. е. *билинеен*. Из билинейности вытекает, что для любых векторов  $a, b, c, d \in \mathbb{k}^2$  и констант  $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{k}$  выполняется то же самое правило раскрытия скобок<sup>2</sup>, что и для произведения чисел:

$$\det(\alpha a + \beta b, \gamma c + \delta d) = \alpha\gamma \det(a, c) + \alpha\delta \det(a, d) + \beta\gamma \det(b, c) + \beta\delta \det(b, d).$$

<sup>1</sup>Эта диагональ называется *главной*, а отражение матрицы относительно главной диагонали называется *транспонированием*.

<sup>2</sup>Это правило называют *дистрибутивностью* или *распределительным законом*.

## ЛЕММА 1.2

Каждая пара непропорциональных векторов  $a, b \in \mathbb{K}^2$  является базисом. Коэффициенты разложения произвольного вектора  $v \in \mathbb{K}^2$  по этому базису вычисляются по *правилу Крамера*:

$$v = x \cdot a + y \cdot b \iff \begin{cases} x = \det(v, b) / \det(a, b) \\ y = \det(a, v) / \det(a, b) \end{cases} \quad (1-6)$$

Доказательство. Если имеется разложение  $v = x \cdot a + y \cdot b$ , то из билинейности и косимметричности определителя вытекают равенства

$$\begin{aligned} \det(a, v) &= \det(a, x \cdot a + y \cdot b) = x \cdot \det(a, a) + y \cdot \det(a, b) = y \cdot \det(a, b) \\ \det(v, b) &= \det(x \cdot a + y \cdot b, b) = x \cdot \det(a, b) + y \cdot \det(b, b) = x \cdot \det(a, b), \end{aligned}$$

из которых  $x$  и  $y$  однозначно выражаются в виде (1-6). Для доказательства существования разложения  $v = x \cdot a + y \cdot b$  заметим, что разность  $v - a \cdot \det(v, b) / \det(a, b)$  пропорциональна вектору  $b$ , т. к.  $\det(v - a \cdot \det(v, b) / \det(a, b), b) = \det(v, b) - \det(a, b) \cdot \det(v, b) / \det(a, b) = 0$ . Поэтому  $v = a \cdot \det(v, b) / \det(a, b) + b \cdot y$  для некоторого  $y \in \mathbb{K}$ .  $\square$

## СЛЕДСТВИЕ 1.1

В любом двумерном векторном пространстве любые два непропорциональных вектора образуют его базис.  $\square$

УПРАЖНЕНИЕ 1.4. Пусть вектор  $v$  имеет в базисе  $(u_1, u_2)$  координаты  $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ , а векторы  $u_1$  и  $u_2$ , в свою очередь, имеют в некотором другом базисе  $(w_1, w_2)$  координаты  $u_1 = \begin{pmatrix} c_{11} \\ c_{21} \end{pmatrix}$  и  $u_2 = \begin{pmatrix} c_{12} \\ c_{22} \end{pmatrix}$ . Найдите координаты вектора  $v$  в базисе  $(w_1, w_2)$ .

**1.3. Площадь ориентированного параллелограмма.** Функция  $s : V \times V \rightarrow \mathbb{K}$ , сопоставляющая каждой упорядоченной паре векторов  $a, b$  двумерного векторного пространства  $V$  число  $s(a, b) \in \mathbb{K}$ , называется *площадью ориентированного параллелограмма*, если для любых векторов  $a, b \in V$  и чисел  $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$  выполняются равенства

$$s(a, b + \lambda a) = s(a, b) = s(a + \mu b, b) \quad (1-7)$$

$$s(\lambda a, b) = \lambda s(a, b) = s(a, \lambda b). \quad (1-8)$$

Первое из них означает, что площадь параллелограмма не меняется при параллельном переносе одной из его сторон вдоль самой себя: треугольник, который при этом отрезается, параллельно сдвигается и приклеивается с другой стороны, как на рис. 1◊3.

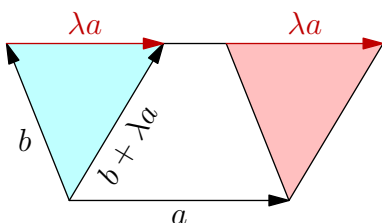


Рис. 1◊3. Площадь не меняется.

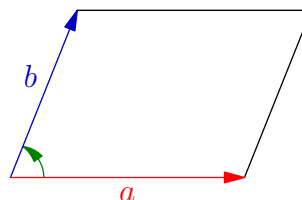


Рис. 1◊4. Ориентированный параллелограмм.

Второе свойство (1-8) утверждает, что при изменении одной из сторон параллелограмма в  $\lambda$  раз площадь также изменяется в  $\lambda$  раз. В частности,  $s(-a, b) = -s(a, b) = s(a, -b)$ , т. е. площадь *меняет знак* при смене знака одного из векторов. В школьном курсе геометрии над полем  $\mathbb{k} = \mathbb{R}$  принято считать, что площадь положительна и  $s(\lambda a, b) = s(a, \lambda b) = |\lambda| \cdot s(a, b)$ . Отказываясь от положительности, мы не просто упраздняем модуль<sup>1</sup>, но помимо абсолютной величины площади учитываем также и *ориентацию* параллелограмма. На вещественной координатной плоскости  $\mathbb{R}^2$  упорядоченные пары векторов  $(a, b)$  геометрически отличаются друг от друга тем, в какую сторону происходит кратчайший поворот, совмещающий направление первого вектора с направлением второго. Те пары векторов, для которых такой поворот происходит против часовой стрелки, называются *положительно* ориентированными, а те, для которых по часовой стрелке — *отрицательно* ориентированными. Равенство  $s(-a, b) = -s(a, b)$  означает, что площадь меняет знак при смене ориентации параллелограмма на противоположную, как на рис. 1◊5.

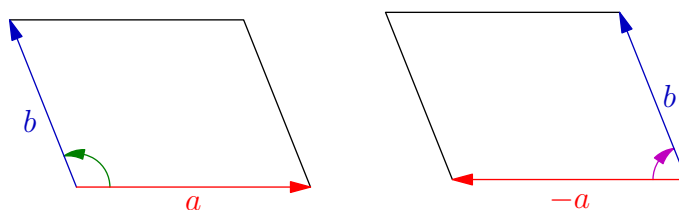


Рис. 1◊5. Смена ориентации при смене знака.

#### ЛЕММА 1.3

Каждая функция площади  $s : V \times V \rightarrow \mathbb{k}$  обращается в нуль на парах пропорциональных векторов<sup>2</sup>, знакопеременна:  $s(a, b) = -s(b, a)$  и аддитивна:

$$s(a, b + c) = s(a, b) + s(a, c) \quad \forall a, b, c \in \mathbb{k}^2. \quad (1-9)$$

Доказательство. Первые два свойства вытекают прямо из (1-7) и (1-8):

$$\begin{aligned} s(\lambda v, v) &= s(0 + \lambda v, v) = s(0, v) = s(0 \cdot 0, v) = 0 \cdot s(0, v) = 0, \\ s(a, b) &= s(a, a + b) = s(a - (a + b), a + b) = s(-b, a + b) = -s(b, a + b) = -s(b, a). \end{aligned}$$

Докажем аддитивность. Если вектор  $a$  пропорционален и вектору  $b$ , и вектору  $c$ , то он пропорционален и их сумме  $b + c$ . В этом случае все три площади в (1-9) зануляются. Если вектор  $a$  не пропорционален, скажем, вектору  $b$ , то  $a$  и  $b$  составляют базис, и  $c = \alpha a + \beta b$  для некоторых  $\alpha, \beta \in \mathbb{k}$ . В этом случае левая и правая части (1-9) тоже равны друг другу:

$$\begin{aligned} s(a, b + c) &= s(a, b + \alpha a + \beta b) = s(a, (1 + \beta)b) = (1 + \beta)s(a, b), \\ s(a, b) + s(a, c) &= s(a, b) + s(a, \alpha a + \beta b) = s(a, b) + s(a, \beta b) = \\ &= s(a, b) + \beta s(a, b) = (1 + \beta)s(a, b). \end{aligned}$$

□

<sup>1</sup>Что значительно упрощает вычисления и делает их осмысленными над любым полем  $\mathbb{k}$ .

<sup>2</sup>В частности, когда один из векторов нулевой или когда два вектора совпадают друг с другом. Свойство  $s(a, a) = 0$  называют *кососимметричностью*, см. упр. 1.5 ниже.

УПРАЖНЕНИЕ 1.5 (КОСОСИММЕТРИЧНОСТЬ И ЗНАКОПЕРЕМЕННОСТЬ). Функция от двух аргументов  $f : V \times V \rightarrow \mathbb{k}$  называется *кососимметричной*, если  $f(v, v) = 0$  для всех  $v \in V$ . Убедитесь, что всякая билинейная кососимметричная функция знакопеременна, а когда  $1 \neq -1$  в поле  $\mathbb{k}$ , то и наоборот, все знакопеременные функции кососимметричны.

ТЕОРЕМА 1.1

На координатном векторном пространстве  $\mathbb{k}^2$  имеется единственная с точностью до пропорциональности ненулевая функция площади. Она имеет вид  $s(a, b) = c \cdot \det(a, b)$ , где константа  $c = s(e_1, e_2)$  равна площади стандартного базисного параллелограмма на векторах

$$e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{и} \quad e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Доказательство. В силу аддитивности, однородности и знакопеременности функции  $s(a, b)$  для любой пары векторов  $a = \alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2$  и  $b = \beta_1 e_1 + \beta_2 e_2$  выполняются равенства

$$s(a, b) = s(\alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2, \beta_1 e_1 + \beta_2 e_2) = (\alpha_1 \beta_2 - \alpha_2 \beta_1) s(e_1, e_2) = \det(a, b) \cdot s(e_1, e_2). \quad (1-10)$$

Поэтому все функции площади пропорциональны определителю. С другой стороны, из свойств определителя (1-2) – (1-5) вытекает, что при любом  $\lambda \in \mathbb{k}$  функция  $s(a, b) = c \cdot \det(a, b)$  удовлетворяет соотношениям (1-7), (1-8) и при  $\lambda \neq 0$  является ненулевой.  $\square$

СЛЕДСТВИЕ 1.2

На любом двумерном векторном пространстве  $V$  имеется единственная с точностью до пропорциональности ненулевая функция площади. Если векторы  $e = (e_1, e_2)$  образуют в  $V$  базис, а векторы  $a = \alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2$  и  $b = \beta_1 e_1 + \beta_2 e_2$  произвольны, то<sup>1</sup>

$$s(a, b)/s(e_1, e_2) = \det_e(a, b) = \alpha_1 \beta_2 - \alpha_2 \beta_1$$

для любой ненулевой функции площади  $s$  на пространстве  $V$ .  $\square$

СЛЕДСТВИЕ 1.3

Координаты вектора  $v = ax + by$  в любом базисе  $(a, b)$  двумерного векторного пространства  $V$  равны отношениям площадей  $x = s(v, b)/s(a, b)$ ,  $y = s(a, v)/s(a, b)$ .  $\square$

**1.4. Аффинные<sup>2</sup> пространства.** Множество  $\mathbb{A}$  называется *аффинным пространством* над векторным пространством  $V$ , если каждой упорядоченной паре точек  $a, b \in \mathbb{A}$  сопоставлен вектор  $\overline{ab} \in V$  так, что для любой точки  $p \in \mathbb{A}$  отображение *векторизации с центром в  $p$*

$$v_p : \mathbb{A} \rightarrow V, \quad q \mapsto \overline{pq},$$

взаимно однозначно, и для любых трёх (не обязательно различных) точек  $a, b, c \in \mathbb{A}$  выполняется *правило треугольника*  $\overline{ab} + \overline{bc} = \overline{ac}$ .

<sup>1</sup>Здесь и далее мы обозначаем через  $\det_e(a, b)$  определитель матрицы, образованной столбцами координат векторов  $a, b$  в базисе  $e$ .

<sup>2</sup>Термин *аффинный* не должен вызывать «греческих» реминисценций — это банальная калька с английского *affine* (ассоциированный).

Иначе можно сказать, что с каждым вектором  $v \in V$  связано преобразование сдвига<sup>1</sup>

$$\tau_v: \mathbb{A} \rightarrow \mathbb{A}, \quad p \mapsto p + v,$$

со следующими двумя свойствами: для каждой пары точек  $p, q \in \mathbb{A}$  имеется единственный такой вектор  $v \in V$ , что  $p + v = q$ , и для любых векторов  $u, w \in V$  выполняется равенство

$$\tau_u \circ \tau_v = \tau_{u+w}.$$

Второе описание эквивалентно первому: вектор  $v \in V$  со свойством  $p + v = q$ , о котором идёт речь во втором определении, это вектор  $\overline{pq}$  из первого определения, а правило треугольника из первого определения означает равенство  $\tau_u \circ \tau_v = \tau_{u+w}$  во втором.

УПРАЖНЕНИЕ 1.6. Убедитесь в этом и выведите из определений, что: а)  $\overline{aa} = 0$  для всех точек  $a \in \mathbb{A}$  б)  $\overline{pq} = -\overline{qp}$  для всех точек  $p, q \in \mathbb{A}$  в)  $\overline{ab} = \overline{dc} \Leftrightarrow \overline{bc} = \overline{ad}$  для любой четвёрки точек  $a, b, c, d \in \mathbb{A}$ .

ПРИМЕР 1.5 (Аффинная координатная плоскость  $\mathbb{A}^2$ )

Множество  $\mathbb{A}^2 = \mathbb{A}^2(\mathbb{k})$ , точками которого являются пары чисел  $p = (p_1, p_2)$  из поля  $\mathbb{k}$  и точкам  $p, q$  сопоставляется вектор  $\overline{pq} = q - p = (q_1 - p_1, q_2 - p_2)$  очевидно удовлетворяет предыдущим определениям. Оно называется *аффинной координатной плоскостью* над полем  $\mathbb{k}$ .

ПРИМЕР 1.6 (Приведённые квадратные трёхчлены)

Пространство  $\mathcal{P}_2$ , точками которого являются приведённые<sup>2</sup> квадратные трёхчлены

$$p(x) = x^2 + p_1x + p_2 \in \mathbb{k}[x],$$

не является векторным пространством, поскольку сумма приведённых многочленов и произведение приведённого многочлена на число не являются приведёнными многочленами. Однако разности  $q - p = (q_1 - p_1)x + (q_2 - p_2)$  приведённых трёхчленов  $q = x^2 + q_1x + q_2$  и  $p = x^2 + p_1x + p_2$  образуют векторное пространство  $V = \mathbb{k}[x]_{\leq 1}$  многочленов степени  $\leq 1$ , и при произвольно зафиксированном многочлене  $p$  сопоставление  $q \mapsto \overline{pq} \stackrel{\text{def}}{=} (q_1 - p_1, q_2 - p_2)$  устанавливает биекцию между  $\mathcal{P}_2$  и  $V$ , удовлетворяющую предыдущим определениям. Поэтому пространство  $\mathcal{P}_2$  является аффинной плоскостью над пространством многочленов степени  $\leq 1$ .

ПРИМЕР 1.7 (Аффинизация векторного пространства)

Из каждого векторного пространства  $V$  можно изготовить аффинное пространство  $\mathbb{A}(V)$ , называемое *аффинизацией* векторного пространства  $V$ . Точками пространства  $\mathbb{A}(V)$  по определению являются векторы из  $V$ . В пространстве  $\mathbb{A}(V)$  имеется выделенная точка  $0$ , отвечающая нулевому вектору, а все остальные точки продуктивно воспринимать как «концы» всевозможных «радиус-векторов»  $v \in V$ , отложенных от нулевой точки. Сдвиг  $\tau_v: \mathbb{A}(V) \rightarrow \mathbb{A}(V)$  переводит точку  $a$ , отвечающую радиус-вектору  $a \in V$ , в точку  $a + v$ , отвечающую радиус-вектору  $a + v$ .

<sup>1</sup>Или *откладывание вектора  $v$  от точек  $A \in \mathbb{A}$* .

<sup>2</sup>Т. е. со старшим коэффициентом 1.



**1.4.1. Аффинная система координат** на аффинной плоскости  $\mathbb{A}^2$  по определению состоит из произвольно взятой точки  $o \in \mathbb{A}^2$  и базиса  $e_1, e_2$  в векторном пространстве  $V$ . Тройку  $(o; e_1, e_2)$  также называют *координатным репером* с началом в  $o$  и базисом  $e_1, e_2$ . Каждый координатный репер устанавливает биекцию между точками плоскости  $\mathbb{A}^2$  и парами чисел, сопоставляющую точке  $p \in \mathbb{A}^2$  координаты вектора  $\overrightarrow{op}$  в базисе  $e_1, e_2$ . Эти координаты называются *аффинными координатами* точки  $p$  относительно репера  $(o; e_1, e_2)$ .

**Упражнение 1.7.** Убедитесь, что столбец координат вектора  $\overrightarrow{pq}$  в произвольном базисе  $(e_1, e_2)$  пространства  $\mathbb{k}^2$  равен разности  $q - p$  столбцов координат точек  $q, p \in \mathbb{A}(\mathbb{k}^2)$  относительно любого репера  $(o; e_1, e_2)$  на аффинной плоскости  $\mathbb{A}(\mathbb{k}^2)$  вне зависимости от выбора начальной точки  $o$  этого репера.

Так, в **прим. 1.6** коэффициенты  $(p_1, p_2)$  трёхчлена  $x^2 + p_1x + p_2 \in \mathcal{P}_2$  являются его координатами относительно репера  $(o; e_1, e_2)$  с начальной точкой  $o = x^2 \in \mathcal{P}_2$  и стандартным базисом  $e_1 = x, e_2 = 1$  в векторном пространстве  $\mathbb{k}[x]_{\leq 1}$ .

**1.4.2. Барицентры и барицентрические комбинации точек.** Для любого набора точек

$$p_1, p_2, \dots, p_m$$

в аффинном пространстве  $\mathbb{A}$  и любых чисел  $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_m \in \mathbb{k}$  с ненулевой суммой  $\mu = \sum \mu_i \neq 0$  существует единственная точка  $c \in \mathbb{A}$ , такая что

$$\mu_1 \overrightarrow{cp_1} + \mu_2 \overrightarrow{cp_2} + \dots + \mu_m \overrightarrow{cp_m} = 0. \quad (1-11)$$

В самом деле, задавшись произвольной начальной точкой  $o \in \mathbb{A}$ , мы можем для произвольной точки  $c \in \mathbb{A}$  записать сумму из левой части (1-11), как

$$\sum \mu_i \overrightarrow{cp_i} = \sum \mu_i (\overrightarrow{op_i} - \overrightarrow{oc}) = -\mu \overrightarrow{oc} + \sum \mu_i \overrightarrow{op_i}.$$

Поэтому соотношение (1-11) выполняется для единственной точки  $c$  с радиус вектором

$$\overrightarrow{oc} = \sum_{i=1}^m \frac{\mu_i}{\mu} \cdot \overrightarrow{op_i}. \quad (1-12)$$

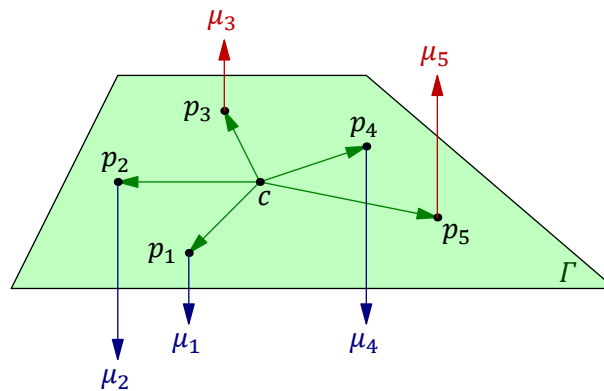


Рис. 1◊6. Моменты сил.

Эта точка называется *центром тяжести* или *барицентром* точек  $p_i$  с весами  $\mu_i$ . Термин пришёл из механики: если поместить аффинное пространство  $\mathbb{A}$  в пространство на единицу большей размерности в качестве горизонтальной гиперплоскости  $\Gamma$ , как на рис. 1◊6, и приложить к

каждой точке  $p_i$  силу  $\mu_i$ , направленную перпендикулярно вниз при  $\mu > 0$ , и вверх при  $\mu < 0$ , то равенство (1-11) будет означать равенство нулю суммы моментов всех этих сил относительно точки  $c$ . Если оно выполняется, плоскость  $\Gamma$  останется неподвижной, удерживаемая ровно за одну точку  $c$ . Так как по предыдущему точка  $c$  однозначно определяется соотношением (1-11), в котором точка  $o$  никак не участвует, точка

$$o + \overline{oc} = o + \sum_{i=1}^m \frac{\mu_i}{\mu} \cdot \overline{op}_i$$

не зависит от выбора точки  $o$ . Поэтому для любого набора точек  $p_1, p_2, \dots, p_m$  и любых констант  $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_m$  с суммой  $\sum \mu_i = 1$ , точка

$$\mu_1 p_1 + \mu_2 p_2 + \dots + \mu_m p_m \stackrel{\text{def}}{=} o + \sum_{i=1}^m \mu_i \cdot \overline{op}_i \quad (1-13)$$

не зависит от выбора начальной точки  $o$ , что и оправдывает обозначение, использованное в левой части (1-13). Точка (1-13) называется *барицентрической комбинацией* точек  $p_1, p_2, \dots, p_m$  с весами  $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_m$ .

**УПРАЖНЕНИЕ 1.8 (группирование масс).** Пусть набор точек  $p_i$  с весами  $\mu_i$  и набор точек  $q_j$  с весами  $\nu_j$  имеют центры тяжести в точках  $p$  и  $q$ , причём обе суммы весов:  $\mu = \sum \mu_i$  и  $\nu = \sum \nu_j$ , а также их сумма  $\mu + \nu$  ненулевые. Убедитесь, что центр тяжести объединения всех точек<sup>1</sup>  $p_i$  и  $q_j$  совпадает с центром тяжести точек  $p$  и  $q$ , взятых с весами  $\mu$  и  $\nu$ . Убедитесь также, что любая барицентрическая комбинация  $\sum_i y_i p_i$  точек  $p_i$ ,  $1 \leq i \leq m$ , каждая из которых в свою очередь является барицентрической комбинацией  $p_i = \sum_j x_{ij} q_{ij}$  каких-то ещё точек  $q_{ij}$ ,  $1 \leq j \leq k_i$ , тоже представляется в виде барицентрической комбинации  $\sum_{ij} z_{ij} q_{ij}$  тех же точек  $q_{ij}$ , причём если все  $y_i \geq 0$  и все  $x_{ij} \geq 0$ , то и все  $z_{ij} \geq 0$ .

**1.5. Прямые.** Три точки  $a, b, p$  аффинного пространства называются *коллинеарными*, если векторы  $\overline{pa}$  и  $\overline{pb}$  пропорциональны. Например, это так, когда какие-то две из трёх точек совпадают друг с другом. Если  $a \neq b$  пропорциональность векторов  $\overline{pa}$  и  $\overline{pb}$  означает, что при некоторых  $\alpha, \beta \in \mathbb{k}$ , не обращающихся одновременно в нуль, выполняются равносильные друг другу равенства

$$\beta \cdot \overline{pa} + \alpha \cdot \overline{pb} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad p = \frac{\beta}{\alpha + \beta} \cdot a + \frac{\alpha}{\alpha + \beta} \cdot b.$$

В этом случае говорят, что точка  $p$  *делит* точки  $a$  и  $b$  в отношении  $\alpha : \beta$ . Иначе можно сказать, что точка  $p$  является барицентрической комбинацией точек  $a$  и  $b$  с весами  $\beta/(\alpha + \beta)$  и  $\alpha/(\alpha + \beta)$  соответственно. Каждая точка

$$p = o + \frac{\beta}{\alpha + \beta} \cdot \overline{oa} + \frac{\alpha}{\alpha + \beta} \cdot \overline{ob} = a + \frac{\alpha}{\alpha + \beta} \cdot \overline{ab} = b + \frac{\beta}{\alpha + \beta} \cdot \overline{ba},$$

коллинеарная паре различных точек  $a \neq b$ , однозначно определяется отношением  $\alpha : \beta$ , которое может принимать любые значения, отличные от  $-1$ , ибо  $\alpha = -\beta$  означает, что  $\overline{pa} = \overline{pb}$ , т. е.  $a = b$ . При этом значения

$$\alpha : \beta = 0 : 1 = 0 \quad \text{и} \quad \alpha : \beta = 1 : 0 = \infty$$

<sup>1</sup>Если какая-то из точек  $p_i$  совпадает с некоторой точкой  $q_j$ , то их «объединение» заключается в сложении весов.

допустимы и отвечают точкам  $p = a$  и  $p = b$  соответственно. Равновесный барицентр<sup>1</sup>

$$c = \frac{a + b}{2},$$

делящий  $a$  и  $b$  в отношении  $1 : 1$ , называется *серединой* или *центром* точек  $a \neq b$ .

Множество всех точек  $x$ , коллинеарных двум заданным различным точкам  $a \neq b$ , называется *прямой* и обозначается

$$(ab) \stackrel{\text{def}}{=} \{x = \alpha a + \beta b \mid \alpha, \beta \in \mathbb{k}, \alpha + \beta = 1\}$$

Иначе прямую  $(ab)$  в аффинном пространстве  $\mathbb{A}$  над векторным пространством  $V$  можно описать как ГМТ вида  $x = a + vt$ , где  $t$  пробегает основное поле  $\mathbb{k}$ , а  $p \in \mathbb{A}$  и  $v \in V$  суть фиксированные точка и ненулевой вектор, называемые *начальной точкой* и *направляющим вектором* или *вектором скорости* прямой  $(ab)$ .

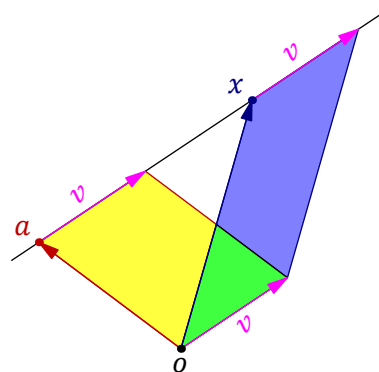


Рис. 1◊7. Уравнение прямой.

Предложение 1.1

На аффинной плоскости проходящая через точку  $a = (a_1, a_2)$  прямая с вектором скорости  $v = (v_1, v_2)$  описывается в координатах  $(x_1, x_2)$  относительно произвольного репера уравнением

$$\det(x, v) = \det(a, v) \quad \text{или} \quad v_2 x_1 - v_1 x_2 = v_2 a_1 - v_1 a_2. \quad (1-14)$$

Наоборот, множество всех решений  $x = (x_1, x_2)$  любого уравнения  $\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 = \beta$  с не равными одновременно нулю коэффициентами  $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{k}$  представляет собою прямую с вектором скорости, пропорциональным вектору  $v = (\alpha_2, -\alpha_1)$ .

Доказательство. Обозначим начало координат через  $o$  и рассмотрим векторы  $\overrightarrow{ox} = (x_1, x_2)$  и  $\overrightarrow{oa} = (a_1, a_2)$ . Равенство  $\det(v, x) = \det(v, a)$  равносильно равенству  $0 = \det(v, \overrightarrow{ax}) = 0$ , означающему пропорциональность векторов  $\overrightarrow{ax}$  и  $v$ .  $\square$

Замечание 1.1. На геометрическом языке уравнение (1-14) констатирует равенство площадей жёлтого и синего параллелограммов на рис. 1◊7.

Упражнение 1.9. Напишите уравнение прямой, параллельной вектору  $(5, 2)$  и проходящей через точку  $(2, -3)$ , а также прямой, проходящей через точки  $(-3, 5)$  и  $(4, -1)$ , и нарисуйте на клетчатой бумаге прямые, заданные уравнениями  $3x_1 + 5x_2 = -1$  и  $2x_1 - 3x_2 = 5$ .

Пример 1.8 (пересечение прямых)

Если левые части уравнений  $\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 = \gamma$  и  $\beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 = \delta$  не пропорциональны, то решения  $x = (x_1, x_2)$  системы

$$\begin{cases} \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 = \gamma \\ \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 = \delta, \end{cases} \quad (1-15)$$

<sup>1</sup>Обратите внимание, что он существует над любым полем  $\mathbb{k}$ , в котором  $2 \stackrel{\text{def}}{=} 1 + 1 \neq 0$ . Если основное поле  $\mathbb{k}$  имеет характеристику  $\text{char}(\mathbb{k}) = 2$ , т. е.  $1 + 1 = 0$  в  $\mathbb{k}$ , то середина не определена.

суть координаты вектора  $\begin{pmatrix} \gamma \\ \delta \end{pmatrix}$  в координатном пространстве  $\mathbb{k}^2$  относительно базиса из векторов  $e_1 = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \beta_1 \end{pmatrix}$  и  $e_2 = \begin{pmatrix} \alpha_2 \\ \beta_2 \end{pmatrix}$ . По правилу Крамера<sup>1</sup> они равны

$$x_1 = \det \begin{pmatrix} \gamma & \alpha_2 \\ \delta & \beta_2 \end{pmatrix} : \det \begin{pmatrix} \alpha_1 & \beta_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 \end{pmatrix}, \quad x_2 = \det \begin{pmatrix} \alpha_1 & \gamma \\ \beta_1 & \delta \end{pmatrix} : \det \begin{pmatrix} \alpha_1 & \beta_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 \end{pmatrix}. \quad (1-16)$$

Таким образом, прямые с непропорциональными скоростями пересекаются в единственной точке, координаты которой выражаются через коэффициенты задающих эти прямые уравнений (1-15) по формулам (1-16). Например, прямые  $3x_1 + 5x_2 = -1$  и  $2x_1 - 3x_2 = 5$  из упр. 1.9 пересекаются в точке с координатами  $x_1 = 22/19$ ,  $x_2 = -17/19$ .

Если же левые части уравнений (1-15) пропорциональны, скажем:  $\beta_1 = \lambda\alpha_1$  и  $\beta_2 = \lambda\alpha_2$ , то при  $\delta \neq \lambda\gamma$  задаваемые этими уравнениями прямые параллельны, а при  $\delta = \lambda\gamma$  они совпадают друг с другом.

Таким образом, на аффинной плоскости  $\mathbb{A}^2$  над произвольным полем  $\mathbb{k}$  выполняются евклидовы аксиомы, описывающие взаимное расположение прямых и точек на плоскости, т. е. справедливо

#### Предложение 1.2

Через любые две различные точки аффинной плоскости проходит ровно одна прямая. Через любую точку, не лежащую на произвольно заданной прямой  $\ell$ , проходит ровно одна прямая, не пересекающая прямую  $\ell$ .  $\square$

**1.6. Треугольники.** В этом разделе мы предполагаем, что  $2 \stackrel{\text{def}}{=} 1 + 1 \neq 0$  в поле  $\mathbb{k}$ . Фигура, образованная на аффинной плоскости тремя неколлинеарными точками  $a, b, c$  и соединяющими их прямыми  $(ab), (bc), (ca)$ , называется *треугольником*  $\Delta abc$ . Зафиксируем какую-нибудь ненулевую функцию площади  $s$  и назовём *площадью ориентированного треугольника*  $\Delta abc$  половину площади ориентированного параллелограмма, натянутого на упорядоченную пару векторов  $\overline{ab}, \overline{ac}$ :

$$s(abc) \stackrel{\text{def}}{=} s(\overline{ab}, \overline{ac})/2. \quad (1-17)$$

#### Предложение 1.3

Для любого треугольника  $\Delta abc$  и любой точки  $p$  выполняются соотношения:

$$s(abc) = s(bca) = s(cab) = -s(bac) = -s(acb) = -s(cba) \quad (1-18)$$

$$s(abc) = s(pab) + s(pbc) + s(pca). \quad (1-19)$$

*Доказательство.* Для доказательства соотношений (1-18) достаточно проверить равенства

$$s(bca) = s(abc) \quad \text{и} \quad s(bac) = -s(abc),$$

которые вытекают из билинейности и кососимметричности площади параллелограмма:

$$\begin{aligned} 2s(bca) &= s(\overline{bc}, \overline{ba}) = s(\overline{ba} + \overline{ac}, \overline{ba}) = s(\overline{ac}, \overline{ba}) = s(\overline{ab}, \overline{ac}) = 2s(abc) \\ 2s(bac) &= s(\overline{ba}, \overline{bc}) = s(\overline{ba}, \overline{ba} + \overline{ac}) = s(\overline{ba}, \overline{ac}) = -s(\overline{ab}, \overline{ac}) = -2s(abc). \end{aligned}$$

<sup>1</sup>См. лем. 1.2 на стр. 13.

Равенство (1-19) проверяется примерно так же:

$$\begin{aligned} 2s(abc) &= s(\overline{ab}, \overline{ac}) = s(\overline{ap} + \overline{pb}, \overline{ap} + \overline{pc}) = s(\overline{ap}, \overline{pc}) + s(\overline{pb}, \overline{ap}) + s(\overline{pb}, \overline{pc}) = \\ &= s(\overline{pc}, \overline{pa}) + s(\overline{pa}, \overline{pb}) + s(\overline{pb}, \overline{pc}) = 2(s(pab) + s(pbc) + s(pca)) \end{aligned}$$

□

Пример 1.9 (площади ориентированных многоугольников)

Над полем  $\mathbb{k} = \mathbb{R}$  формула (1-18) имеет следующее наглядное описание. Будем называть *ориентацией* треугольника выбор одного из двух возможных направлений обхода его контура. Обход против часовой стрелки, при котором треугольник остаётся слева по ходу движения, считается положительным, и площади таких треугольников положительны. Площади треугольников, обходимых по часовой стрелке отрицательны. Ориентация треугольников согласована с обсуждавшейся на 14 ориентацией параллелограммов: если выпустить из вершины треугольника два вектора по его сторонам, то ориентация натянутого на них параллелограмма совпадает с той ориентацией контура треугольника, что задаётся движением от конца первого вектора к концу второго по противоположащему выбранной вершине основанию, см. рис. 1◊8.

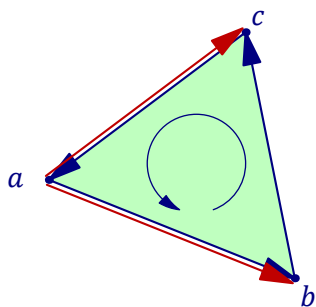


Рис. 1◊8.  $2s(abc) = \det(\overline{ab}, \overline{ac})$ .

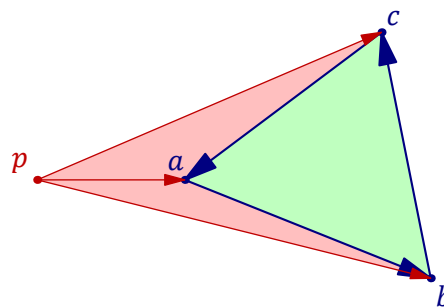


Рис. 1◊9.

$$s(abc) = S(pab) + S(pbc) + S(pca).$$

При таких договорённостях об ориентации, формула (1-19) утверждает, что площадь ориентированного треугольника  $abc$  можно вычислять обходя его контур против часовой стрелки и складывая площади опирающихся на его стороны треугольников с вершиной в произвольно зафиксированной точке  $p$ , при этом исходящие из  $p$  векторы, используемые для вычисления площадей, всегда упорядочиваются по ходу движения. Так на рис. 1◊9 площадь  $\Delta pbc$  войдёт в сумму со знаком плюс, а площади  $\Delta pab$  и  $\Delta pac$  — с минусами, что и даст площадь  $\Delta abc$ .

Полученная формула очевидным образом обобщается на произвольную, возможно даже самопересекающуюся, как на рис. 1◊10, замкнутую ломаную  $q_0q_1 \dots q_m$ , у которой  $q_m = q_0$ . Обходя контур ломаной против часовой стрелки и складывая площади опирающихся на её звенья треугольников с вершиной в произвольно заданной точке  $p$ , мы получим сумму

$$\sum_{i=0}^{m-1} s(pq_iq_{i+1}) = \frac{1}{2} \sum_{i=0}^{m-1} \det(\overline{pq}_i, \overline{pq}_{i+1})$$

равную сумме взятых с надлежащими знаками площадей многоугольников, ограничиваемых этой ломаной. А именно, многоугольники контур которых обходится против часовой стрелки<sup>1</sup>,

<sup>1</sup>Т. е. многоугольники, лежащие слева по ходу движения вдоль ломаной.

надлежит учитывать со знаком плюс, а многоугольники, обходимые по часовой стрелке<sup>1</sup> — со знаком минус.

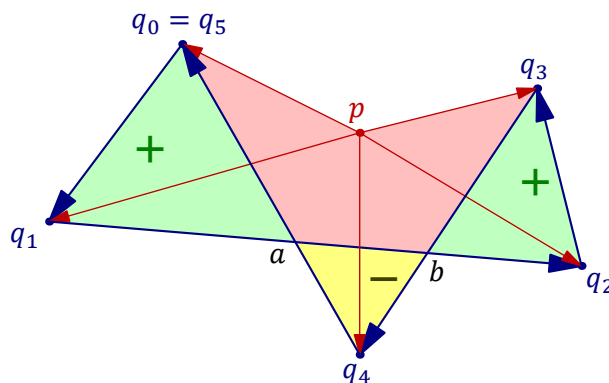


Рис. 1◊10.  $\sum_{i=0}^4 s(pq_iq_{i+1}) = s(q_0q_1a) - s(baq_4) + s(bq_2q_3)$ .

УПРАЖНЕНИЕ 1.10. Покажите, ориентированные площади треугольников с общей вершиной и лежащими на одной прямой основаниями относятся как эти ориентированные основания, т. е. для любых трёх коллинеарных точек  $a, b, c$  и произвольной точки  $p$  выполняется равенство  $s(pab) : s(pbc) = \overline{ab} : \overline{bc}$ , где справа стоит такое число  $\lambda \in \mathbb{k}$ , что  $\lambda \cdot \overline{bc} = \overline{ab}$ .

**1.6.1. Барицентрические координаты.** Зафиксируем на плоскости какой-нибудь треугольник  $\Delta abc$  и сопоставим каждой тройке чисел  $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{k}$  с суммой  $\alpha + \beta + \gamma = 1$  точку

$$p = \alpha \cdot a + \beta \cdot b + \gamma \cdot c.$$

Покажем, что это сопоставление устанавливает биекцию между такого рода тройками чисел и точками плоскости. Равенство  $p = \alpha \cdot a + \beta \cdot b + \gamma \cdot c$  означает, что  $\overline{ap} = \beta \cdot \overline{ab} + \gamma \cdot \overline{ac}$ , т. е. числа  $\beta, \gamma$  являются координатами вектора  $\overline{ap}$  в базисе  $\overline{ab}, \overline{ac}$ . Так как пары координат биективно соответствуют векторам, а векторы  $\overline{ap}$  — точкам  $p$ , мы имеем биекцию между точками  $p$  и произвольными парами чисел  $(\beta, \gamma)$ . Но такие пары биективно соответствуют тройкам  $(\alpha, \beta, \gamma) = (1 - \beta - \gamma, \beta, \gamma)$ . Числа  $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{k}$  с суммой  $\alpha + \beta + \gamma = 1$  называются *барицентрическими координатами* точки  $p = \alpha \cdot a + \beta \cdot b + \gamma \cdot c$  относительно  $\Delta abc$ . Использование тройки чисел  $\alpha, \beta, \gamma$ , связанных соотношением  $\alpha + \beta + \gamma = 1$ , вместо пары чисел  $\beta, \gamma$  часто оказывается более удобным, поскольку не привязано к выбору той или иной вершины в треугольнике, что позволяет видеть и использовать имеющиеся в задаче симметрии.

ПРИМЕР 1.10 (БАРИЦЕНТРИЧЕСКИЕ КООРДИНАТЫ КАК ОТНОШЕНИЯ ПЛОЩАДЕЙ)

Согласно правилу Крамера<sup>2</sup>, разложение произвольного вектора  $\overline{ap} \in V$  по базису  $\overline{ab}, \overline{ac}$  имеет вид

$$\overline{ap} = \frac{s(\overline{ap}, \overline{ac})}{s(\overline{ab}, \overline{ac})} \cdot \overline{ab} + \frac{s(\overline{ab}, \overline{ap})}{s(\overline{ab}, \overline{ac})} \cdot \overline{ac} = \frac{s(apc)}{s(abc)} \cdot \overline{ab} + \frac{s(abp)}{s(abc)} \cdot \overline{ac},$$

откуда  $s(abc) \cdot \overline{pa} + s(apc) \cdot \overline{ab} + s(abp) \cdot \overline{ac} = 0$ . Подставляя  $s(abc) = s(pab) + s(pbc) + s(pca)$  и пользуясь равенствами  $s(pab) = s(abp)$ ,  $s(pca) = s(apc)$  и  $\overline{pa} + \overline{ab} = \overline{pb}$ ,  $\overline{pa} + \overline{ac} = \overline{pc}$ ,

<sup>1</sup>Т. е. лежащие справа по ходу движения.

<sup>2</sup>См. сл. 1.3 на стр. 15.

получаем соотношение  $s(pbc) \cdot \overrightarrow{pa} + s(apc) \cdot \overrightarrow{pb} + s(abp) \cdot \overrightarrow{pc} = 0$ , которое означает, что барицентрическими координатами точки  $p$  относительно  $\Delta abc$  являются отношения площадей  $\alpha = s(pbc)/s(abc)$ ,  $\beta = s(apc)/s(abc)$ ,  $\gamma = s(abp)/s(abc)$ , т. е.

$$p = \frac{s(pbc)}{s(abc)} \cdot a + \frac{s(apc)}{s(abc)} \cdot b + \frac{s(abp)}{s(abc)} \cdot c. \quad (1-20)$$

ПРИМЕР 1.11 (ЦЕНТР ТРЕУГОЛЬНИКА)

Равновесный барицентр  $o = (a + b + c)/3$  вершин треугольника  $\Delta abc$  называется *центром* этого треугольника. Согласно упр. 1.8 точка  $o$  является центром тяжести любой из вершин и середины противоположной ей стороны, взятой с весом 2. Таким образом,  $o$  является точкой пересечения медиан  $\Delta abc$  и делит каждую из них в отношении 2 : 1, считая от вершины (см. рис. 1◊11). Из формулы (1-20) вытекает, что центр треугольника однозначно характеризуется как единственная точка  $o$ , для которой  $s(oab) = s(obc) = s(oca)$ .

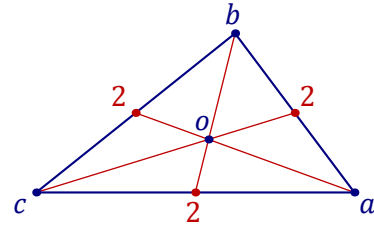


Рис. 1◊11. Центр треугольника.

## §2. Аффинные преобразования

**2.1. Аффинные отображения.** Отображение  $\varphi : \mathbb{A}(U) \rightarrow \mathbb{A}(W)$  между аффинными пространствами, ассоциированными с векторными пространствами  $U, W$ , называется *аффинным*, если найдётся такая точка  $o \in \mathbb{A}(U)$ , что отображение между векторными пространствами

$$D_\varphi : U \rightarrow W, \quad \overrightarrow{op} \mapsto \overline{\varphi(o)\varphi(p)} \quad (2-1)$$

линейно, т. е.  $D_\varphi(\alpha\overrightarrow{oa} + \beta\overrightarrow{ob}) = \alpha D_\varphi(\overrightarrow{oa}) + \beta D_\varphi(\overrightarrow{ob})$  для любых  $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$  и  $a, b \in \mathbb{A}(U)$ .

ЛЕММА 2.1

Если отображение  $\varphi : \mathbb{A}(U) \rightarrow \mathbb{A}(W)$  аффинно, то отображение (2-1) линейно для каждой точки  $o \in \mathbb{A}(U)$  и не зависит от выбора этой точки.

Доказательство. Если построенное по некоторой точке  $o \in \mathbb{A}(U)$  отображение  $D_\varphi$  из формулы (2-1) линейно, то для любой точки  $p \in \mathbb{A}(U)$  и любого вектора  $\overrightarrow{pq} = \overrightarrow{oq} - \overrightarrow{op} \in U$  выполняется равенство

$$D_\varphi(\overrightarrow{pq}) = D_\varphi(\overrightarrow{oq}) - D_\varphi(\overrightarrow{op}) = \overline{\varphi(o)\varphi(q)} - \overline{\varphi(o)\varphi(p)} = \overline{\varphi(p)\varphi(q)}.$$

Тем самым,  $D_\varphi(\overrightarrow{pq}) = \overline{\varphi(p)\varphi(q)}$  для всех  $p, q \in \mathbb{A}(U)$ , т. е. при замене точки  $o$  на точку  $p$  мы получим то же самое отображение  $D_\varphi : U \rightarrow W$ , что и в точке  $o$ .  $\square$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.1

Отображение  $\varphi : \mathbb{A}(U) \rightarrow \mathbb{A}(W)$  аффинно тогда и только тогда, когда оно переводит барицентрические комбинации точек в барицентрические комбинации их образов с теми же весами, т. е.  $\varphi(\mu_1 p_1 + \mu_2 p_2 + \dots + \mu_m p_m) = \mu_1 \cdot \varphi(p_1) + \mu_2 \cdot \varphi(p_2) + \dots + \mu_m \cdot \varphi(p_m)$  для любых  $p_1, p_2, \dots, p_m \in \mathbb{A}(U)$  и любых  $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_m \in \mathbb{K}$  с  $\sum \mu_i = 1$ .

Доказательство. Если отображение  $\varphi : \mathbb{A}(U) \rightarrow \mathbb{A}(W)$  аффинно, то при любом выборе начальной точки  $o$  и любых весах  $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_m \in \mathbb{K}$  с  $\sum \mu_i = 1$

$$\begin{aligned} \varphi(\mu_1 p_1 + \mu_2 p_2 + \dots + \mu_m p_m) &= \varphi(o + \mu_1 \overrightarrow{op_1} + \mu_2 \overrightarrow{op_2} + \dots + \mu_m \overrightarrow{op_m}) = \\ &= \varphi(o) + D_\varphi(\mu_1 \overrightarrow{op_1} + \mu_2 \overrightarrow{op_2} + \dots + \mu_m \overrightarrow{op_m}) = \\ &= \varphi(o) + \mu_1 \cdot D_\varphi(\overrightarrow{op_1}) + \mu_2 \cdot D_\varphi(\overrightarrow{op_2}) + \dots + \mu_m \cdot D_\varphi(\overrightarrow{op_m}) = \\ &= \mu_1 \cdot (\varphi(o) + D_\varphi(\overrightarrow{op_1})) + \dots + \mu_m \cdot (\varphi(o) + D_\varphi(\overrightarrow{op_m})) = \\ &= \mu_1 \cdot \varphi(p_1) + \mu_2 \cdot \varphi(p_2) + \dots + \mu_m \cdot \varphi(p_m). \end{aligned}$$

Наоборот, пусть отображение  $\varphi : \mathbb{A}(U) \rightarrow \mathbb{A}(W)$  сохраняет барицентрические комбинации. Тогда при любом выборе начальной точки  $o$  для всех точек  $p, q \in \mathbb{A}(U)$  и чисел  $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$  точка

$$r = o + \lambda \cdot \overrightarrow{op} + \mu \cdot \overrightarrow{oq} = (1 - \lambda - \mu)o + \lambda p + \mu q$$

перейдёт в точку  $\varphi(r) = (1 - \lambda - \mu)\varphi(o) + \lambda\varphi(p) + \mu\varphi(q) = \varphi(o) + \lambda \overline{\varphi(o)\varphi(p)} + \mu \overline{\varphi(o)\varphi(q)}$ . Зафиксируем точку  $o$  и определим отображение  $D_\varphi : U \rightarrow W$  правилом  $D_\varphi(\overrightarrow{or}) = \overline{\varphi(o)\varphi(r)}$ . Тогда для любой точки  $r$  получаем  $\varphi(r) = \varphi(o) + D_\varphi(\overrightarrow{or})$ , а для всех векторов  $\overrightarrow{op}, \overrightarrow{oq} \in U$  и чисел  $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$  имеем равенство

$$D_\varphi(\lambda \overrightarrow{op} + \mu \overrightarrow{oq}) = D_\varphi(\overrightarrow{or}) = \overline{\varphi(o)\varphi(r)} = \lambda \overline{\varphi(o)\varphi(p)} + \mu \overline{\varphi(o)\varphi(q)} = \lambda D_\varphi(\overrightarrow{op}) + \mu D_\varphi(\overrightarrow{oq}),$$

означающее, что отображение  $D_\varphi : U \rightarrow W$  линейно.  $\square$



### 2.1.1. Дифференциал аффинного отображения. Линейное отображение

$$D_\varphi : U \rightarrow W, \quad \overline{p\vec{q}} \mapsto \overline{\varphi(p)\varphi(q)}$$

называется *дифференциалом* аффинного отображения  $\varphi : \mathbb{A}(U) \rightarrow \mathbb{A}(W)$ .

Если аффинные отображения  $\varphi, \psi : \mathbb{A}(U) \rightarrow \mathbb{A}(W)$  имеют одинаковый дифференциал, то для всех  $p, q \in \mathbb{A}(U)$  выполняется равенство  $\overline{\varphi(p)\varphi(q)} = D_\varphi(\overline{p\vec{q}}) = D_\psi(\overline{p\vec{q}}) = \overline{\psi(p)\psi(q)}$ . По упр. 1.6 на стр. 16 оно равносильно равенству  $\overline{\varphi(p)\psi(p)} = \overline{\varphi(q)\psi(q)}$ , т. е. вектор  $w = \overline{\varphi(p)\psi(p)}$  не зависит от выбора точки  $p \in \mathbb{A}(U)$ . Это означает, что  $\psi = \tau_w \circ \varphi$  является композицией отображения  $\varphi$  с последующим сдвигом  $\tau_w : \mathbb{A}(W) \rightarrow \mathbb{A}(W), p \mapsto p + w$ , на вектор  $w$ .

Предложение 2.2

Если отображения  $\varphi : \mathbb{A}(V) \rightarrow \mathbb{A}(W)$  и  $\psi : \mathbb{A}(U) \rightarrow \mathbb{A}(V)$  аффинны, то их композиция

$$\varphi \circ \psi : \mathbb{A}(U) \rightarrow \mathbb{A}(W), \quad x \mapsto \varphi(\psi(x)),$$

тоже аффинна и имеет дифференциал  $D_{\varphi \circ \psi} = D_\varphi \circ D_\psi$ .

Доказательство. Отображение  $D_{\varphi \circ \psi} : U \rightarrow W$ , переводящее вектор  $\overline{p\vec{q}} \in U$  в вектор

$$\overline{\varphi(\psi(p))\varphi(\psi(q))} = D_\varphi(\overline{\psi(p)\psi(q)}) = D_\varphi(D_\psi(\overline{p\vec{q}})) \in W,$$

является композицией  $D_\varphi \circ D_\psi$  линейных отображений  $D_\varphi$  и  $D_\psi$ . Поэтому оно тоже линейно: для любых  $a, b \in U$  и  $\alpha, \beta \in \mathbb{k}$  имеем равенства  $D_\varphi(D_\psi(\alpha a + \beta b)) = D_\varphi((\alpha D_\psi(a) + \beta D_\psi(b))) = \alpha D_\varphi(D_\psi(a)) + \beta D_\varphi(D_\psi(b))$ .  $\square$

**2.1.2. Запись линейных отображений в координатах.** Если в двумерном векторном пространстве  $V$  зафиксирован базис  $e_1, e_2$ , всякое линейное отображение  $\varphi : V \rightarrow V$  однозначно задаётся указанием образов базисных векторов  $f_1 = \varphi(e_1)$  и  $f_2 = \varphi(e_2)$ . Произвольный вектор  $v = e_1 x_1 + e_2 x_2$  переходит при этом в вектор

$$\varphi(v) = \varphi(e_1 \cdot x_1 + e_2 \cdot x_2) = \varphi(e_1) \cdot x_1 + \varphi(e_2) \cdot x_2 = f_1 \cdot x_1 + f_2 \cdot x_2. \quad (2-2)$$

Упражнение 2.1. Убедитесь, что при любом выборе векторов  $f_1, f_2 \in V$  формула (2-2) задаёт линейное отображение  $\varphi : V \rightarrow V$ .

Если векторы  $f_1$  и  $f_2$  имеют в базисе  $(e_1, e_2)$  координаты  $\begin{pmatrix} \varphi_{11} \\ \varphi_{21} \end{pmatrix}$  и  $\begin{pmatrix} \varphi_{12} \\ \varphi_{22} \end{pmatrix}$ , т. е.

$$f_1 = e_1 \cdot \varphi_{11} + e_2 \cdot \varphi_{21} \quad \text{и} \quad f_2 = e_1 \cdot \varphi_{12} + e_2 \cdot \varphi_{22}, \quad (2-3)$$

то по формуле (2-2) действие отображения  $\varphi$  на произвольный вектор  $v$  с координатами  $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$  задаётся правилом

$$\varphi : \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} \varphi_{11} \\ \varphi_{21} \end{pmatrix} \cdot x_1 + \begin{pmatrix} \varphi_{12} \\ \varphi_{22} \end{pmatrix} \cdot x_2 = \begin{pmatrix} \varphi_{11}x_1 + \varphi_{12}x_2 \\ \varphi_{21}x_1 + \varphi_{22}x_2 \end{pmatrix}, \quad (2-4)$$

которое принято сокращённо записывать как  $x \mapsto \Phi_e x$ , где

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \quad \Phi_e = \begin{pmatrix} \varphi_{11} & \varphi_{12} \\ \varphi_{21} & \varphi_{22} \end{pmatrix} \quad \text{и} \quad \Phi_e x = \begin{pmatrix} \varphi_{11} & \varphi_{12} \\ \varphi_{21} & \varphi_{22} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \stackrel{\text{def}}{=} \begin{pmatrix} \varphi_{11}x_1 + \varphi_{12}x_2 \\ \varphi_{21}x_1 + \varphi_{22}x_2 \end{pmatrix}.$$

При этом используются следующие соглашения: под произведением  $ab$  строки  $a$  на столбец  $b$ , высота которого равна ширине строки, понимается сумма произведений

$$(a_1, a_2, \dots, a_s) \cdot \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_s \end{pmatrix} \stackrel{\text{def}}{=} a_1 b_1 + a_2 b_2 + \dots + a_s b_s, \quad (2-5)$$

а под произведением  $P = AB$  таблицы  $A$  из  $m$  строк ширины  $s$  на таблицу  $B$  из  $n$  столбцов той же самой высоты  $s$  понимается таблица из  $m$  строк и  $n$  столбцов, у которой в пересечении  $i$ -той строки и  $j$ -того столбца стоит произведение  $i$ -той строки таблицы  $A$  на  $j$ -тый столбец таблицы  $B$ , вычисленное по формуле (2-5):

$$p_{ij} \stackrel{\text{def}}{=} (a_{i1}, a_{i2}, \dots, a_{is}) \cdot \begin{pmatrix} b_{1j} \\ b_{2j} \\ \vdots \\ b_{sj} \end{pmatrix} = \sum_{v=1}^s a_{iv} b_{vj}. \quad (2-6)$$

Таблицы из  $m$  строк и  $n$  столбцов принято называть *матрицами* размера  $m \times n$ . Матрица

$$\Phi_e = \begin{pmatrix} \varphi_{11} & \varphi_{12} \\ \varphi_{21} & \varphi_{22} \end{pmatrix}$$

называется *матрицей линейного отображения*  $\varphi$  в базисе  $e = (e_1, e_2)$ , а её определитель

$$\det \Phi_e = \det(f_1, f_2) = \varphi_{11}\varphi_{22} - \varphi_{12}\varphi_{21}$$

называется *определителем отображения*  $\varphi$  и обозначается  $\det \varphi$ . Если положить

$$e = (e_1, e_2), \quad \varphi(e) = (f_1, f_2),$$

где в правых частях стоят  $1 \times 2$  матрицы из векторов, то две формулы (2-3) свернутся в одно матричное равенство  $\varphi(e) = e \Phi_e$ . Разложение  $v = e_1 x_1 + e_2 x_2$  вектора  $v$  по базису  $e$  в матричных обозначениях записывается равенством  $v = ex$ , в котором  $e = (e_1, e_2)$  — строчка из векторов, а  $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$  — столбец из чисел. Линейность отображения  $\varphi : V \rightarrow V$  означает, что

$$\varphi(v) = \varphi(ex) = \varphi(e)x.$$

Эти равенства являются матричной записью вычисления (2-2). Подставляя  $\varphi(e) = e \Phi_e$  в правую часть, мы заключаем, что  $\varphi(v) = e \Phi_e x$ , т. е. столбец координат вектора  $\varphi(v)$  в базисе  $e$  равен произведению  $\Phi_e x$  матрицы  $\Phi_e$  на столбец  $x$ .

Следующие далее утверждения мы будем доказывать в предположении, что  $\dim V = 2$ . В полной общности мы вернёмся к ним чуть позже.

### Предложение 2.3

Композиция  $\psi \circ \varphi$  линейных отображений  $\psi, \varphi : V \rightarrow V$  с матрицами  $\Psi_e$  и  $\Phi_e$  линейна и имеет матрицу  $\Psi_e \Phi_e$ . В частности, умножение  $2 \times 2$  матриц ассоциативно, т. е.  $(AB)C = A(BC)$ .

Доказательство. Линейность композиции проверяется непосредственно:

$$\begin{aligned}\psi\varphi(\lambda u + \mu w) &= \psi(\varphi(\lambda u + \mu w)) = \psi(\lambda\varphi(u) + \mu\varphi(w)) = \\ &= \lambda\psi(\varphi(u)) + \mu\psi(\varphi(w)) = \lambda\psi\varphi(u) + \mu\psi\varphi(w).\end{aligned}$$

Вычисление:  $\psi(\varphi(\mathbf{e})) = \psi(\mathbf{e} \cdot \Phi_{\mathbf{e}}) = \psi(\mathbf{e}) \cdot \Phi_{\mathbf{e}} = \mathbf{e} \cdot \Psi_{\mathbf{e}} \cdot \Phi_{\mathbf{e}}$  показывает, что композиция  $\psi\varphi$  имеет в базисе  $\mathbf{e}$  матрицу  $\Psi_{\mathbf{e}}\Phi_{\mathbf{e}}$ . Поскольку композиция отображений очевидным образом ассоциативна<sup>1</sup>, ассоциативно и умножение матриц.  $\square$

Предложение 2.4

Для любой формы площади  $s : V \times V \rightarrow \mathbb{k}$  и любых векторов  $v_1, v_2 \in V$

$$s(\varphi(v_1), \varphi(v_2)) = s(v_1, v_2) \cdot \det \Phi_{\mathbf{e}}. \quad (2-7)$$

В частности, определитель  $\det \varphi = \det \Phi_{\mathbf{e}} = s(\varphi(v_1), \varphi(v_2))/s(v_1, v_2)$  зависит от  $\varphi$  и не зависит от базиса  $\mathbf{e}$ . Линейное отображение  $\varphi : V \rightarrow V$  биективно если и только если  $\det \varphi \neq 0$ .

Доказательство. Образум из векторов  $v_1$  и  $v_2$  матрицу  $\mathbf{v} = (v_1, v_2)$  размера  $1 \times 2$ . Тогда  $\mathbf{v} = \mathbf{e} C_{ev}$ , где  $C_{ev}$  — числовая матрица размера  $2 \times 2$ , столбцы которой являются столбцами координат векторов  $v_1, v_2$  в базисе  $\mathbf{e} = (e_1, e_2)$ . Поскольку отображение  $\varphi$  линейно  $(\varphi(v_1), \varphi(v_2)) = \varphi(\mathbf{v}) = \varphi(\mathbf{e} C_{ev}) = \varphi(\mathbf{e}) C_{ev} = (f_1, f_2) C_{ev}$ , где  $(f_1, f_2) = (\varphi(e_1), \varphi(e_2)) = (e_1, e_2) \Phi_{\mathbf{e}}$ . По сл. 1.2 на стр. 15 для любой ненулевой формы площади  $s$  на  $V$  выполняются равенства

$$s(\varphi(v_1), \varphi(v_2)) = s(f_1, f_2) \det C_{ev} = s(e_1, e_2) \det \Phi_{\mathbf{e}} \det C_{ev}.$$

Так как  $s(e_1, e_2) \det C_{ev} = s(v_1, v_2)$ , мы получаем (2-7). Если  $\det \Phi_{\mathbf{e}} = \det(f_1, f_2) \neq 0$ , то пара векторов  $\mathbf{f} = (f_1, f_2)$  тоже является базисом в  $V$ . Отображение  $\varphi$  переводит вектор  $u = \mathbf{e}\mathbf{x}$  со столбцом координат  $\mathbf{x}$  в базисе  $\mathbf{e}$  в вектор  $\varphi(u) = \varphi(\mathbf{e})\mathbf{x} = \mathbf{f}\mathbf{x}$  с тем же самым столбцом координат  $\mathbf{x}$ , но только в базисе  $\mathbf{f}$ . Тем самым, оно биективно. Если же  $\det(f_1, f_2) = 0$ , то  $f_1 = \lambda f_2$  для некоторого  $\lambda \in \mathbb{k}$ , откуда  $\varphi(e_1) = \varphi(\lambda e_2)$ . Поскольку  $e_1 \neq \lambda e_2$ , отображение  $\varphi$  не биективно.  $\square$

Упражнение 2.2. Докажите для  $2 \times 2$  матриц  $A$  и  $B$  равенство  $\det(AB) = \det(A) \cdot \det(B)$ .

**2.1.3. Запись аффинных отображений в координатах.** Зафиксируем на аффинной плоскости  $\mathbb{A}^2$  над двумерным векторным пространством  $V$  координатный репер  $(o; e_1, e_2)$ . Пусть аффинное отображение  $\varphi : \mathbb{A}^2 \rightarrow \mathbb{A}^2$  переводит его начальную точку  $o$  в точку  $b = \varphi(o)$  с координатами  $\begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \end{pmatrix}$ , а дифференциал  $D\varphi : V \rightarrow V$  имеет в базисе  $\mathbf{e} = (e_1, e_2)$  матрицу

$$\Phi_{\mathbf{e}} = \begin{pmatrix} \varphi_{11} & \varphi_{12} \\ \varphi_{21} & \varphi_{22} \end{pmatrix}.$$

Тогда действие отображения  $\varphi$  на произвольную точку с координатами  $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$  описывается матричной формулой  $\varphi : \mathbf{x} \mapsto b + \Phi_{\mathbf{e}}\mathbf{x}$ , которая в развёрнутом виде выглядит так:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \varphi_{11} & \varphi_{12} \\ \varphi_{21} & \varphi_{22} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \beta_1 + \varphi_{11}x_1 + \varphi_{12}x_2 \\ \beta_2 + \varphi_{21}x_1 + \varphi_{22}x_2 \end{pmatrix}.$$

<sup>1</sup>Для любых трёх отображений  $\alpha : A \rightarrow B$ ,  $\beta : B \rightarrow C$ ,  $\gamma : C \rightarrow D$  обе композиции  $(\gamma\beta)\alpha$  и  $\gamma(\beta\alpha)$  действуют на каждую точку  $a \in A$  по одному и тому же правилу  $a \mapsto \gamma(\beta(\alpha(a)))$ .

Упражнение 2.3. Убедитесь в этом, и выясните, как аффинное преобразование  $x \mapsto b + Ax$  изменяет площади ориентированных параллелограммов.

Мы заключаем, что аффинное отображение плоскости однозначно задаётся своим действием на произвольно выбранный аффинный репер: для любого аффинного репера  $(p; e_1, e_2)$ , любой точки  $q$  и любых векторов  $f_1, f_2$  существует единственное такое аффинное отображение  $\varphi$ , что  $\varphi(p) = q, D_\varphi(e_1) = f_1, D_\varphi(e_2) = f_2$ .

**2.2. Аффинная группа.** Биективные аффинные отображения  $\mathbb{A}(V) \rightarrow \mathbb{A}(V)$  называются *аффинными автоморфизмами* или *аффинными преобразованиями*. Они образуют группу преобразований<sup>1</sup>, которая обозначается  $\text{Aff}(V)$  и называется *аффинной группой* векторного пространства  $V$ . Аффинная группа координатного пространства  $\mathbb{k}^n$  обозначается  $\text{Aff}_n(\mathbb{k})$ . Две фигуры в аффинном пространстве называются *аффинно конгруэнтными*, если существует аффинный автоморфизм, переводящий одну из этих фигур в другую.

Следствие 2.1

Для любых треугольников  $\Delta p_0 p_1 p_2, \Delta q_0 q_1 q_2$  на аффинной плоскости существует единственное аффинное преобразование этой плоскости, переводящее  $p_i$  в  $q_i$  при всех  $i = 0, 1, 2$ .

Доказательство. Как мы видели выше, имеется единственное такое аффинное отображение

$$\varphi : \mathbb{A}(V) \rightarrow \mathbb{A}(V),$$

что  $\varphi(p_0) = q_0$  и  $D_\varphi(\overline{p_0 p_1}) = \overline{q_0 q_1}, D_\varphi(\overline{p_0 p_2}) = \overline{q_0 q_2}$ . Произвольная точка  $y \in \mathbb{A}(V)$  с радиус вектором  $\overline{q_0 y} = \lambda \overline{q_0 q_1} + \mu \overline{q_0 q_2}$  является при этом образом единственной точки  $x \in \mathbb{A}(V)$  с радиус вектором  $\overline{p_0 x} = \lambda \overline{p_0 p_1} + \mu \overline{p_0 p_2}$ .  $\square$

Следствие 2.2

Аффинные преобразования плоскости переводят прямые в прямые, сохраняя параллельность. Любые три различные попарно не параллельные и не пересекающиеся в одной точке прямые  $\ell_0, \ell_1, \ell_2$  переводятся в любые три различные попарно не параллельные и не пересекающиеся в одной точке прямые  $\ell'_0, \ell'_1, \ell'_2$  единственным аффинным преобразованием.  $\square$

Предложение 2.5

Если три различные прямые  $\ell_0, \ell_1, \ell_2$  пересекаются в точке  $o$ , а три различные прямые  $\ell'_0, \ell'_1, \ell'_2$  пересекаются в точке  $o'$ , то существует аффинное преобразование, переводящее  $\ell_i$  в  $\ell'_i$  при всех  $i = 0, 1, 2$ . Такое преобразование единственно с точностью до композиции с гомотетиями относительно точек  $o$  и  $o'$ .

Доказательство. Зафиксируем на всех прямых  $\ell_i$  и  $\ell'_i$  направляющие векторы  $v_i$  и  $v'_i$ . Тогда

$$v_0 = x_1 v_1 + x_2 v_2, \quad v'_0 = x_1 v'_1 + x_2 v'_2, \quad (2-8)$$

где все четыре числа  $x_1, x_2, x_3, x_4 \in \mathbb{k}$  отличны от нуля. Аффинное преобразование  $\varphi$  переводит прямые  $\ell_1, \ell_2$ , соответственно, в прямые  $\ell'_1, \ell'_2$  если и только если  $\varphi(o) = o'$  и  $D_\varphi(v_1) = \lambda_1 v'_1, D_\varphi(v_2) = \lambda_2 v'_2$  для некоторых  $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{k}$ . Такое преобразование переводит прямую  $\ell_0$  в  $\ell'_0$  если и только если  $D_\varphi(v_0) = \mu v'_0$  для некоторого  $\mu \in \mathbb{k}$ . Подставляя в это равенство разложения (2-8) и пользуясь линейностью  $D_\varphi$ , заключаем что  $\lambda_1 x_1 = \mu x'_1$  и  $\lambda_2 x_2 = \mu x'_2$ , откуда числа

<sup>1</sup>См. обсуждение на стр. 7

$\lambda_1 = \mu x_1 / x'_1$  и  $\lambda_2 = \mu x_2 / x'_2$  определяются однозначно с точностью до умножения на константу  $\mu$ . Поскольку преобразование  $\varphi$  однозначно задаётся этими числами, оно существует и единственно с точностью до гомотетии с центром в точке  $o$  или  $o'$ .  $\square$

УПРАЖНЕНИЕ 2.4. Пусть три различные прямые  $\ell_1, \ell_2, \ell_3$  пересекаются в точке  $o$ . Покажите, что существует такая тройка точек  $p_1 \in \ell_1, p_2 \in \ell_2, p_3 \in \ell_3$ , что  $\overline{op_3} = \overline{op_1} + \overline{op_2}$ , и любые две такие тройки получаются друг из друга гомотетией с центром в  $o$ . Получите отсюда другое доказательство [предл. 2.5](#)

**2.2.1. Двойное отношение четырёх конкурентных прямых.** Две четвёрки конкурентных<sup>1</sup> прямых на аффинной плоскости не всегда аффинно конгруэнтны. Полным инвариантом, характеризующим четыре пересекающиеся в точке  $o$  прямые  $\ell_1 = (op_1), \ell_2 = (op_2), \ell_3 = (op_3), \ell_4 = (op_4)$  с точностью до аффинного преобразования является *двойное отношение*<sup>2</sup>

$$[\ell_1, \ell_2, \ell_3, \ell_4] \stackrel{\text{def}}{=} \frac{s(op_1p_3)}{s(op_2p_3)} : \frac{s(op_1p_4)}{s(op_2p_4)} = \frac{s(\overline{op_1}, \overline{op_3})}{s(\overline{op_2}, \overline{op_3})} : \frac{s(\overline{op_1}, \overline{op_4})}{s(\overline{op_2}, \overline{op_4})}. \quad (2-9)$$

УПРАЖНЕНИЕ 2.5. Убедитесь, что двойное отношение не зависит ни от выбора ненулевой функции площади  $s$ , ни от выбора отличных от  $o$  точек  $p_i \in \ell_i$ , а также не меняется, если как-либо разбить четвёрку на две пары и одновременно переставить между собою прямые в каждой из пар:  $[\ell_1, \ell_2, \ell_3, \ell_4] = [\ell_2, \ell_1, \ell_4, \ell_3] = [\ell_3, \ell_4, \ell_1, \ell_2] = [\ell_4, \ell_3, \ell_2, \ell_1]$ .

Расположим тройку точек  $p_1, p_2, p_3$  так, чтобы четырёхугольник  $op_1p_3p_2$  оказался параллелограммом, как в [упр. 2.4](#), а в качестве  $p_4$  возьмём точку пересечения прямой  $\ell_4$  с прямой  $(p_1p_3)$ , см. [рис. 2◊1](#). Тогда  $p_4 = p_2 + t \cdot \overline{p_2p_3}$ , где число  $t = \overline{p_2p_4} / \overline{p_2p_3}$  является аффинной координатой точки  $p_4$  на прямой  $(p_2p_3)$  относительно репера с началом  $p_2$  и базисным вектором  $e = \overline{p_2p_3}$ . Положение четвёртой прямой однозначно характеризуется этой координатой в том смысле, что отображение  $\ell_4 \mapsto t$  устанавливает биекцию между множеством всех проходящих через точку  $o$  прямых  $\ell_4$  и множеством  $\mathbb{k} \sqcup \infty$ . Прямые  $\ell_1, \ell_2, \ell_3$  при этом соответствуют значениям  $t = \infty, 0, 1$ . С другой стороны

$$\begin{aligned} [\ell_1, \ell_2, \ell_3, \ell_4] &= \frac{s(\overline{op_1}, \overline{op_3})}{s(\overline{op_3}, \overline{op_2})} : \frac{s(\overline{op_1}, \overline{op_4})}{s(\overline{op_4}, \overline{op_2})} = \\ &= \frac{s(\overline{op_1}, \overline{op_1} + \overline{op_2})}{s(\overline{op_1} + \overline{op_2}, \overline{op_2})} : \frac{s(\overline{op_1}, \overline{op_2} + t\overline{op_1})}{s(\overline{op_2} + t\overline{op_1}, \overline{op_2})} = \\ &= \frac{s(\overline{op_1}, \overline{op_2})}{s(\overline{op_1}, \overline{op_2})} : \frac{s(\overline{op_1}, \overline{op_2})}{t \cdot s(\overline{op_1}, \overline{op_2})} = t. \end{aligned} \quad (2-10)$$

Таким образом, двойное отношение  $t = [\ell_1, \ell_2, \ell_3, \ell_4]$  принимает все значения из поля  $\mathbb{k}$ , а также значение  $\infty$  и однозначно характеризует положение четвёртой прямой по отношению к

<sup>1</sup>Т. е. пересекающихся в одной точке.

<sup>2</sup>По-английски *cross-ratio*.

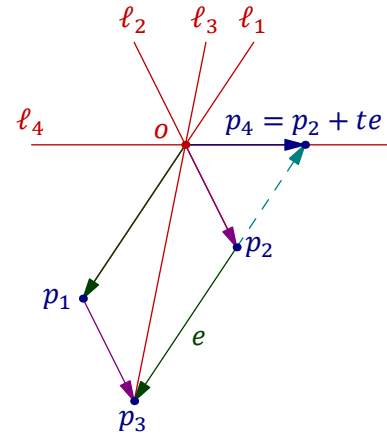


Рис. 2◊1.  $t = [\ell_1, \ell_2, \ell_3, \ell_4]$ .

первым трём. Если  $[\ell_1, \ell_2, \ell_3, \ell_4] = -1$ , то прямая  $\ell_2$  пересекает любую параллельную  $\ell_1$  прямую  $\ell'_1$  в середине отрезка, высекаемого из  $\ell'_1$  прямыми  $\ell_3$  и  $\ell_4$ . Такие четвёрки конкурентных прямых называют *гармоническими*.

УПРАЖНЕНИЕ 2.6. Покажите, что гармоничность равносильна тому, что двойное отношение не меняется при перестановке первых двух точек:  $[\ell_1, \ell_2, \ell_3, \ell_4] = [\ell_2, \ell_1, \ell_3, \ell_4]$ .

Предложение 2.6

Четыре различные конкурентные прямые  $\ell_1, \ell_2, \ell_3, \ell_4$  переводятся в четыре различные конкурентные прямые  $\ell'_1, \ell'_2, \ell'_3, \ell'_4$  если и только если  $[\ell_1, \ell_2, \ell_3, \ell_4] = [\ell'_1, \ell'_2, \ell'_3, \ell'_4]$ .

Доказательство. Обозначим точки пересечения четвёрок прямых через  $o$  и  $o'$ . По упр. 2.4 существуют такие тройки точек  $p_i \in \ell_i$  и  $p'_i \in \ell'_i$ , где  $i = 1, 2, 3$ , что четырёхугольники  $op_1p_3p_2$  и  $o'p'_1p'_3p'_2$  являются параллелограммами, причём эти тройки единственны с точностью до гомотетий с центрами  $o$  и  $o'$ . Аффинное преобразование, переводящее параллелограмм  $op_1p_3p_2$  в параллелограмм  $o'p'_1p'_3p'_2$  является по предл. 2.5 единственным с точностью до гомотетий с центрами  $o$  и  $o'$  аффинным преобразованием, переводящим прямую  $\ell_i$  в прямую  $\ell'_i$  при  $i = 1, 2, 3$ . Оно переводит прямую  $\ell_4$  в прямую  $\ell'_4$  если и только если точка  $p_4 = \ell_4 \cap (p_2p_3)$  делит точки  $p_2, p_3$  в том же отношении, что точка  $p'_4 = \ell'_4 \cap (p'_2p'_3)$  делит точки  $p'_2, p'_3$ . Согласно (2-10) эти отношения равны двойным отношениям  $[\ell_1, \ell_2, \ell_3, \ell_4]$  и  $[\ell'_1, \ell'_2, \ell'_3, \ell'_4]$ .  $\square$

**2.2.2. Двойное отношение четырёх коллинеарных точек.** Если в форм. (2-9) на стр. 29 расположить все четыре точки  $p_i$  на одной не проходящей через точку  $o$  прямой  $\ell$ , как на рис. 2◊2, то двойное отношение площадей треугольников в формуле (2-9) можно переписать как двойное отношение четырёх пропорциональных векторов<sup>1</sup>

$$\frac{s(op_1p_3)}{s(op_2p_3)} : \frac{s(op_1p_4)}{s(op_2p_4)} = \frac{\overline{p_1p_3}}{\overline{p_2p_3}} : \frac{\overline{p_1p_4}}{\overline{p_2p_4}}.$$

Правая часть этого равенства обозначается

$$[p_1, p_2, p_3, p_4] \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\overline{p_1p_3}}{\overline{p_2p_3}} : \frac{\overline{p_1p_4}}{\overline{p_2p_4}}$$

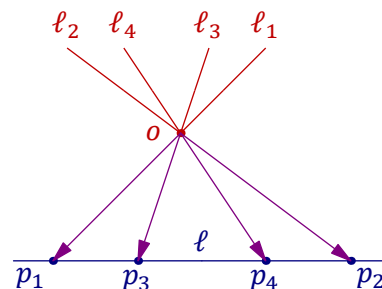


Рис. 2◊2.

и называется *двойным отношением* упорядоченной четвёрки коллинеарных точек  $p_1, p_2, p_3, p_4$ . Такая четвёрка называется *гармонической*, если  $[p_1, p_2, p_3, p_4] = -1$ .

**2.3. Сравнение аффинной и линейной групп.** Аффинная группа  $\text{Aff}(V)$  содержит подгруппу *параллельных переносов* или *сдвигов*  $T \subset \text{Aff}(V)$ , изоморфную аддитивной группе векторов пространства  $V$ . Вектору  $v \in V$  отвечает при этом изоморфизме сдвиг

$$\tau_v : \mathbb{A}(V) \rightarrow \mathbb{A}(V), \quad p \mapsto p + v,$$

а композиции сдвигов отвечает сложение векторов:  $\tau_u \circ \tau_w = \tau_{u+w}$ . Поскольку для любого аффинного преобразования  $\varphi : \mathbb{A}(V) \rightarrow \mathbb{A}(V)$  и произвольной точки  $p \in \mathbb{A}(V)$  выполняются равенства  $\varphi(\tau_v(p)) = \varphi(p + v) = \varphi(p) + D_\varphi(v) = \tau_{D_\varphi(v)}(\varphi(p))$  сдвиги  $\tau_v$  коммутируют с произвольными аффинными преобразованиями по правилу

$$\varphi \circ \tau_v = \tau_{D_\varphi(v)} \circ \varphi \quad \text{или} \quad \varphi \circ \tau_v \circ \varphi^{-1} = \tau_{D_\varphi(v)}. \quad (2-11)$$

<sup>1</sup>См. упр. 1.10 на стр. 22.

Множество всех аффинных преобразований, оставляющих на месте произвольно выбранную точку  $p \in \mathbb{A}^2$ , образует в  $\text{Aff}(V)$  подгруппу, которая называется *стабилизатором* точки  $p$  и обозначается

$$\text{Stab}_p \stackrel{\text{def}}{=} \{ \varphi \in \text{Aff}(V) \mid \varphi(p) = p \}.$$

Аффинное преобразование  $\varphi \in \text{Stab}_p$  действует на произвольную точку  $q \in \mathbb{A}(V)$  по правилу  $\varphi(q) = p + D_\varphi(\overline{pq})$ . В частности, два аффинных преобразования  $\varphi, \psi \in \text{Stab}_p$  совпадают если и только если  $D_\varphi = D_\psi$ . Таким образом, мы имеем инъективное отображение

$$D : \text{Stab}_p \rightarrow \text{GL}(V), \quad \varphi \mapsto D_\varphi, \quad (2-12)$$

переводящее аффинное преобразование в его дифференциал. Это отображение является изоморфизмом групп, поскольку каждый линейный автоморфизм  $F : V \simeq V$  является дифференциалом аффинного преобразования

$$F_p : \mathbb{A}(V) \rightarrow \mathbb{A}(V), \quad x \mapsto p + F(\overline{px}), \quad (2-13)$$

оставляющего точку  $p$  на месте.

Предложение 2.7

Зафиксируем произвольным образом точку  $p \in \mathbb{A}(V)$ . Тогда для каждого аффинного преобразования  $\varphi \in \text{Aff}(V)$  существуют единственные такие вектор  $v \in V$  и линейный автоморфизм  $F \in \text{GL}(V)$ , что  $\varphi = \tau_v \circ F_p$ . При этом для всех  $u, w \in V$  и всех  $F, G \in \text{GL}(V)$

$$(\tau_u \circ F_p) \circ (\tau_w \circ G_p) = \tau_{u+F(w)} \circ (F \circ G)_p. \quad (2-14)$$

Доказательство. Пусть  $\varphi(p) = q$ . Тогда  $\varphi = \tau_v \circ \psi$ , где  $v = \overline{pq}$  и  $\psi = \tau_{-v} \circ \varphi \in \text{Stab}_p$ . Тем самым,  $\psi = F_p$  для некоторого линейного преобразования  $F \in \text{GL}(V)$ . Если аффинное преобразование  $\varphi$  допускает два разложения  $\tau_v \circ F_p = \varphi = \tau_u \circ G_p$ , то применяя к правой и левой частям этого равенства обратный к  $\tau_v$  сдвиг  $\tau_{-v}$ , заключаем, что  $F_p = \tau_{u-v} \circ G_p$ . Так как и  $F_p$ , и  $G_p$  оставляют точку  $p$  на месте, сдвиг  $\tau_{u-v}$  переводит точку  $p$  в себя, откуда  $u = v$  и  $\tau_{u-v} = \text{Id}$ . Поэтому  $F_p = G_p$  и  $F = G$ . Соотношение (2-14) вытекает из формулы (2-11) :

$$\tau_u \circ F_p \circ \tau_w \circ G_p = \tau_u \circ F_p \circ \tau_w \circ F_p^{-1} \circ F_p \circ G_p = \tau_u \circ \tau_{F_p(w)} \circ F_p \circ G_p.$$

□

Замечание 2.1. Из предл. 2.7 вытекает, что фиксация точки  $p$  аффинном пространстве  $\mathbb{A}(V)$  позволяет отождествить множество  $\text{Aff}(V)$  с прямым произведением множеств  $V \times \text{GL}(V)$  так, что имеющаяся в группе  $\text{Aff}(V)$  композиция будет задаваться в терминах  $V \times \text{GL}(V)$  правилом

$$(u, F) \circ (w, G) = (u + F(w), FG).$$

В этой ситуации говорят, что группа  $\text{Aff}(V)$  является *полупрямым произведением* групп  $V$  и  $\text{GL}(V)$ , и пишут  $\text{Aff}(V) = V \rtimes \text{GL}(V)$ . Обратите внимание, что отождествление множества  $\text{Aff}(V)$  с множеством  $V \times \text{GL}(V)$  требует выбора точки  $p \in \mathbb{A}(V)$ , и два разложения  $\tau_u \circ F_p = \varphi = \tau_w \circ F_q$  одного и того же аффинного преобразования  $\varphi \in \text{Aff}(V)$ , возникающие при фиксации разных точек  $p, q \in \mathbb{A}(V)$ , имеют один и тот же линейный автоморфизм  $F = D_{F_p} = D_{F_q} = D_\varphi \in \text{GL}(V)$ , но, вообще говоря, разные сдвиги  $\tau_u \neq \tau_w$ .

УПРАЖНЕНИЕ 2.7. Убедитесь, что  $w = u - \overline{pq} + D_\varphi(\overline{pq})$  и что этот вектор отличен от  $u$  если  $D_\varphi(\overline{pq}) \neq \overline{pq}$ .

**2.4. Преобразования, переводящие прямые в прямые.** Биективное отображение аффинной плоскости  $\mathbb{k}^2$  в себя называется *полуаффинным*, если оно переводит прямые в прямые. Полуаффинные преобразования, очевидно, образуют группу. В этом разделе мы покажем, что над полями  $\mathbb{Q}$ ,  $\mathbb{R}$  и  $\mathbb{F}_p = \mathbb{Z}/(p)$ , где  $p \in \mathbb{N}$  — простое, все полуаффинные преобразования в действительности аффинны, а над произвольным полем  $\mathbb{k}$  каждое полуаффинное преобразование  $\varphi : \mathbb{k}^2 \rightarrow \mathbb{k}^2$  раскладывается в композицию  $\varphi = \varphi_{\text{Aff}} \circ \psi_{\mathbb{k}}$  некоторого аффинного преобразования  $\varphi_{\text{Aff}} : \mathbb{k}^2 \rightarrow \mathbb{k}^2$  и преобразования  $\psi_{\mathbb{k}} : \mathbb{k}^2 \rightarrow \mathbb{k}^2$ ,  $(x_1, x_2) \mapsto (\psi_{\mathbb{k}}(x_1), \psi_{\mathbb{k}}(x_2))$ , задаваемого некоторым автоморфизмом  $\psi_{\mathbb{k}} : \mathbb{k} \simeq \mathbb{k}$  основного поля  $\mathbb{k}$ . Над полями  $\mathbb{Q}$ ,  $\mathbb{R}$  и  $\mathbb{F}_p$  подобных «скручиваний с автоморфизмами» нет по той простой причине, что у этих полей нет никаких автоморфизмов кроме тождественного. Мы начнём с напоминаний об автоморфизмах полей.

**2.4.1. Отступление об автоморфизмах полей.** Отображение поля в себя  $\psi : \mathbb{k} \simeq \mathbb{k}$  называется *гомоморфизмом*, если  $\psi(\lambda + \mu) = \psi(\lambda) + \psi(\mu)$  и  $\psi(\lambda\mu) = \psi(\lambda)\psi(\mu)$  для всех  $\lambda, \mu \in \mathbb{k}$ .

УПРАЖНЕНИЕ 2.8. Убедитесь, что каждый гомоморфизм  $\psi : \mathbb{k} \simeq \mathbb{k}$  либо инъективный, либо тождественно нулевой<sup>1</sup>, и обладает свойствами  $\psi(0) = 0$  и  $\psi(\lambda - \mu) = \psi(\lambda) - \psi(\mu)$ , а всякий ненулевой гомоморфизм — свойствами  $\psi(1) = 1$  и  $\psi(\lambda/\mu) = \psi(\lambda)/\psi(\mu)$  при  $\mu \neq 0$ .

Биективные гомоморфизмы  $\mathbb{k} \simeq \mathbb{k}$  называются *автоморфизмами*. Из упр. 2.8 вытекает, что каждый автоморфизм  $\psi$  тождественно действует на всех элементах вида

$$\pm(1 + 1 + \dots + 1)/(1 + 1 + \dots + 1) \in \mathbb{k}$$

с отличным от нуля знаменателем. Поскольку в поле  $\mathbb{Q}$  и во всех полях вычетов  $\mathbb{F}_p$  никаких других элементов нет, у этих полей нет и никаких автоморфизмов кроме тождественного. Всякий автоморфизм  $\psi : \mathbb{R} \simeq \mathbb{R}$  тождественно действует на подполе  $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$  и является *строго монотонной функцией*, поскольку неравенство  $\lambda < \mu$  равносильно тому, что  $\mu - \lambda = \alpha^2$  для некоторого  $\alpha \in \mathbb{R}$ , откуда  $\psi(\mu) - \psi(\lambda) = \psi(\mu - \lambda) = \psi(\alpha^2) = \psi(\alpha)^2 > 0$ , т. е.  $\psi(\lambda) < \psi(\mu)$ .

УПРАЖНЕНИЕ 2.9 (по анализу). Пусть строго монотонная функция  $\psi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  такова, что  $f(x) = x$  при  $x \in \mathbb{Q}$ . Покажите, что  $f(x) = x$  при всех  $x \in \mathbb{R}$ .

Таким образом, у поля  $\mathbb{R}$  тоже нет никаких автоморфизмов кроме тождественного. А вот поле комплексных чисел  $\mathbb{C}$  имеет нетождественный *автоморфизм сопряжения*  $z = x + iy \mapsto \bar{z} = x - iy$ . Аналогичные автоморфизмы есть и у других полей алгебраических чисел.

УПРАЖНЕНИЕ 2.10. Покажите что множество чисел  $\mathbb{Q}[\sqrt{2}] = \{x + y\sqrt{2} \mid x, y \in \mathbb{Q}\}$  является полем и укажите нетождественный автоморфизм этого поля.

**2.4.2. Дифференциал полуаффинного преобразования.** В силу своей биективности, каждое полуаффинное преобразование  $\varphi : \mathbb{k}^2 \rightarrow \mathbb{k}^2$  переводит параллельные прямые в параллельные, а значит, параллелограммы — в параллелограммы. Поэтому из равенства  $\overline{pq} = \overline{rs}$  вытекает равенство  $\overline{\varphi(p)\varphi(q)} = \overline{\varphi(r)\varphi(s)}$ . Это равенство верно, даже когда точки  $p, q, r, s$  коллинеарны и не образуют параллелограмма: в этом случае надо выбрать вектор  $\overline{xy} = \overline{pq} = \overline{rs}$  на параллельной  $(pq)$  прямой  $(xy) \neq (pq)$ , как на рис. 2◊3 на стр. 33, и использовать параллелограммы  $pxyq$  и  $rxys$ . Тем самым, каждое полуаффинное отображение  $\varphi : \mathbb{A}(V) \rightarrow \mathbb{A}(V)$  корректно задаёт отображение векторов

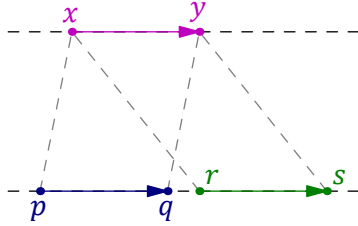
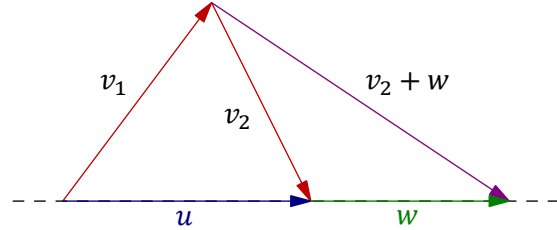
$$D_\varphi : V \rightarrow V, \quad \overline{pq} \mapsto \overline{\varphi(p)\varphi(q)}. \quad (2-15)$$

<sup>1</sup>Т. е.  $\psi(\lambda) = 0$  для всех  $\lambda \in \mathbb{k}$ .



Поскольку  $\varphi$  переводит параллелограмм со сторонами  $u$ ,  $v$  в параллелограмм со сторонами  $D_\varphi(u)$  и  $D_\varphi(w)$ , отображение (2-15) аддитивно:  $D_\varphi(u + w) = D_\varphi(u) + D_\varphi(w)$ , причём это равенство справедливо даже когда векторы  $u$  и  $w$  пропорциональны, поскольку вектор  $u$  всегда можно представить в виде суммы векторов  $v_1$  и  $v_2$ , каждый из которых не пропорционален  $u$ , как на рис. 2◊4, и тогда

$$\begin{aligned} D_\varphi(u + w) &= D_\varphi(v_1 + v_2 + w) = D_\varphi(v_1) + D_\varphi(v_2 + w) = \\ &= D_\varphi(v_1) + D_\varphi(v_2) + D_\varphi(w) = D_\varphi(v_1 + v_2) + D_\varphi(w) = D_\varphi(u) + D_\varphi(w). \end{aligned}$$

Рис. 2◊3. Корректность определения  $D_\varphi$ .Рис. 2◊4. Аддитивность  $D_\varphi$ .

Полуаффинное преобразование  $\varphi$  однозначно восстанавливается, как только известен его дифференциал (2-15) и образ  $\varphi(p)$  хотя одной точки  $p$ . Каждая точка  $q$  будет переводиться таким преобразованием в точку  $\varphi(q) = \varphi(p) + \overline{\varphi(p)\varphi(q)} = \varphi(p) + D_\varphi(\overline{pq})$ .

#### Предложение 2.8

Дифференциал  $D_\varphi$  полуаффинного преобразования  $\varphi$  полулинеен, т. е.

$$D_\varphi(\lambda u + \mu w) = \psi(\lambda) \cdot D_\varphi(u) + \psi(\mu) \cdot D_\varphi(w) \quad (2-16)$$

для всех  $u, w \in V$ ,  $\lambda, \mu \in \mathbb{k}$  и некоторого зависящего лишь от  $\varphi$  автоморфизма  $\psi : \mathbb{k} \simeq \mathbb{k}$ .

Доказательство. Поскольку  $\varphi$  переводит прямые в прямые,  $D_\varphi$  переводит векторы, пропорциональные данному вектору  $v$ , в векторы, пропорциональные  $D_\varphi(v)$ . Поэтому каждый ненулевой вектор  $v \in V$  задаёт отображение  $\psi_v : \mathbb{k} \rightarrow \mathbb{k}$ , определяемое равенством

$$D_\varphi(\lambda v) = \psi_v(\lambda) \cdot D_\varphi(v).$$

В силу биективности  $\varphi$ , все отображения  $\psi_v$  биективны. Покажем, что  $\psi_u = \psi_w$  для любых двух непропорциональных векторов  $u, w$ . Так как пересекающиеся в одной точке прямые переходят в прямые, которые тоже пересекаются в одной точке, векторы  $D_\varphi(u)$  и  $D_\varphi(w)$  не пропорциональны и образуют базис. Из аддитивности  $D_\varphi$  вытекает, что

$$\begin{aligned} D_\varphi(\lambda(u + w)) &= \psi_{u+w}(\lambda) \cdot D_\varphi(u + w) = \psi_{u+w}(\lambda) \cdot D_\varphi(u) + \psi_{u+w}(\lambda) \cdot D_\varphi(w) \\ &\parallel \\ D_\varphi(\lambda u + \lambda w) &= D_\varphi(\lambda u) + D_\varphi(\lambda w) = \psi_u(\lambda) \cdot D_\varphi(u) + \psi_w(\lambda) \cdot D_\varphi(w). \end{aligned}$$

Из единственности разложения вектора по базису мы заключаем, что для всех  $\lambda \in \mathbb{k}$  выполняются равенства  $\psi_u(\lambda) = \psi_{u+w}(\lambda) = \psi_w(\lambda)$ . На самом деле они выполняются и тогда, когда векторы  $u$  и  $w$  пропорциональны, поскольку для любого непропорционального им вектора  $v$  мы имеем  $\psi_u = \psi_v = \psi_w$ . Таким образом, отображение  $\psi_v$  на самом деле не зависит от  $v$

и может быть обозначено просто  $\psi$ . Из аддитивности  $D_\varphi$  вытекает, что  $\psi$  перестановочно со сложением и умножением: равенства

$$\begin{aligned}\psi(\lambda + \mu) \cdot D_\varphi(v) &= D_\varphi((\lambda + \mu)v) = D_\varphi(\lambda v + \mu v) = D_\varphi(\lambda v) + D_\varphi(\mu v) = \\ &= \psi(\lambda) \cdot D_\varphi(v) + \psi(\mu) \cdot D_\varphi(v) = (\psi(\lambda) + \psi(\mu)) \cdot D_\varphi(v)\end{aligned}$$

показывают, что  $\psi(\lambda + \mu) = \psi(\lambda) + \psi(\mu)$ , а из равенств

$$\psi(\lambda\mu) \cdot D_\varphi(v) = D_\varphi((\lambda\mu)v) = D_\varphi(\lambda(\mu v)) = \psi(\lambda) \cdot D_\varphi(\mu v) = \psi(\lambda)\psi(\mu) \cdot D_\varphi(v)$$

вытекает, что  $\psi(\lambda\mu) = \psi(\lambda) \cdot \psi(\mu)$ . Тем самым,  $\psi$  является автоморфизм поля  $\mathbb{k}$ . □

### Следствие 2.3

Над полями  $\mathbb{Q}$ ,  $\mathbb{R}$  и  $\mathbb{F}_p$  биективное преобразование аффинной плоскости аффинно если и только если оно переводит прямые в прямые. □

### §3. Евклидова плоскость

Этот параграф посвящён метрической геометрии. Мы определим *длины* и *углы* — величины, по природе своей являющиеся *действительными числами* и характеризующиеся специфическими для поля  $\mathbb{R}$  отношениями больше – меньше или ближе – дальше. Поэтому всюду в этом параграфе мы по умолчанию считаем, что основное поле  $\mathbb{k} = \mathbb{R}$ .

#### ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3.1

*Скалярным произведением* (или *евклидовой структурой*) на векторном пространстве  $V$  над полем  $\mathbb{R}$  называется симметричная билинейная положительная функция  $V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ , сопоставляющая каждой паре векторов  $u, w \in V$  число  $(u, w) \in \mathbb{R}$ . При этом *симметричность* означает, что  $(u, w) = (w, u)$  для всех  $u, w \in V$ , *билинейность* — что

$$(\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2, \mu_1 w_1 + \mu_2 w_2) = \lambda_1 \mu_1 (u_1, w_1) + \lambda_1 \mu_2 (u_1, w_2) + \lambda_2 \mu_1 (u_2, w_1) + \lambda_2 \mu_2 (u_2, w_2),$$

а *положительность* — что  $(v, v) > 0$  для всех ненулевых векторов  $v \in V$ .

#### ПРИМЕР 3.1 (СТАНДАРТНАЯ ЕВКЛИДОВА СТРУКТУРА НА $\mathbb{R}^n$ )

Скалярное произведение векторов  $u = (x_1, x_2, \dots, x_n)$  и  $w = (y_1, y_2, \dots, y_n)$  координатного пространства  $\mathbb{R}^n$ , заданное формулой  $(u, w) \stackrel{\text{def}}{=} \sum x_i y_i = x_1 y_1 + x_2 y_2 + \dots + x_n y_n$ , называется *стандартным*.

**УПРАЖНЕНИЕ 3.1.** Убедитесь, что это скалярное произведение билинейно, симметрично и положительно.

**3.1. Длина вектора и перпендикулярность.** Неотрицательное число  $|v| \stackrel{\text{def}}{=} \sqrt{(v, v)}$  называется *длиной* вектора  $v$  евклидова пространства  $V$ . Все ненулевые векторы имеют строго положительную длину и  $|\lambda v| = |\lambda| \cdot |v|$  при всех  $\lambda \in \mathbb{R}$  и  $v \in V$ . Скалярное произведение  $V \times V \rightarrow \mathbb{R}$  однозначно восстанавливается по функции длины  $V \rightarrow \mathbb{R}$  как

$$(u, w) = (|u + w|^2 - |u|^2 - |w|^2) / 2. \quad (3-1)$$

Векторы  $a, b \in V$  называются *ортогональными* или *перпендикулярными*, если  $(a, b) = 0$ . Если  $a$  и  $b$  перпендикулярны, то квадрат длины вектора  $c = b - a$ , соединяющего их концы, выражается через квадраты длин векторов  $a$  и  $b$  по *теореме Пифагора* (см. рис. 3◊1):

$$|c|^2 = (c, c) = (b - a, b - a) = (a, a) + (b, b) = |a|^2 + |b|^2. \quad (3-2)$$

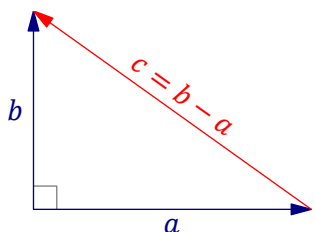


Рис. 3◊1. Теорема Пифагора.

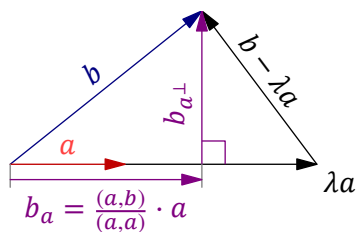


Рис. 3◊2. Ортогональная проекция  $b$  на  $a$ .

## Предложение 3.1

Во всяком евклидовом пространстве для любого ненулевого вектора  $a$  и произвольного вектора  $b$  существует единственная пара таких векторов  $b_a$  и  $b_{a^\perp}$ , что  $b_a$  пропорционален  $a$ ,  $b_{a^\perp}$  перпендикулярен  $a$ , и  $b = b_a + b_{a^\perp}$  (см. рис. 3◊2). Эти векторы выражаются через  $a$  и  $b$  как

$$b_a = \frac{(a, b)}{(a, a)} a \quad \text{и} \quad b_{a^\perp} = b - \frac{(a, b)}{(a, a)} a, \quad (3-3)$$

причём  $b_{a^\perp} = 0$  если и только если  $a$  и  $b$  пропорциональны, а  $b_a = 0$  если и только если  $b$  перпендикулярен  $a$ .

Доказательство. Мы ищем такие векторы  $b_a = \lambda a$  и  $b_{a^\perp} = b - \lambda a$ , что

$$(a, b_{a^\perp}) = (a, b - \lambda a) = (a, b) - \lambda(a, a) = 0.$$

Так как  $(a, a) \neq 0$ , это равенство выполняется при единственном  $\lambda = (a, b)/(a, a)$ . При таком  $\lambda$  условие  $b_a = \lambda a = 0$  равносильно равенству  $(a, b) = 0$ . Условие  $b_{a^\perp} = b - \lambda a = 0$  означает пропорциональность векторов  $a$  и  $b$ .  $\square$

## Определение 3.2

Векторы  $b_a$  и  $b_{a^\perp}$  из предл. 3.1, называются соответственно *ортогональной проекцией* вектора  $b$  на одномерное подпространство  $\mathbb{R} \cdot a$ , порождённое вектором  $a$ , и *нормальной составляющей* вектора  $b$  относительно  $a$ .

Упражнение 3.2. Убедитесь, что векторы  $b_a$  и  $b_{a^\perp}$  не меняются при замене вектора  $a$  на пропорциональный вектор  $\lambda a$  с  $\lambda \neq 0$ .

## Следствие 3.1 (неравенство Коши – Буняковского – Шварца)

Для любых двух векторов  $a, b$  евклидова пространства выполняется неравенство

$$|(a, b)| \leq |a| \cdot |b|, \quad (3-4)$$

которое обращается в равенство если и только если векторы  $a$  и  $b$  пропорциональны.

Доказательство. Если  $a = b = 0$ , обе части неравенства нулевые. Если  $a \neq 0$ , то определена нормальная составляющая  $b_{a^\perp}$  вектора  $b$  относительно  $a$ , и её скалярный квадрат

$$(b_{a^\perp}, b_{a^\perp}) = (b, b) - (a, b)^2 / (a, a) \geq 0 \quad (3-5)$$

занимается если и только если  $b$  пропорционален  $a$ . Домножая обе части (3-5) на  $(a, a)$ , получаем  $(b, b)(a, a) \geq (a, b)^2$ , что равносильно (3-4).  $\square$

## Пример 3.2 (неравенство Коши – Буняковского для чисел)

Неравенство (3-4) применительно к векторам евклидова пространства  $\mathbb{R}^n$  из прим. 3.1 утверждает, что для любых двух наборов вещественных чисел  $x_1, x_2, \dots, x_n$  и  $y_1, y_2, \dots, y_n$  выполняется неравенство  $(x_1 y_1 + x_2 y_2 + \dots + x_n y_n)^2 \leq (x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2) \cdot (y_1^2 + y_2^2 + \dots + y_n^2)$ , обращаемое в равенство если и только если эти наборы чисел пропорциональны.

Следствие 3.2 (неравенство треугольника)

Для любых двух векторов  $a, b$  евклидова пространства выполняется *неравенство треугольника*<sup>1</sup>

$$|a + b| \leq |a| + |b| \quad (3-6)$$

(см. рис. 3◊3). Оно обращается в равенство если и только если векторы  $a$  и  $b$  *сонаправлены*, т. е. один получается из другого умножением на *неотрицательное* число.

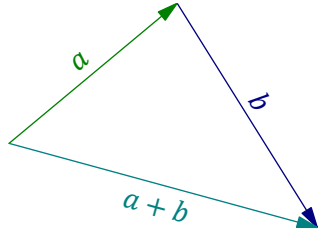


Рис. 3◊3. Неравенство треугольника.

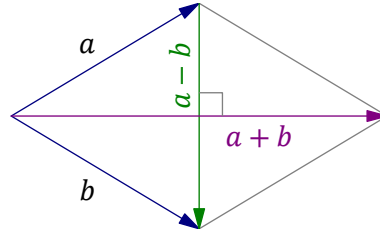


Рис. 3◊4. Диагонали ромба.

Доказательство. Возводя обе части неравенства  $|a + b| \leq |a| + |b|$  в квадрат, получаем эквивалентное неравенство  $(a + b, a + b) \leq (a, a) + 2|a| \cdot |b| + (b, b)$ , которое после раскрытия скобок в левой части и очевидных сокращений превращается в неравенство  $(a, b) \leq |a| \cdot |b|$ , отличающееся от неравенства (3-4) отсутствием модуля в левой части. При  $(a, b) < 0$  оно заведомо выполняется в строгой форме. При  $(a, b) \geq 0$  оно выполняется по сл. 3.1 и превращается в равенство если и только если  $b = \lambda a$ , где  $\lambda \geq 0$ , так как  $(a, b) \geq 0$ .  $\square$

УПРАЖНЕНИЕ 3.3. Проверьте, что диагонали ромба перпендикулярны, т. е.  $(a + b, a - b) = 0$  для любых двух векторов  $a, b$  одинаковой длины  $|a| = |b|$ , см. рис. 3◊4.

**3.1.1. Расстояние между точками.** Аффинные пространства над евклидовыми векторными пространствами также называются *евклидовыми*. Длина  $|\overline{ab}|$  вектора  $\overline{ab}$ , соединяющего точки  $a$  и  $b$  такого пространства, называется *расстоянием* между  $a$  и  $b$  и обозначается  $|a, b|$  или  $|b - a|$ . Обратите внимание, что  $|b - a| = |a - b|$ , так же как и  $|a, b| = |b, a|$ . Неравенство треугольника (3-6) на языке точек означает, что для любых трёх точек  $a, b, p$  выполняется неравенство  $|p - a| + |b - p| \geq |b - a|$ , которое обращается в равенство если и только если векторы  $\overline{ap}$  и  $\overline{pb}$  сонаправлены. Последнее равносильно тому, что точка  $p$  является барицентрической комбинацией<sup>2</sup> точек  $a$  и  $b$  с *неотрицательными* весами.

УПРАЖНЕНИЕ 3.4. Убедитесь в этом.

В вещественном аффинном пространстве множество всех неотрицательных барицентрических комбинаций двух различных точек  $a \neq b$  называется *отрезком* и обозначается

$$[a, b] \stackrel{\text{def}}{=} \{ \alpha a + \beta b \mid \alpha, \beta \geq 0 \text{ и } \alpha + \beta = 1 \}.$$

Мы заключаем, что в евклидовом аффинном пространстве отрезок  $[a, b]$  представляет собою ГМТ  $x$ , удовлетворяющих равенству  $|a - x| + |x - b| = |a - b|$ .

<sup>1</sup>Чем, собственно, и оправдывается термин «длина».

<sup>2</sup>См. н° 1.5 на стр. 18.

**3.1.2. Перпендикулярные прямые.** Две прямые в евклидовом пространстве называются *перпендикулярными*, если перпендикулярны их векторы скорости.

Предложение 3.2 (ортогональная проекция точки на прямую)

Для любой прямой  $\ell$  и точки  $p \notin \ell$  следующие два условия на точку  $q \in \ell$  эквивалентны:

- 1)  $|x - p| > |q - p|$  для всех отличных от  $q$  точек  $x \in \ell$
- 2) прямая  $(pq)$  перпендикулярна прямой  $\ell$ .

Точка  $q \in \ell$  с такими свойствами существует и единственна<sup>1</sup>.

Доказательство. Пусть прямая  $\ell$  задаётся параметрическим уравнением  $o + tv$ , где  $t$  пробегает  $\mathbb{R}$ ,  $o \in \ell$  — произвольно зафиксированная точка,  $v$  — вектор скорости прямой  $\ell$ . Точка  $q \in \ell$ , удовлетворяющая условию (1) очевидно единственна, если существует. С другой стороны, по предл. 3.1, применённому к векторам  $a = v$  и  $b = \overrightarrow{op}$ , на прямой  $\ell$  есть единственная такая точка  $q \in \ell$ , что векторы  $v$  и  $\overrightarrow{pq}$  перпендикулярны, см. рис. 3◊5. Тем самым, условие (2) выполняется для единственной точки  $q \in \ell$ . При этом для любой отличной от неё точки  $x \in \ell$  по теореме Пифагора  $|\overrightarrow{px}|^2 = |\overrightarrow{pq}|^2 + |\overrightarrow{qx}|^2 > |\overrightarrow{pq}|^2$ , откуда  $|x - p| > |q - p|$ . Тем самым, эта точка  $q$  одновременно удовлетворяет и условию (1).  $\square$

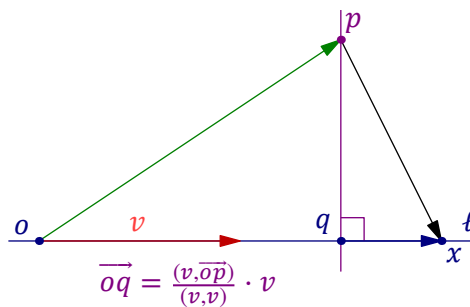


Рис. 3◊5.

Упражнение 3.5. Покажите, что на евклидовой плоскости через любую точку  $p$  проходит единственная прямая, перпендикулярная произвольно заданной прямой  $\ell$ .

**3.2. Ортонормальные базисы.** Векторы единичной длины принято называть *единичными*. Базис двумерного евклидова векторного пространства называется *ортонормальным*, если он состоит из двух перпендикулярных единичных векторов. С любой парой непропорциональных векторов  $a, b$  можно связать ортонормальный базис из векторов

$$e_1 = a/|a| \quad \text{и} \quad e_2 = b_{a^\perp}/|b_{a^\perp}|,$$

где  $b_{a^\perp} = b - a \cdot (a, b)/(a, a)$  — ортогональная проекция<sup>2</sup> вектора  $b$  на вектор  $a$ . Таким образом, на любой евклидовой плоскости есть ортонормальный базис.

Упражнение 3.6. Покажите, что каждый единичный вектор  $e$  на евклидовой плоскости включается ровно в два ортонормальных базиса  $(e, f)$  и  $(e, -f)$ , отличающиеся друг от друга ориентацией.

Предложение 3.3

Координаты вектора  $u = x_1 e_1 + x_2 e_2$  в ортонормальном базисе  $e_1, e_2$  равны его скалярным произведениям с базисными векторами:  $x_1 = (u, e_1)$ ,  $x_2 = (u, e_2)$ , а скалярное произведение векторов  $u = x_1 e_1 + x_2 e_2$  и  $w = y_1 e_1 + y_2 e_2$  вычисляется как в прим. 3.1 на стр. 35, т. е.  $(u, w) = x_1 y_1 + x_2 y_2$ .

<sup>1</sup> Она называется *ортогональной проекцией* точки  $p$  на прямую  $\ell$ .

<sup>2</sup> См. опр. 3.2 на стр. 36.

Доказательство. Первое утверждение доказывается скалярным умножением обеих частей равенства<sup>1</sup>  $u = x_1 e_1 + x_2 e_2$  на векторы  $e_1$  и  $e_2$ , второе — бесхитрым раскрытием скобок в выражении  $(x_1 e_1 + x_2 e_2, y_1 e_1 + y_2 e_2)$ .  $\square$

Пример 3.3 (уравнение прямой на евклидовой плоскости)

В координатах  $(x_1, x_2)$  относительно ортонормального базиса уравнение

$$\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 = c \quad (3-7)$$

Задаёт прямую, перпендикулярную вектору  $n = (\alpha_1, \alpha_2)$  и расположенную на расстоянии  $|c|/|n|$  от начала координат в направлении этого вектора при  $c > 0$  и в противоположном направлении при  $c < 0$ . Действительно, соотношение (3-7) означает, что скалярное произведение переменного вектора  $x = (x_1, x_2)$  с фиксированным вектором  $n$  постоянно и равно  $(n, x) = c$ , т. е. прямая (3-7) замечается концами всех векторов  $x$ , имеющих заданную ортогональную проекцию  $x_n = n \cdot (x, n) / (n, n) = n \cdot c / |n|^2$  на вектор  $n$ , см. рис. 3◊6. Длина этой проекции равна  $\sqrt{(x_n, x_n)} = |c|/|n|$ , а её направление определяется знаком константы  $c$ : при  $c > 0$  проекция сонаправлена с  $n$ , а при  $c < 0$  — противоположно направлена. При  $c = 0$  прямая (3-7) проходит через начало координат. К примеру, *срединный перпендикуляр* к отрезку  $[a, b]$ , т. е. прямая перпендикулярная вектору  $a - b$  и проходящая через точку  $(a + b)/2$ , задаётся уравнением

$$(a - b, x) = (a - b, a + b)/2 = (|a|^2 - |b|^2)/2. \quad (3-8)$$

Две прямые  $(n, x) = c_1$  и  $(n, x) = c_2$ , перпендикулярные одному и тому же вектору  $n$  удалены друг от друга на расстояние  $|c_1 - c_2|/|n|$ . В частности, расстояние от заданной точки  $a$  до прямой  $(n, x) = c$ , равное расстоянию от этой прямой до параллельной ей и проходящей через точку  $a$  прямой  $(n, x) = (n, a)$ , можно вычислять как  $|c - (n, a)|/|n|$ .

Упражнение 3.7. Покажите, что биссектрисы углов, возникающих при пересечении прямых  $(n_1, x) = c_1$  и  $(n_2, x) = c_2$ , задаются уравнениями  $|n_2| \cdot (c_1 - (n_1, x)) = \pm |n_1| \cdot (c_2 - (n_2, x))$  и перпендикулярны друг другу.

Предложение 3.4 (определитель Грама)

Если векторы  $e_1, e_2$  составляют ортонормальный базис евклидова пространства  $V$ , то для любых векторов  $u, w \in V$  и любой ненулевой функции площади  $s : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$  выполняется равенство

$$\frac{s^2(u, w)}{s^2(e_1, e_2)} = \det \begin{pmatrix} (u, u) & (u, w) \\ (w, u) & (w, w) \end{pmatrix}$$

(определитель в правой части называется *определителем Грама* векторов  $u, w$ ).

Доказательство. Пусть  $u = x_1 e_1 + x_2 e_2$ ,  $w = y_1 e_1 + y_2 e_2$ . Тогда по сл. 1.2 на стр. 15

$$s(u, w)/s(u, w) = \det(u, w) = x_1 y_2 - x_2 y_1.$$

<sup>1</sup>Ср. с доказательством лем. 1.2 на стр. 13.

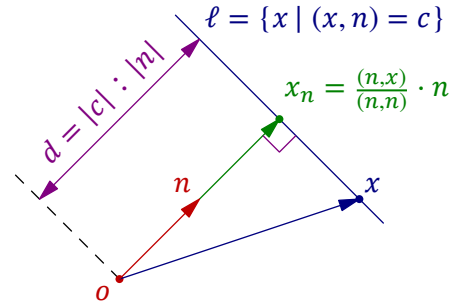


Рис. 3◊6. Прямая  $(n, x) = c$ .

С другой стороны,  $(u, u) \cdot (w, w) - (u, w)^2 = (x_1^2 + x_2^2)(y_1^2 + y_2^2) - (x_1y_1 + x_2y_2)^2 = (x_1y_2)^2 + (x_2y_1)^2 - 2x_1y_1x_2y_2 = (x_1y_2 - x_2y_1)^2$ .  $\square$

УПРАЖНЕНИЕ 3.8. Выведите из предл. 3.4 другое доказательство неравенства Коши – Буняковского – Шварца (3-4).

**3.2.1. Евклидова площадь.** Из предл. 3.4 вытекает, что для любых двух ортонормальных базисов  $(e'_1, e'_2)$  и  $(e''_1, e''_2)$  на евклидовой плоскости и любой ненулевой формы площади  $s$  отношение

$$\frac{s^2(e''_1, e''_2)}{s^2(e'_1, e'_2)} = \det \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = 1,$$

откуда  $s(e''_1, e''_2) = \pm s(e'_1, e'_2)$ , т. е. все ортонормальные базисы имеют равную по абсолютной величине площадь. Функция площади  $s$  на евклидовой плоскости  $\mathbb{R}^2$  называется *евклидовой*, если  $s(e_1, e_2) = 1$  для стандартного ортонормального базиса  $e_1 = (1, 0)$ ,  $e_2 = (0, 1)$ . Всюду далее обозначения  $s(u, v)$  и  $s(abc)$  применительно в евклидову пространство  $\mathbb{R}^2$  по умолчанию означают именно евклидову площадь. Ортонормальные базисы площади 1 называются *положительно ориентированными*, а площади  $-1$  — *отрицательно ориентированными*.

УПРАЖНЕНИЕ 3.9. Убедитесь, что  $|\det(a, b)| = |a| \cdot |b_{a^\perp}|$ , т. е. модуль евклидовой площади параллелограмма равен произведению длин основания и опущенной на него высоты.

**3.3. Углы и тригонометрия.** Пусть векторы  $e, e^\perp$  составляют положительно ориентированный ортонормальный базис. Коэффициенты  $x, y$  разложения  $f = x \cdot e + y \cdot e^\perp$  произвольного единичного вектора  $f$  по этому базису удовлетворяют соотношению  $x^2 + y^2 = 1$  и лежат на отрезке  $[-1, 1]$ . Следовательно, существует такое число  $\alpha \in \mathbb{R}$ , что  $x = \cos \alpha$  и  $y = \sin \alpha$ , причём любые два числа  $\alpha', \alpha''$  с этим свойством различаются на целое число оборотов по единичной окружности, т. е.  $\alpha' - \alpha'' = 2\pi k$ , где  $k \in \mathbb{Z}$ , см. рис. 3♦7. Множество всех таких чисел называется *ориентированным углом* между единичными векторами  $e$  и  $f$  и обозначается

$$\sphericalangle(e, f) \stackrel{\text{def}}{=} \{ \alpha \in \mathbb{R} \mid f = e \cdot \cos \alpha + e^\perp \cdot \sin \alpha \}. \quad (3-9)$$

Функции  $\cos t$  и  $\sin t$  принимают на всех числах из  $\sphericalangle(e, f)$  одни и те же значения, которые мы будем записывать как  $\cos \sphericalangle(e, f)$  и  $\sin \sphericalangle(e, f)$ . Таким образом, для любого положительно ориентированного ортонормального базиса  $e, e^\perp$  и любого единичного вектора  $f$  выполняются соотношения<sup>1</sup>

$$\begin{aligned} f &= e \cdot \cos \sphericalangle(e, f) + e^\perp \cdot \sin \sphericalangle(e, f) \\ \cos \sphericalangle(e, f) &= (e, f) = s(f, e^\perp) \\ \sin \sphericalangle(e, f) &= s(e, f) = (e^\perp, f) \end{aligned} \quad (3-10)$$

Обратите внимание, что  $(e, f) = (f, e)$  и  $s(e, f) = -s(f, e)$ , откуда  $\cos \sphericalangle(e, f) = \cos \sphericalangle(f, e)$ ,  $\sin \sphericalangle(e, f) = -\sin \sphericalangle(f, e)$ . Тем самым,  $\sphericalangle(e, f) = -\sphericalangle(f, e)$ , т. е. углы, откладываемые против часовой стрелки считаются со знаком «+», а по часовой — со знаком «-».

УПРАЖНЕНИЕ 3.10. Убедитесь, что единичный вектор  $f = x \cdot e + y \cdot e^\perp$  дополняется до положительно ориентированного ортонормального базиса  $f, f^\perp$  вектором  $f^\perp = -ye + xe^\perp$  и выведите отсюда соотношения  $\cos \sphericalangle(e, f^\perp) = -\sin \sphericalangle(e, f)$  и  $\sin \sphericalangle(e, f^\perp) = \cos \sphericalangle(e, f)$ .

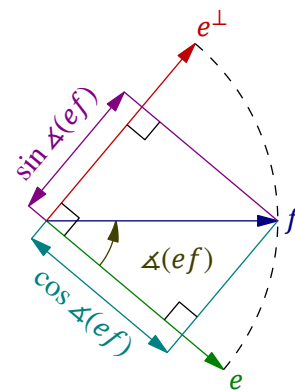


Рис. 3♦7.

<sup>1</sup>Вторая и третья строки вычисляют коэффициенты написанного в первой строке разложения по формулам из лем. 1.2 на стр. 13 и предл. 3.3 на стр. 38.





**3.3.1. Окружности.** ГМТ  $x$ , удалённых от данной точки на заданное расстояние  $\rho$ , называется *окружностью* радиуса  $\rho$  с центром  $c$  и обозначается  $S(\rho, c)$ . Таким образом, точка  $x$  с радиус вектором  $\overrightarrow{cx} = u$  лежит на окружности  $S(\rho, c)$  если и только если  $(u, u) = \rho^2$ . Каждая проходящая через центр прямая с направляющим вектором  $v$  длины  $|v| = \rho$  пересекает окружность в точках  $c \pm v$ , см. рис. 3◊8. Отрезок с концами в этих точках называется *диаметром*. Поскольку для вектора  $v$  длины  $\rho$  и любого вектора  $u$  выполняется равенство  $(u + v, u - v) = (u, u) - \rho^2$ , точка  $x = c + u$  лежит на окружности если и только если  $(u + v, u - v) = 0$ . Таким образом, окружность  $S(\rho, c)$  представляет собою ГМТ  $x$ , из которых её диаметр виден под прямым углом, см. рис. 3◊8.

УПРАЖНЕНИЕ 3.12. При помощи рис. 3◊8 покажите, что дуга окружности видна из любой не лежащей на этой дуге точки окружности под вдвое меньшим углом, чем из центра.

**3.3.2. Двойное отношение точек на окружности.** Двойное отношение конкурентных прямых<sup>1</sup>  $\ell_1 = (op_1)$ ,  $\ell_2 = (op_2)$ ,  $\ell_3 = (op_3)$ ,  $\ell_4 = (op_4)$  выражается по формуле (3-13) через углы между этими прямыми:

$$[\ell_1, \ell_2, \ell_3, \ell_4] = \frac{s(\overrightarrow{op_1}, \overrightarrow{op_3})}{s(\overrightarrow{op_2}, \overrightarrow{op_3})} \cdot \frac{s(\overrightarrow{op_1}, \overrightarrow{op_4})}{s(\overrightarrow{op_2}, \overrightarrow{op_4})} = \frac{\sin \angle p_1 op_3}{\sin \angle p_2 op_3} \cdot \frac{\sin \angle p_1 op_4}{\sin \angle p_2 op_4},$$

что ещё раз подтверждает его независимость от выбора точек  $p_i \in \ell_i$ . Если все пять точек  $o, p_1, \dots, p_4$  лежат на одной окружности с центром в точке  $c$ , как на рис. 3◊9, то согласно упр. 3.12 вписанные углы с вершиной  $o$  в предыдущем равенстве можно заменить центральными углами:

$$\frac{\sin \angle p_1 op_3}{\sin \angle p_2 op_3} \cdot \frac{\sin \angle p_1 op_4}{\sin \angle p_2 op_4} = \frac{\sin \angle p_1 cp_3}{\sin \angle p_2 cp_3} \cdot \frac{\sin \angle p_1 cp_4}{\sin \angle p_2 cp_4}.$$

Стоящее в правой части число не зависит от точки  $p$ . Оно обозначается  $[p_1, p_2, p_3, p_4]$  и называется *двойным отношением четырёх точек окружности*.

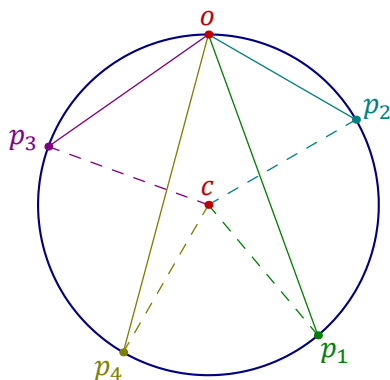


Рис. 3◊9.  $[p_1, p_2, p_3, p_4]$ .

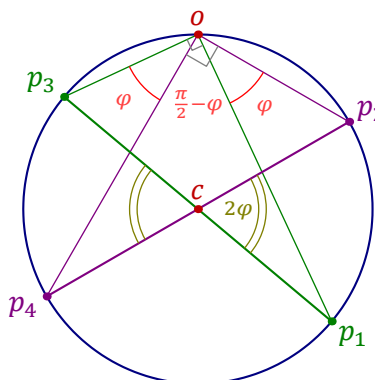


Рис. 3◊10.  $[p_1, p_2, p_3, p_4] = -\operatorname{tg}^2(\varphi/2)$ .

УПРАЖНЕНИЕ 3.13. Покажите, что когда отрезки  $[p_1, p_3]$  и  $[p_2, p_4]$  являются диаметрами, как на рис. 3◊10, двойное отношение выражается через угол  $\varphi = \angle(\overrightarrow{cp_1}, \overrightarrow{cp_2})$  между ними по формуле  $[p_1, p_2, p_3, p_4] = -\sin^2 \varphi / \cos^2 \varphi = -\operatorname{tg}^2(\varphi/2)$ .

**3.4. Движения.** Отображение  $\varphi : \mathbb{A}(V) \rightarrow \mathbb{A}(V)$  евклидовой плоскости в себя называется *движением* или *изометрией*, если оно сохраняет расстояние, т. е.  $|p - q| = |f(p) - f(q)|$  для любых двух точек  $p, q \in \mathbb{A}^2$ . Поскольку каждый отрезок  $[a, b]$  представляет собою ГМТ  $x$ , для которых<sup>2</sup>

<sup>1</sup>См. п° 2.2.1 на стр. 29.

<sup>2</sup>См. п° 3.1.1 на стр. 37.

$|a - x| + |x - b| = |a - b|$ , каждое движение биективно переводит любой отрезок  $[a, b]$  в отрезок  $[\varphi(a), \varphi(b)]$  той же длины. Тем самым, все движения биективны и переводят прямые в прямые. Согласно [сл. 2.3](#) на стр. 34 движения являются аффинными преобразованиями. В частности, каждое движение однозначно определяется своим действием на любой треугольник.

**УПРАЖНЕНИЕ 3.14.** Докажите школьные признаки конгруэнтности треугольников по трём сторонам, по стороне и двум прилежащим к ней углам и по двум сторонам и углу между ними<sup>1</sup>.

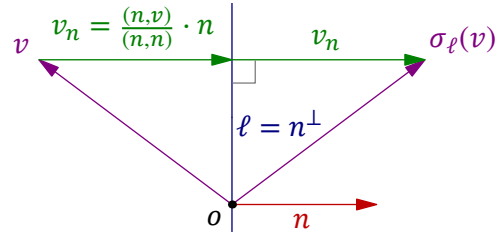
Движения образуют в аффинной группе  $\text{Aff}(V)$  подгруппу, которая называется *группой движений* или *группой изометрий* евклидова аффинного пространства  $\mathbb{A}(V)$  и обозначается  $\text{Isom}\mathbb{A}(V)$ . Группа параллельных переносов  $T$ , очевидно, содержится в  $\text{Isom}\mathbb{A}(V)$ .

**3.4.1. Линейные ортогональные преобразования.** Фиксируем какую-нибудь начальную точку  $o \in \mathbb{A}(V)$  и представим движение  $\varphi : \mathbb{A}(V) \rightarrow \mathbb{A}(V)$  в виде композиции<sup>2</sup>  $\varphi = \tau_v \circ \varphi_o$  параллельного переноса на вектор  $v = \overline{o\varphi(o)}$  и линейного преобразования  $\varphi_o : \overline{o\vec{x}} \mapsto D_\varphi(\overline{o\vec{x}})$ , задаваемого дифференциалом  $D_\varphi : V \simeq V$  движения  $\varphi$  и оставляющего точку  $o$  на месте. Поскольку линейное преобразование  $\varphi_o = \tau_{-v} \circ \varphi$  тоже является движением, оно сохраняет длины векторов, а следовательно и скалярные произведения: для всех  $u, w \in V$  имеем<sup>3</sup>  $(\varphi(u), \varphi(w)) = (|\varphi(u+w)|^2 - |\varphi(u)|^2 - |\varphi(w)|^2) / 2 = (|u+w|^2 - |u|^2 - |w|^2) / 2 = (u, w)$ . Сохраняющие скалярное произведение линейные преобразования евклидова векторного пространства  $V$  называются *ортогональными* или *изометрическими*. Так как ортогональное преобразование переводит ортонормальный базис в ортонормальный, оно сохраняет абсолютную величину евклидовой площади и по [предл. 2.4](#) на стр. 27 имеет определитель  $\pm 1$ . Ортогональные преобразования определителя  $+1$  сохраняют ориентацию и называются *собственными* или *специальными*. Ортогональные преобразования определителя  $-1$  меняют ориентацию и называются *несобственными*.

**ПРИМЕР 3.4 (ОТРАЖЕНИЯ)**

Каждый отличный от нуля вектор  $n \in V$  задаёт несобственное ортогональное преобразование  $\sigma_\ell : V \rightarrow V$ , переводящее вектор  $n$  в  $\sigma_n(n) = -n$  и тождественно действующее на ортогональной этому вектору прямой  $\ell = n^\perp$ , которая задаётся в ортонормальном базисе уравнением  $(n, x) = 0$ . Мы будем называть преобразование  $\sigma_n$  *отражением*<sup>4</sup> в прямую  $\ell$ . Отражение  $\sigma_\ell$  переводит каждый вектор  $v \in V$  в вектор  $\sigma_\ell(v)$ , который имеет ту же нормальную составляющую<sup>5</sup> относительно  $n$ , что и  $v$ , однако противоположную по знаку ортогональную проекцию на  $n$ , см. [рис. 3◊11](#). Тем самым,

$$\sigma_\ell(v) = v - 2 \frac{(n, v)}{(n, n)} \cdot n. \quad (3-14)$$



**Рис. 3◊11.** Отражение  $\sigma_\ell$ .

**УПРАЖНЕНИЕ 3.15.** Проверьте прямым вычислением, что преобразование (3-14) линейно и сохраняет скалярные произведения.

<sup>1</sup>Т. е. покажите, что в каждом из этих трёх случаев единственное аффинное преобразование, переводящее вершины одного треугольника в соответствующие вершины другого, является движением.

<sup>2</sup>См. [предл. 2.7](#) на стр. 31.

<sup>3</sup>См. формулу (3-1) на стр. 35.

<sup>4</sup>В школьном курсе его обычно называют *осевой симметрией*.

<sup>5</sup>См. [опр. 3.2](#) на стр. 36.

## Предложение 3.5

Каждое несобственное ортогональное линейное преобразование плоскости является отражением.

Доказательство. Поскольку несобственное преобразование  $\varphi$  не тождественно,  $\varphi(v) \neq v$  для некоторого ненулевого вектора  $v \in V$ . Так как  $\varphi$  сохраняет начальную точку  $o$  и середину  $s$  отрезка  $[v, \varphi(v)]$ , оно действует на треугольник  $\Delta osv$  так же, как отражение в срединном перпендикуляре  $(os)$  к отрезку  $[v, \varphi(v)]$ . Поэтому  $\varphi = \sigma_{(os)}$ .  $\square$

## Предложение 3.6

Каждое собственное ортогональное линейное преобразование плоскости является поворотом.

Доказательство. Если собственное ортогональное линейное преобразование  $\varphi : V \rightarrow V$  переводит единичный вектор  $e_1$  в вектор  $f_1 = \varphi(e_1)$ , то оно переводит вектор  $e_2$ , дополняющий  $e_1$  до положительно ориентированного ортонормального базиса, в вектор  $f_2$ , дополняющий  $f_1$  до положительно ориентированного базиса, как на рис. 3◊12. Тем самым,  $\varphi$  представляет собою поворот на ориентированный угол  $\vartheta = \sphericalangle(e_1, f_1)$ .  $\square$

Упражнение 3.16. Убедитесь, что матрица<sup>1</sup> поворота против часовой стрелки на угол  $\vartheta$  имеет в любом положительно ориентированном ортонормальном базисе вид  $\begin{pmatrix} \cos \vartheta & -\sin \vartheta \\ \sin \vartheta & \cos \vartheta \end{pmatrix}$ .

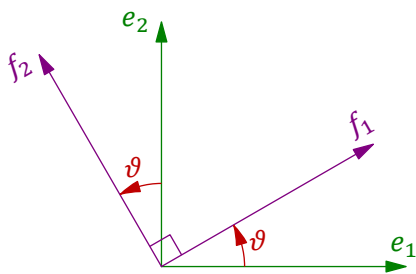


Рис. 3◊12. Поворот.

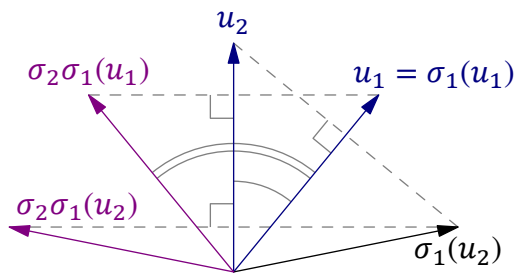


Рис. 3◊13. Композиция отражений.

Упражнение 3.17. Покажите, что композиция  $\sigma_2 \circ \sigma_1$  отражений в прямых с векторами скоростей  $u_1$  и  $u_2$  является поворотом на угол  $2\sphericalangle(u_1, u_2)$  в направлении от  $u_1$  к  $u_2$ , см. рис. 3◊13.

**3.4.2. Описание изометрий аффинной евклидовой плоскости.** Из предыдущего вытекает, что любое несобственное движение евклидовой аффинной плоскости является композицией  $\tau_w \circ \sigma_\ell$  отражения и сдвига, а любое собственное — композицией  $\tau_u \circ \varrho_{o,\vartheta}$  сдвига с поворотом  $\varrho_{o,\vartheta}$  вокруг некоторой точки  $o$  на какой-то угол  $\vartheta$ .

Собственное движение  $\varphi = \tau_u \circ \varrho_{o,\vartheta}$  с ненулевым углом  $\vartheta$  имеет неподвижную точку — конец вектора  $\overrightarrow{pq} = u$ , который является диагональю ромба с вершиной  $o$  и ориентированным углом  $\sphericalangle(\overrightarrow{op}, \overrightarrow{oq}) = -\vartheta$ , см. рис. 3◊14 на стр. 45. По предл. 3.5 преобразование  $\varphi$  является поворотом вокруг точки  $q$ . Так как поворот вокруг  $q$  на угол  $\vartheta$  переводит  $o$  в  $\varphi(o)$ , мы заключаем, что  $\varphi = \varrho_{q,\vartheta}$ .

Упражнение 3.18. Найдите координаты точки  $q$  относительно положительно ориентированного ортонормального репера  $(o; u_1, u_2)$ , вектор  $u_1$  которого сонаправлен с  $u$ .

<sup>1</sup>См. п° 2.1.2 на стр. 25.

Несобственное движение  $\varphi = \tau_w \circ \sigma_\ell$  является композицией  $\varphi = \tau_{w_\ell} \circ \sigma_{\tau_{w/2}(\ell)}$  отражения относительно сдвинутой на половину вектора  $w$  прямой  $\tau_{w/2}(\ell)$  и параллельного этой прямой сдвига на вектор  $w_\ell$  — ортогональную проекцию вектора  $w$  на прямую  $\ell$ , см. рис. 3◊15. Действительно, композиции  $\tau_w \circ \sigma_\ell$  и  $\tau_{w_\ell} \circ \sigma_{\tau_{w/2}(\ell)}$  одинаково действуют на аффинный репер  $(o; v, n)$  с началом в произвольной точке  $o \in \ell$  и ортонормальными базисными векторами  $v, n$ , направленными, соответственно, параллельно и перпендикулярно прямой  $\ell$ , как на рис. 3◊15.

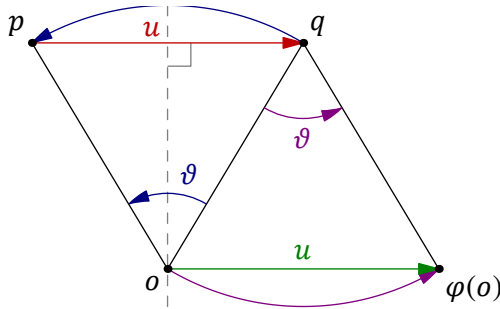


Рис. 3◊14.  $\tau_u \circ \rho_{o,\vartheta} = \rho_{\varphi(o),\vartheta}$ .

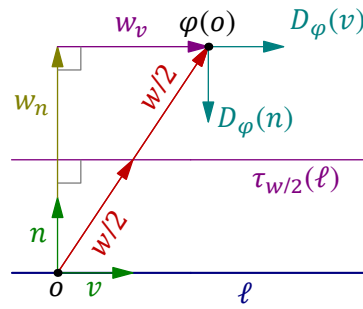


Рис. 3◊15.  $\tau_w \circ \sigma_\ell = \tau_{w_\ell} \circ \sigma_{\tau_{w/2}(\ell)}$ .

Композиция отражения со сдвигом вдоль оси этого отражения называется *скользящей симметрией*. Представление несобственного движения  $\varphi$  в виде скользящей симметрии

$$\lambda_{v,\ell} \stackrel{\text{def}}{=} \tau_v \circ \sigma_\ell = \sigma_\ell \circ \tau_v, \quad \text{где } v \parallel \ell,$$

замечательно тем, что отражение и сдвиг в нём коммутируют друг с другом, а само это представление единственно: прямая  $\ell$  однозначно определяется преобразованием  $\varphi$  как геометрическое место середин отрезков  $[p, \varphi(p)]$ , после чего сдвиг  $\tau_v = \varphi \circ \sigma_\ell = \sigma_\ell \circ \varphi$  тоже однозначно восстанавливается по  $\varphi$  и  $\ell$ . Суммируя сказанное, мы получаем следующее классическое описание движений плоскости.

**ТЕОРЕМА 3.1 (ТЕОРЕМА ШАЛЯ<sup>1</sup>)**

Всякое собственное движение плоскости является сдвигом или поворотом, а всякое несобственное — скользящей симметрией. □

**УПРАЖНЕНИЕ 3.19.** Покажите, что композиция отражения относительно прямой  $\ell_1$  с последующим отражением относительно параллельной ей прямой  $\ell_2$  является сдвигом на удвоенное расстояние между  $\ell_1$  и  $\ell_2$  в направлении от  $\ell_1$  к  $\ell_2$  вдоль их общей нормали.

**СЛЕДСТВИЕ 3.3**

Любое собственное движение может быть (многими способами) разложено в композицию двух отражений, а несобственное — в композицию трёх. □

**3.5. Комплексные числа.** Обозначим через  $\mathbb{C}$  двумерное евклидово пространство с фиксированным ортонормальным базисом, векторы которого будем обозначать  $1$  и  $i$ . В разложении произвольного вектора  $z \in \mathbb{C}$  по этому базису вектор  $1$  обычно опускают и пишут  $z = x + iy$ , имея в виду вектор с координатами  $(x, y)$  в базисе  $1, i$ . Такой вектор имеет длину  $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$ . Вещественные числа  $x, y$  и  $|z|$  называются, соответственно, *действительной частью*, *мнимой*

<sup>1</sup>Michel Floréal Chasles (15.XI.1793 – 18.XII.1880) — выдающийся французский геометр.

частью и модулем комплексного числа  $z \in \mathbb{C}$ . Ориентированный угол  $\angle(1, z)$  между базисным вектором  $1$  и вектором  $z$  называется *аргументом* числа  $z$  и часто обозначается через<sup>1</sup>

$$\text{Arg}(z) = \{ \alpha \in \mathbb{R} \mid z = |z| \cos \alpha + i |z| \sin \alpha \}.$$

Векторы  $z \in \mathbb{C}$  называют *комплексными числами*, поскольку их можно не только складывать, но и умножать. Произведение  $z_1 z_2 \in \mathbb{C}$  определяется как вектор, модуль которого равен произведению модулей, а аргумент — сумме аргументов сомножителей:

$$\begin{aligned} |z_1 z_2| &\stackrel{\text{def}}{=} |z_1| \cdot |z_2| \\ \text{Arg}(z_1 z_2) &\stackrel{\text{def}}{=} \text{Arg}(z_1) + \text{Arg}(z_2) = \{ \vartheta_1 + \vartheta_2 \mid \vartheta_1 \in \text{Arg}(z_1), \vartheta_2 \in \text{Arg}(z_2) \} \end{aligned} \quad (3-15)$$

Базисный вектор  $1$  является нейтральным элементом относительно умножения, что оправдывает его опускание в формулах вроде  $z = x + yi = |z| \cdot (\cos \alpha + i \sin \alpha)$ . Обратите внимание, что оба равенства суть верные равенства в  $\mathbb{C}$ , если понимать в них сложение и умножение как сложение и умножение комплексных чисел и считать поле вещественных чисел  $\mathbb{R}$  вложенным в плоскость  $\mathbb{C}$  в виде координатной прямой<sup>2</sup>  $\mathbb{R} \cdot 1 \subset \mathbb{C}$ .

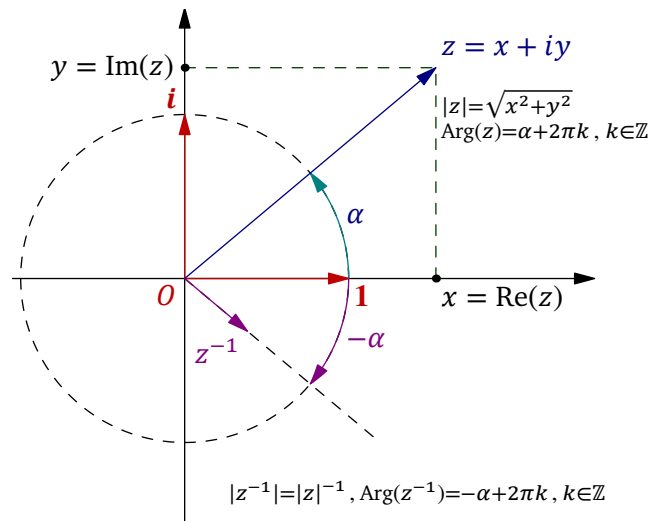


Рис. 3◊16. Числа  $z = |z| \cdot (\cos \alpha + i \sin \alpha)$  и  $z^{-1} = |z|^{-1}(\cos \alpha - i \sin \alpha)$ .

Обратным по умножению к ненулевому вектору  $z \in \mathbb{C}$  является вектор  $z^{-1}$  с противоположным аргументом  $\text{Arg}(z^{-1}) = -\text{Arg}(z)$  и обратным модулем  $|z^{-1}| = |z|^{-1}$ , см. рис. 3◊16.

#### Предложение 3.7

Комплексные числа образуют поле.

Доказательство. Из всех свойств поля<sup>3</sup> нам остаётся проверить только распределительный закон  $a(b + c) = ab + ac$ . На геометрическом языке это равенство означает, что задаваемое

<sup>1</sup>Напомню, что ориентированный угол — это множество всех вещественных чисел, имеющих заданные синус и косинус, как в форм. (3-9) на стр. 40. Любые два числа из этого множества различаются на целое число оборотов по единичной окружности.

<sup>2</sup>Обратите внимание, что правило умножения отрицательных вещественных чисел («минус на минус даёт плюс») согласуется с формулами (3-15).

<sup>3</sup>См. <http://gorod.bogomolov-lab.ru/ps/stud/algebra-1/1314/lec-02.pdf>.

умножением на фиксированный вектор  $a \in \mathbb{C}$  отображение  $\mu_a : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}, z \mapsto az$ , аддитивно, т. е.  $\mu_a(b + c) = \mu_a(b) + \mu_a(c)$ . Отображение  $\mu_a$  представляет собою *поворотную гомотетию* — композицию поворота на угол  $\text{Arg}(a)$  вокруг нуля и гомотетии с коэффициентом  $|a|$  и центром в нуле. Так как и поворот, и гомотетия линейны, линейно и  $\mu_a$ .  $\square$

**3.5.1. Алгебраическая запись комплексных чисел.** Поскольку базисный вектор  $i$  удовлетворяет соотношению  $i^2 = -1$  и умножение дистрибутивно по отношению к сложению, в поле  $\mathbb{C}$  выполняется равенство

$$z_1 z_2 = (x_1 + iy_1)(x_2 + iy_2) = (x_1 x_2 - y_1 y_2) + i(x_1 y_2 + x_2 y_1). \quad (3-16)$$

Обратное к числу  $z = x + iy$  число  $z^{-1}$  равно

$$z^{-1} = \frac{1}{x + iy} = \frac{x - iy}{(x + iy)(x - iy)} = \frac{x - iy}{x^2 + y^2} = \frac{x}{|z|^2} - i \frac{y}{|z|^2}. \quad (3-17)$$

Число  $\bar{z} \stackrel{\text{def}}{=} x - iy$  называется *комплексно сопряжённым* к числу  $z = x + iy$ . В терминах комплексного сопряжения

$$z^{-1} = \bar{z} / |z|^2.$$

Геометрически, комплексное сопряжение  $z \mapsto \bar{z}$  представляет собою отражение комплексной плоскости относительно вещественной оси  $\mathbb{R} \cdot 1$ . С алгебраической точки зрения сопряжение является *инволютивным автоморфизмом* поля  $\mathbb{C}$ , т. е. для всех  $z, z_1, z_2 \in \mathbb{C}$

$$\overline{\bar{z}} = z, \quad \overline{z_1 + z_2} = \bar{z}_1 + \bar{z}_2, \quad \overline{z_1 z_2} = \bar{z}_1 \bar{z}_2.$$

**УПРАЖНЕНИЕ 3.20.** Покажите, что следующие свойства автоморфизма<sup>1</sup>  $\varphi$  поля  $\mathbb{C}$  эквивалентны: а)  $\varphi(\mathbb{R}) \subset \mathbb{R}$  б)  $\varphi$  является линейным преобразованием двумерного векторного пространства  $\mathbb{C}$  над полем  $\mathbb{R}$  в) либо  $\varphi(z) = z$  для всех  $z \in \mathbb{C}$ , либо  $\varphi(z) = \bar{z}$  для всех  $z \in \mathbb{C}$ .

**3.6. Преобразования подобия.** Отображение  $\varphi : \mathbb{A}^2(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{A}^2(\mathbb{R})$  евклидовой аффинной плоскости  $\mathbb{A}^2 = \mathbb{A}(\mathbb{R}^2)$  в себя называется *преобразованием подобия* или просто *подобием*, если оно изменяет все расстояния между точками в одно и тоже число раз, т. е. когда существует такая положительная вещественная константа  $\gamma = \gamma(\varphi)$ , зависящая только от  $\varphi$  и называемая *коэффициентом подобия*, что  $|\varphi(p) - \varphi(q)| = \gamma|p - q|$  для всех точек  $p, q \in \mathbb{A}^2$ . Например, каждое движение является подобием с коэффициентом 1. Подобия образуют группу преобразований, которая называется *группой подобий*. Тот же аргумент, что и для движений<sup>2</sup>, показывает, что подобия переводят прямые в прямые и, стало быть, являются аффинными преобразованиями.

**УПРАЖНЕНИЕ 3.21.** Убедитесь в этом и в том, что подобия переводят окружности в окружности. Подобия, сохраняющие ориентацию, называются *собственными*, а оборачивающие ориентацию — *несобственными*.

**ЛЕММА 3.1**

Собственные подобия сохраняют ориентированные углы, а несобственные изменяют знак ориентированных углов.

<sup>1</sup>См. н° 2.4.1 на стр. 32.

<sup>2</sup>См. н° 3.4 на стр. 42.

Доказательство. Беря композицию подобия  $\varphi$  с параллельным переносом, мы можем и будем считать, что оно сохраняет начало координат, т. е. является линейным преобразованием подлежащего векторного пространства  $V \simeq \mathbb{R}^2$ . Тогда для любых двух векторов  $u, w \in V$  имеем<sup>1</sup>

$$\begin{aligned} (\varphi(u), \varphi(w)) &= |\varphi(u) + \varphi(w)|^2 - |\varphi(u)|^2 - |\varphi(w)|^2 = \\ &= |\varphi(u+w)|^2 - |\varphi(u)|^2 - |\varphi(w)|^2 = \gamma^2(|u+w|^2 - |u|^2 - |w|^2) = \gamma^2(u, w), \end{aligned}$$

откуда

$$\cos \sphericalangle(\varphi(u), \varphi(w)) = \frac{(\varphi(u), \varphi(w))}{|\varphi(u)| \cdot |\varphi(w)|} = \frac{(u, w)}{|u| \cdot |w|} = \cos \sphericalangle(u, w),$$

т. е.  $\sphericalangle(\varphi(u), \varphi(w)) = \pm \sphericalangle(u, w)$ . □

**3.6.1. Подобия как аффинные преобразования комплексной прямой.** Фиксируем в двумерном евклидовом пространстве  $V$  любой ортонормальный базис, векторы которого обозначим через  $1$  и  $i$ , и отождествим это пространство с полем комплексных чисел  $\mathbb{C}$ , как в п° 3.5 выше. Это позволяет рассматривать вещественную аффинную плоскость  $\mathbb{A}^2(\mathbb{R}) = \mathbb{A}(V)$  как комплексную аффинную прямую  $\mathbb{A}^1(\mathbb{C})$ . Мы собираемся показать, что группа собственных подобий вещественной плоскости  $\mathbb{A}^2(\mathbb{R})$  совпадает с аффинной группой комплексной прямой  $\mathbb{A}^1(\mathbb{C})$ .

Предложение 3.8

Каждое собственное подобие  $\varphi : \mathbb{A}^1(\mathbb{C}) \rightarrow \mathbb{A}^1(\mathbb{C})$  является комплексным аффинным преобразованием вида  $z \mapsto az + b$ , а каждое несобственное — полуаффинным преобразованием вида  $z \mapsto a\bar{z} + b$ , где числа  $a, b \in \mathbb{C}$  однозначно определяются подобием  $\varphi$ . Наоборот, для любых  $a, b \in \mathbb{C}$  преобразования вида  $z \mapsto az + b$  и  $z \mapsto a\bar{z} + b$  являются, соответственно, собственным и несобственным подобиями.

Доказательство. Беря композицию собственного подобия  $\varphi$  со сдвигом, мы можем и будем считать, что  $\varphi$  оставляет на месте нуль  $0 \in \mathbb{C}$ . Так как  $\varphi$  сохраняет ориентированные углы и умножает длины векторов на фиксированное положительное число  $\gamma \in \mathbb{R}$ , преобразование  $\varphi$  является поворотной гомотетией, т. е. умножением на комплексное число  $a = \varphi(1)$ , что доказывает первое утверждение. Для несобственного подобия  $\varphi$  преобразование  $z \mapsto \varphi(\bar{z})$ , являющееся композицией  $\varphi$  с отражением в действительной оси, является собственным подобием и по уже доказанному имеет вид  $z \mapsto az + b$ . Поэтому  $\varphi(z) = a\bar{z} + b$ . □

Упражнение 3.22. Убедитесь в справедливости последнего утверждения из предл. 3.8.

Следствие 3.4

Для любых двух пар различных точек  $a \neq b$  и  $c \neq d$  имеется единственное собственное подобие переводящее  $a$  в  $c$  и  $b$  в  $d$ .

Доказательство. Неизвестные коэффициенты  $x_1, x_2 \in \mathbb{C}$  искомого аффинного преобразования  $z \mapsto x_1 z + x_2$  удовлетворяют системе линейных уравнений

$$\begin{cases} x_1 a + x_2 = c \\ x_1 b + x_2 = d, \end{cases}$$

имеющей в поле  $\mathbb{C}$  единственное решение<sup>2</sup>  $x_1 = (c - d)/(a - b)$ ,  $x_2 = (ad - bc)/(a - b)$ . □

<sup>1</sup>Ср. с аналогичной выкладкой из п° 3.4.1 на стр. 43.

<sup>2</sup>См. лем. 1.2 на стр. 13.



Следствие 3.5

Всякое собственное подобие является либо сдвигом, либо поворотной гомотетией.

Доказательство. Аффинное преобразование  $z \mapsto az + b$  с нетождественным дифференциалом  $a \neq 1$  имеет неподвижную точку  $c = b/(1 - a)$  и, стало быть, является поворотной гомотетией относительно этой точки.  $\square$

## §4. Многомерие

**4.1. Базисы и размерность.** Рассмотрим произвольное векторное пространство  $V$  над любым полем  $\mathbb{k}$ . Будем говорить, что вектор  $v \in V$  *линейно выражается* через векторы  $w_1, w_2, \dots, w_m$ , если  $v = \lambda_1 w_1 + \lambda_2 w_2 + \dots + \lambda_m w_m$  для некоторых  $\lambda_i \in \mathbb{k}$ . Правая часть этой формулы называется *линейной комбинацией* векторов  $w_i \in V$  с коэффициентами  $\lambda_i \in \mathbb{k}$ . Набор векторов  $w_1, w_2, \dots, w_m \in V$  называется *порождающим* векторное пространство  $V$ , если каждый вектор  $v \in V$  линейно через него выражается. Векторное пространство, порождённое конечным набором векторов, называется *конечномерным*. Порождающий набор векторов  $e_1, \dots, e_n \in V$  называется *базисом* векторного пространства  $V$ , если любой вектор  $v \in V$  линейно выражается через него *единственным* образом, т. е. если из равенства

$$x_1 e_1 + x_2 e_2 + \dots + x_n e_n = y_1 e_1 + y_2 e_2 + \dots + y_n e_n$$

вытекает, что  $x_i = y_i$  для всех  $i$ . Коэффициенты  $x_i$  единственного линейного выражения

$$v = x_1 e_1 + x_2 e_2 + \dots + x_n e_n$$

называются *координатами* вектора  $v$  в базисе  $e_1, \dots, e_n$ . Например, в координатном векторном пространстве  $\mathbb{k}^n$  из [прим. 1.2](#) на стр. 10 векторы

$$e_i = (0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0), \quad \text{где } 1 \leq i \leq n, \quad (4-1)$$

с единицей на  $i$ -м месте и нулями в остальных местах образуют базис, поскольку произвольный вектор  $v \in \mathbb{k}^n$  линейно выражается через них единственным способом:

$$v = (x_1, x_2, \dots, x_n) = x_1 e_1 + x_2 e_2 + \dots + x_n e_n. \quad (4-2)$$

Базис (4-1) называется *стандартным* базисом координатного пространства  $\mathbb{k}^n$ . Вскоре мы убедимся, что любое конечномерное векторное пространство  $V$  обладает базисом, причём все базисы в  $V$  состоят из одинакового числа векторов. Это число называется *размерностью* векторного пространства  $V$  и обозначается  $\dim V$ . Таким образом,  $\dim \mathbb{k}^n = n$ .

**4.1.1. Линейная зависимость.** Векторы  $v_1, v_2, \dots, v_m \in V$  называются *линейно независимыми*, если из равенства

$$\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \dots + \lambda_m v_m = 0 \quad (4-3)$$

вытекает, что все  $\lambda_i = 0$ . Наоборот, если существует линейная комбинация (4-3), в которой хоть один коэффициент  $\lambda_i \neq 0$ , то векторы  $v_1, v_2, \dots, v_m$  называются *линейно зависимыми*. Если между векторами есть линейная зависимость, то каждый вектор, входящий в неё с ненулевым коэффициентом, линейно выражается через остальные векторы. Например, если  $\lambda_m \neq 0$  в линейной зависимости (4-3), то

$$v_m = -\frac{\lambda_1}{\lambda_m} v_1 - \frac{\lambda_2}{\lambda_m} v_2 - \dots - \frac{\lambda_{m-1}}{\lambda_m} v_{m-1}.$$

Наоборот, любое линейное выражение вида  $v_m = \mu_1 v_1 + \mu_2 v_2 + \dots + \mu_{m-1} v_{m-1}$  можно воспринимать как линейную зависимость  $\mu_1 v_1 + \mu_2 v_2 + \dots + \mu_{m-1} v_{m-1} - v_m = 0$ . Обратите внимание, что любой набор векторов, содержащий нулевой вектор, линейно зависим, поскольку  $1 \cdot \vec{0} + 0 \cdot v = 0$  для произвольного  $v \in V$ .

## ЛЕММА 4.1

Порождающий векторное пространство  $V$  набор векторов  $\{e_\nu\}$  является базисом тогда и только тогда, когда он линейно независим.

Доказательство. Если  $\sum \lambda_i e_i = 0$  и не все  $\lambda_i$  нулевые, то любой вектор  $v = \sum x_i e_i$  допускает другое выражение  $v = \sum (x_i + \lambda_i) e_i$  через векторы  $e_i$ . Наоборот, любые два различных разложения  $v = \sum x_i e_i = \sum y_i e_i$  влекут линейную зависимость  $\sum (x_i - y_i) e_i = 0$ .  $\square$

## ЛЕММА 4.2 (ЛЕММА О ЗАМЕНЕ)

Если векторы  $w_1, w_2, \dots, w_m$  порождают пространство  $V$ , а  $u_1, \dots, u_k \in V$  линейно независимы, то  $m \geq k$  и векторы  $w_i$  можно перенумеровать так, что набор векторов

$$u_1, \dots, u_k, w_{k+1}, w_{k+2}, \dots, w_m,$$

полученный заменой первых  $k$  из них на векторы  $u_i$ , тоже порождает  $V$ .

Доказательство. Пусть  $u_1 = x_1 w_1 + x_2 w_2 + \dots + x_m w_m$ . Так как векторы  $u_i$  линейно независимы,  $u_1 \neq 0$  и среди коэффициентов  $x_i$  есть хоть один ненулевой. Перенумеруем векторы  $w_i$  так, чтобы  $x_1 \neq 0$ . Поскольку вектор  $w_1$  линейно выражается через  $u_1$  и  $w_2, \dots, w_m$ :

$$w_1 = \frac{1}{x_1} u_1 - \frac{x_2}{x_1} w_2 - \dots - \frac{x_m}{x_1} w_m,$$

векторы  $u_1, w_2, w_3, \dots, w_m$  порождают  $V$ . Далее действуем по индукции. Пусть для очередного  $i < k$  векторы  $u_1, u_2, \dots, u_i, w_{i+1}, w_{i+2}, \dots, w_m$  порождают  $V$ . Тогда

$$u_{i+1} = y_1 u_1 + y_2 u_2 + \dots + y_i u_i + x_{i+1} w_{i+1} + x_{i+2} w_{i+2} + \dots + x_m w_m.$$

В силу линейной независимости векторов  $u_\nu$  вектор  $u_{i+1}$  нельзя линейно выразить только через векторы  $u_1, u_2, \dots, u_i$ . Поэтому в предыдущем разложении присутствует с ненулевым коэффициентом хоть один из оставшихся векторов  $w_j$ . Следовательно,  $m > i$  и мы можем занумеровать оставшиеся  $w_j$  так, чтобы  $x_{i+1} \neq 0$ . Теперь, как и на первом шагу, вектор  $w_{i+1}$  линейно выражается через векторы  $u_1, u_2, \dots, u_{i+1}, w_{i+2}, w_{i+3}, \dots, w_m$ . Тем самым, эти векторы линейно порождают  $V$ , что воспроизводит индуктивное предположение.  $\square$

## ТЕОРЕМА 4.1 (ТЕОРЕМА О БАЗИСЕ)

В конечномерном векторном пространстве  $V$  каждый порождающий  $V$  набор векторов содержит в себе некоторый базис, все базисы состоят из одинакового количества векторов, и каждый линейно независимый набор векторов можно дополнить до базиса.

Доказательство. Поскольку векторов в любом линейно независимом наборе не больше, чем в любом порождающем, во всех базисах одинаковое число векторов. Если конечный набор векторов порождает  $V$ , то последовательно выкидывая из него векторы, линейно выражающиеся через остальные, мы придём к линейно независимому порождающему набору, т. е. к базису.

Если задан линейно независимый набор векторов  $u_1, \dots, u_k$ , то по лемме о замене в любом базисе  $e_1, \dots, e_n$  пространства  $V$  можно заменить некоторые  $k$  векторов  $e_i$  векторами  $u_i$  так, что полученный набор из  $n$  векторов останется порождающим. Он будет базисом, так как по уже доказанному содержит в себе некоторый базис из  $n$  векторов.  $\square$

## Следствие 4.1

В  $n$ -мерном векторном пространстве  $V$  всякий линейно независимый набор из  $n$  векторов, а также всякий порождающий набор из  $n$  векторов являются базисами.

Доказательство. По лем. 4.2 при замене любого базиса любыми  $n$  линейно независимыми векторами получится порождающий набор, т. е. тоже базис. По теор. 4.1 любой порождающий набор из  $n$  векторов содержит в себе некоторый базис. Так как этот базис тоже состоит из  $n$  векторов, он совпадает с исходным набором.  $\square$

## Следствие 4.2

Всякое  $n$ -мерное векторное пространство  $V$  над полем  $\mathbb{k}$  изоморфно координатному пространству  $\mathbb{k}^n$ . Линейные изоморфизмы  $\mathbb{k}^n \simeq V$  взаимно однозначно соответствуют базисам в  $V$ .

Доказательство. Если задан линейный изоморфизм  $F : V \simeq \mathbb{k}^n$ , то векторы<sup>1</sup>  $v_i = F(e_i)$  образуют базис пространства  $V$ , и разным линейным отображениям отвечают разные базисы, поскольку из равенств  $F(e_i) = G(e_i)$  для всех  $i$  вытекает, что и для любого вектора  $v = \sum x_i e_i \in V$

$$F(v) = F\left(\sum x_i e_i\right) = \sum x_i F(e_i) = \sum x_i G(e_i) = G\left(\sum x_i e_i\right) = G(v).$$

Наоборот, для любого базиса  $v_1, \dots, v_n$  пространства  $V$  отображение

$$F : \mathbb{k}^n \rightarrow V, \quad (x_1, x_2, \dots, x_n) \mapsto x_1 v_1 + x_2 v_2 + \dots + x_n v_n,$$

линейно, биективно и переводит  $e_i$  в  $v_i$  для всех  $i$ .  $\square$

## Пример 4.1 (пространство функций)

Множество  $\mathbb{k}^X$  всех функций  $f : X \rightarrow \mathbb{k}$  на произвольном множестве  $X$  со значениями в произвольном поле  $\mathbb{k}$  образует векторное пространство, в котором сложение функций и их умножение на числа задаётся обычными правилами:

$$\begin{aligned} f_1 + f_2 : x &\mapsto f_1(x) + f_2(x) \\ \lambda f : x &\mapsto \lambda \cdot f(x). \end{aligned}$$

Для  $n$ -элементного множества  $X = \{1, 2, \dots, n\}$  пространство функций  $\mathbb{k}^X$  изоморфно отображается на координатное пространство  $\mathbb{k}^n$  сопоставлением функции  $f$  набора её значений  $(f(1), f(2), \dots, f(n))$ . Этому изоморфизму отвечает базис из  $\delta$ -функций  $\delta_i : X \rightarrow \mathbb{k}$ :

$$\delta_i(j) = \begin{cases} 1 & \text{при } j = i \\ 0 & \text{при } j \neq i. \end{cases}$$

## Пример 4.2 (интерполяционная формула Лагранжа)

Зафиксируем  $n + 1$  различных чисел  $a_0, a_1, \dots, a_n \in \mathbb{k}$  и обозначим через  $\mathbb{k}[x]_{\leq n}$  пространство многочленов степени не выше  $n$ . По определению многочленов, мономы  $1, x, x^2, \dots, x^n$  образуют базис в  $\mathbb{k}[x]_{\leq n}$ , и  $\dim \mathbb{k}[x]_{\leq n} = n + 1$ . Для каждого  $i = 0, 1, 2, \dots, n$  обозначим через

$$f_i(x) = \prod_{v \neq i} (x - a_v) : \prod_{v \neq i} (a_i - a_v)$$

<sup>1</sup>Здесь и далее  $e_1, \dots, e_n \in \mathbb{k}^n$  обозначает стандартный базис в  $\mathbb{k}^n$  из формулы форм. (4-1) на стр. 50.

многочлен степени  $n$ , зануляющийся во всех точках  $a_i$ , кроме точки  $a_i$ , а в точке  $a_i$  принимающий значение  $f_i(a_i) = 1$ . Многочлены  $f_i$  линейно независимы, так как подставляя в равенство

$$\lambda_1 f_1(x) + \lambda_2 f_2(x) + \dots + \lambda_n f_n(x) = 0$$

значение  $x = a_i$ , мы заключаем, что  $\lambda_i = 0$  для каждого  $i = 0, 1, 2, \dots, n$ . Тем самым, многочлены  $f_i$  тоже образуют базис пространства  $\mathbb{k}[x]_{\leq n}$ . Подставляя в разложение

$$g(x) = x_1 f_1(x) + x_2 f_2(x) + \dots + x_n f_n(x)$$

произвольного многочлена  $g \in \mathbb{k}[x]_{\leq n}$  по базису  $f_0, f_1, \dots, f_n$  значение  $x = a_i$ , мы заключаем, что  $x_i = g(a_i)$ , т. е.  $i$ -я координата многочлена  $g$  в базисе  $f_0, f_1, \dots, f_n$  равна значению этого многочлена в точке  $a_i$ . Таким образом, для любого набора значений  $b_0, b_1, \dots, b_n \in \mathbb{k}$  существует единственный такой многочлен  $g \in \mathbb{k}[x]_{\leq n}$ , что  $g(a_i) = b_i$  для всех  $i$ , а именно —

$$g(x) = b_1 f_1(x) + b_2 f_2(x) + \dots + b_n f_n(x).$$

ПРИМЕР 4.3 (конечные поля)

Пусть конечное поле  $\mathbb{K}$  содержит подполе  $\mathbb{F}_q \subset \mathbb{K}$ , состоящее из  $q$  элементов. Будучи конечномерным векторным пространством над  $\mathbb{F}_q$ , поле  $\mathbb{K}$  находится в линейной биекции с координатным пространством  $\mathbb{F}_q^n$  для некоторого  $n \in \mathbb{N}$  и, тем самым, состоит из  $q^n$  элементов. Применяя это наблюдение к простому подполю поля  $\mathbb{K}$ , состоящему из всех элементов вида<sup>1</sup>

$$\pm \frac{1 + \dots + 1}{1 + \dots + 1} \in \mathbb{K}$$

с ненулевым знаменателем, мы заключаем, что число элементов в любом конечном поле является степенью некоторого простого числа.

УПРАЖНЕНИЕ 4.1 (по алгебре). Убедитесь, что простое подполе любого поля изоморфно либо полю  $\mathbb{Q}$ , либо полю вычетов  $\mathbb{Z}/(p)$  по простому модулю  $p \in \mathbb{N}$ .

**4.2. Подпространства.** Пересечение любого множества подпространств в произвольном векторном пространстве  $V$  также является подпространством в  $V$ .

УПРАЖНЕНИЕ 4.2. Убедитесь в этом.

Пересечение всех подпространств, содержащих данное множество векторов  $M \subset V$ , называется *линейной оболочкой* множества  $M$  и обозначается  $\text{span}(M)$ . Это наименьшее по включению векторное подпространство в  $V$ , содержащее  $M$ . Иначе его можно описать как множество всех конечных линейных комбинаций векторов из  $M$ , ибо все такие линейные комбинации очевидным образом образуют векторное пространство и содержатся во всех векторных подпространствах, содержащих  $M$ .

ПРИМЕР 4.4 (гиперплоскости)

Линейная оболочка  $H = \text{span}(v_1, v_2, \dots, v_{n-1})$  произвольных  $(n-1)$  линейно независимых векторов в  $n$ -мерном векторном пространстве  $V$  является  $(n-1)$ -мерным подпространством. Такие подпространства называются *гиперплоскостями* в  $V$ . Если дополнить векторы  $v_i$  некоторым вектором  $v_n$  до базиса в  $V$  и обозначить через  $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$  координаты относительно этого базиса, то гиперплоскость  $H$  можно описать как ГМТ  $x$  удовлетворяющих линейному

<sup>1</sup>Ср. с н° 2.4.1 на стр. 32.

уравнению  $x_n = 0$ . Покажем, что и наоборот, для любого ненулевого линейного отображения  $\xi : V \rightarrow \mathbb{k}$  множество  $\text{Ann } \xi = \{v \in V \mid \xi(v) = 0\}$  является гиперплоскостью.

УПРАЖНЕНИЕ 4.3. Убедитесь, что  $\text{Ann } \xi \subset V$  является векторным подпространством.

Пусть векторы  $u_1, u_2, \dots, u_m$  составляют базис подпространства  $\text{Ann } \xi$ , а вектор  $v$  таков, что  $\xi(v) \neq 0$ . Векторы  $v, u_1, u_2, \dots, u_m$  линейно независимы, ибо векторы  $u_i$  линейно независимы, а вектор  $v \notin \text{Ann } \xi$  через них не выражается. Для любого вектора  $w \in V$  вектор

$$w - \frac{\xi(w)}{\xi(v)} \cdot v \in \text{Ann } \xi$$

и, тем самым, линейно выражается через векторы  $u_i$ . Следовательно, векторы  $v, u_1, u_2, \dots, u_m$  составляют базис в  $V$ , откуда  $m = \dim V - 1$ .

УПРАЖНЕНИЕ 4.4. Покажите, что векторное пространство  $\mathbb{k}^n$  над бесконечным полем  $\mathbb{k}$  не является объединением конечного числа своих гиперплоскостей.

**4.2.1. Сумма подпространств.** Объединение векторных подпространств почти никогда не является векторным пространством. Например, прямые  $x_1 = 0$  и  $x_2 = 0$  являются одномерными векторными подпространствами координатной плоскости  $\mathbb{k}^2$ , но сумма любого ненулевого вектора первого из них с любым ненулевым вектором второго не лежит в их объединении — скажем,  $(1, 0) + (0, 1) = (1, 1)$ .

УПРАЖНЕНИЕ 4.5. Покажите, что объединение двух подпространств является векторным пространством если и только если одно из подпространств содержится в другом.

Линейная оболочка объединения произвольного множества подпространств  $U_\nu \subset V$  называется *суммой* подпространств  $U_\nu$  и обозначается

$$\sum_{\nu} U_{\nu} \stackrel{\text{def}}{=} \text{span} \bigcup_{\nu} U_{\nu}.$$

Таким образом, сумма подпространств состоит из всевозможных конечных сумм векторов, принадлежащих этим подпространствам. Например,

$$\begin{aligned} U_1 + U_2 &= \{u_1 + u_2 \mid u_1 \in U_1, u_2 \in U_2\} \\ U_1 + U_2 + U_3 &= \{u_1 + u_2 + u_3 \mid u_1 \in U_1, u_2 \in U_2, u_3 \in U_3\} \quad \text{и т. д.} \end{aligned}$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4.1

Подпространства  $U_1, U_2 \subset V$  называются *трансверсальными*, если  $U_1 \cap U_2 = 0$ . Сумма трансверсальных подпространств называется *прямой* и обозначается  $U_1 \oplus U_2$ . Трансверсальные подпространства  $U_1$  и  $U_2$  с  $U_1 \oplus U_2 = V$ , называются *дополнительными*.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4.1

Подпространства  $U_1, U_2 \subset V$  трансверсальны если и только если каждый вектор  $w \in U_1 + U_2$  имеет единственное представление в виде  $w = u_1 + u_2$  с  $u_1 \in U_1$  и  $u_2 \in U_2$ .

Доказательство. Равенство  $u'_1 + u'_2 = u''_1 + u''_2$ , где  $u'_i, u''_i \in U_i$ , влечёт равенство

$$u'_1 - u''_1 = u''_2 - u'_2,$$

левая часть которого лежит в  $U_1$ , а правая — в  $U_2$ . Поэтому  $u'_1 - u''_1 = u''_2 - u'_2 \in U_1 \cap U_2$ . Если  $U_1 \cap U_2 = 0$ , то  $u'_1 = u''_1$  и  $u'_2 = u''_2$ . Если же пересечение  $U_1 \cap U_2$  содержит ненулевой вектор  $u$ , то нулевой вектор  $0 \in U_1 + U_2$  имеет два различных разложения  $0 = 0 + 0 = u + (-u)$ .  $\square$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4.2 (ПРЯМАЯ СУММА НАБОРА ПОДПРОСТРАНСТВ)

Сумма конечного набора подпространств  $U_1, U_2, \dots, U_n \subset V$  называется *прямой* и обозначается

$$U_1 \oplus U_2 \oplus \dots \oplus U_n,$$

если каждый вектор  $w \in \sum U_i$  имеет единственное представление  $w = \sum u_i$ , где  $u_i \in U_i$ , в том смысле, что равенство

$$u_1 + u_2 + \dots + u_n = w_1 + w_2 + \dots + w_n, \quad \text{где } u_i, w_i \in U_i \text{ при каждом } i, \quad (4-4)$$

возможно только когда  $u_i = w_i$  при всех  $i$ . Например, пространство  $V$  является прямой суммой одномерных подпространств, порождённых ненулевыми векторами  $e_1, \dots, e_n$ , если и только если эти векторы образуют в  $V$  базис.

УПРАЖНЕНИЕ 4.6. Покажите, что сумма подпространств  $U_1, \dots, U_m \subset V$  является прямой если и только если линейно независим любой набор ненулевых векторов  $u_1, \dots, u_m$ , в котором  $u_i \in U_i$  при каждом  $i$ .

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4.2

Сумма подпространств является прямой если и только если каждое из подпространств трансверсально сумме всех остальных.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если  $U_i \cap \sum_{v \neq i} U_v$  содержит ненулевой вектор  $u$ , то этот вектор допускает два различных представления в виде суммы векторов  $u_j \in U_j$ : одно имеет вид

$$u = 0 + \dots + 0 + u_i + 0 + \dots + 0,$$

в котором отлично от нуля только  $i$ -е слагаемое  $u_i = u \in U_i$ , а второе — вид

$$u = u_1 + \dots + u_{i-1} + 0 + u_{i+1} + \dots + u_n,$$

где  $u_v \in U_v$  таковы, что вектор  $u \in \sum_{v \neq i} U_v$  равен их сумме. Наоборот, если в равенстве (4-4) имеется  $u_i \neq w_i$ , то ненулевой вектор  $u_i - w_i = \sum_{v \neq i} (w_v - u_v) \in U_i \cap \sum_{v \neq i} U_v$ .  $\square$

**4.2.2. Размерность суммы и пересечения.** Из теоремы о базисе вытекает, что базис любого подпространства  $U \subset V$  можно дополнить до базиса во всём пространстве. Поэтому любое подпространство  $U$  конечномерного пространства  $V$  тоже конечномерно, и  $\dim U \leq \dim V$ . Размерность  $\text{codim}_V U \stackrel{\text{def}}{=} \dim V - \dim U$  называется *коразмерностью* подпространства  $U$  в  $V$ .

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4.3

Для любых конечномерных подпространств  $U_1, U_2$  в произвольном<sup>1</sup> векторном пространстве  $V$  выполняется равенство  $\dim(U_1) + \dim(U_2) = \dim(U_1 \cap U_2) + \dim(U_1 + U_2)$ .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Выберем какой-нибудь базис  $u_1, \dots, u_k$  в  $U_1 \cap U_2$  и дополним его векторами  $v_1, \dots, v_r$  и  $w_1, \dots, w_s$  до базисов в подпространствах  $U_1$  и  $U_2$  соответственно. Достаточно показать, что векторы  $u_1, \dots, u_k, v_1, \dots, v_r, w_1, \dots, w_s$  образуют базис пространства  $U_1 + U_2$ . Ясно, что они его порождают. Допустим, что они линейно зависимы. Поскольку каждый из наборов

<sup>1</sup>Не обязательно конечномерном.

$u_1, \dots, u_k, v_1, \dots, v_r$  и  $u_1, \dots, u_k, w_1, \dots, w_s$  в отдельности линейно независим, в линейной зависимости

$$\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 + \dots + \lambda_k u_k + \mu_1 v_1 + \mu_2 v_2 + \dots + \mu_r v_r + \eta_1 w_1 + \eta_2 w_2 + \dots + \eta_s w_s = 0$$

присутствуют как векторы  $v_i$ , так и векторы  $w_j$ . Переносим  $u_1, \dots, u_k, v_1, \dots, v_r$  в одну часть, а  $w_1, \dots, w_s$  — в другую, получаем равенство между вектором из  $U_1$  и вектором из  $U_2$ , означающее, что этот вектор лежит в пересечении  $U_1 \cap U_2$ . Но тогда в его разложении по базисам пространств  $U_1$  и  $U_2$  нет векторов  $v_i$  и  $w_j$  — противоречие.  $\square$

Следствие 4.3

Для любых подпространств  $U_1, U_2$  конечномерного векторного пространства  $V$

$$\dim(U_1 \cap U_2) \geq \dim(U_1) + \dim(U_2) - \dim(V).$$

В частности,  $U_1 \cap U_2 \neq 0$  при  $\dim(U_1) + \dim(U_2) > \dim V$ .

Доказательство. Это вытекает из предл. 4.3 и неравенства  $\dim(U_1 + U_2) \leq \dim V$ .  $\square$

Следствие 4.4

Трансверсальные векторные подпространства  $U_1, U_2$  конечномерного векторного пространства  $V$  дополняют друг друга тогда и только тогда, когда  $\dim(U_1) + \dim(U_2) = \dim(V)$ .

Доказательство. При  $U_1 \cap U_2 = 0$ , равенство  $\dim(U_1) + \dim(U_2) = \dim(V)$  равносильно равенству  $\dim(U_1 + U_2) = \dim V$ , означающему, что  $U_1 + U_2 = V$ .  $\square$

**4.3. Аффинная геометрия.** Пусть множество  $A$  является аффинным пространством<sup>1</sup> над векторным пространством  $V$ . Для любой точки  $p \in A$  и любого векторного подпространства  $U \subset V$  множество точек

$$P(p, U) = p + U = \{\tau_u(p) \mid u \in U\}$$

называется проходящим через точку  $p$  аффинным подпространством в  $A$  с направляющим векторным подпространством  $U$ . Размерность аффинного пространства  $P(p, U)$  по определению полагается равной размерности  $\dim U$  его направляющего векторного подпространства.

Пример 4.5 (прямые и плоскости)

Аффинные подпространства  $p + U$ , где  $\dim U = 1, 2$  называются *прямыми* и *плоскостями* соответственно. Таким образом, аффинная прямая представляет собою ГМТ вида  $p + vt$ , где  $p$  — некоторая точка,  $v$  — ненулевой вектор, а  $t$  пробегает  $\mathbb{K}$ . Аналогично, аффинная плоскость есть ГМТ вида  $p + \lambda u + \mu w$ , где  $p$  — некоторая точка,  $u, w$  — пара непропорциональных векторов, а  $\lambda, \mu$  независимо пробегает  $\mathbb{K}$ . Отметим, что к любой такой плоскости применимо всё сказанное нами в §§ 1, 2.

Предложение 4.4

Аффинные подпространства  $p + U$  и  $q + W$  пересекаются если и только если  $\overline{pq} \in U + W$ , и в этом случае их пересечение является аффинным пространством с направляющим векторным пространством  $U \cap W$ .

<sup>1</sup>См. п. 1.4 на стр. 15.



Доказательство. Равенство  $\overline{p}q = u + w$  равносильно равенству  $p + u = q - w$ , означающему, что точка  $r = p + u = q - w \in (p + U) \cap (q + W)$ . Если такая точка  $r$  существует, то для любой лежащей в пересечении  $(p + U) \cap (q + W)$  точки  $r' = p + u' = q - w'$  вектор  $\overline{r}r' = u' - u = w - w' \in U \cap W$ . Наоборот, для любого вектора  $v \in U \cap W$  точка  $r + v$  лежит в  $(p + U) \cap (q + W)$ .  $\square$

Следствие 4.5

Следующие условия на аффинные подпространства  $p + U$  и  $q + U$  с одним и тем же направляющим подпространством  $U \subset V$  эквивалентны: (1)  $\overline{p}q \in U$  (2)  $p \in q + U$  (3)  $q \in p + U$  (4)  $p + U = q + U$  (5)  $(p + U) \cap (q + W) \neq \emptyset$ .  $\square$

Предложение 4.5

Точки  $p_0, p_1, \dots, p_k$  аффинного пространства  $\mathbb{A}$  тогда и только тогда, когда не содержатся ни в каком  $(k - 1)$ -мерном аффинном подпространстве, когда векторы  $\overline{p_0}p_1, \overline{p_0}p_2, \dots, \overline{p_0}p_k$  линейно независимы, и в этом случае через точки  $p_0, p_1, \dots, p_k$  проходит единственное  $k$ -мерное аффинное подпространство.

Доказательство. Линейная зависимость  $k$  векторов  $\overline{p_0}p_i$  равносильна тому, что их линейная оболочка имеет размерность не больше  $k - 1$ . Это в свою очередь означает, что в  $V$  найдётся  $(k - 1)$ -мерное векторное подпространство  $U$ , содержащее все векторы  $\overline{p_0}p_i$ . Последнее равносильно тому, что  $(k - 1)$ -мерное аффинное подпространство  $p_0 + U$  содержит все точки  $p_i$ . Если векторы  $\overline{p_0}p_i$  линейно независимы, то они составляют базис в любом содержащем их  $k$ -мерном векторном подпространстве  $U \subset V$ , и значит, любое такое подпространство совпадает с их линейной оболочкой. Поскольку прохождение аффинного пространства  $p_0 + U$  через все точки  $p_i$  равносильно тому, что все векторы  $\overline{p_0}p_i$  лежат в  $U$ , мы заключаем, что такое пространство  $p_0 + U$  ровно одно и его направляющее векторное пространство  $U$  представляет собою линейную оболочку векторов  $\overline{p_0}p_i$ .  $\square$

Пример 4.6 (Аффинный репер)

В  $n$ -мерном аффинном пространстве  $\mathbb{A}^n$  над векторным пространством  $V$  каждый набор из  $n + 1$  не лежащих в одной гиперплоскости точек  $p_0, p_1, \dots, p_n$  задаёт систему аффинных координат с началом в точке  $p_0$  и базисными векторами  $e_i = \overline{p_0}p_i \in V$  в том смысле, что точки  $q \in \mathbb{A}^n$  оказываются в биекции с наборами таких чисел  $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ , что

$$\overline{p_0}q = x_1 \cdot \overline{p_0}p_1 + x_2 \cdot \overline{p_0}p_2 + \dots + x_n \cdot \overline{p_0}p_n.$$

В самом деле, по определению аффинного пространства, сопоставление точке  $q \in \mathbb{A}^n$  вектора  $\overline{p_0}q \in V$  задаёт биекцию между точками и векторами. Так как точки  $p_i$  не лежат в одной гиперплоскости,  $n$  векторов  $e_i$  линейно независимы и составляют базис в  $V$ . Сопоставление вектору его координат в этом базисе задаёт линейную биекцию  $V \simeq \mathbb{k}^n$ .

**4.4. Линейные и аффинные отображения.** Линейные отображения  $F : U \rightarrow W$  между двумя векторными пространствами  $U$  и  $W$  над полем  $\mathbb{k}$  также образуют векторное пространство относительно операций поточечного сложения значений и умножения их на константы:

$$F + G : v \mapsto F(v) + G(v) \quad \text{и} \quad \lambda F : v \mapsto \lambda \cdot F(v).$$

УПРАЖНЕНИЕ 4.7. Убедитесь, что отображение  $\lambda F + \mu G$  линейно для любых линейных отображений  $F, G : U \rightarrow W$  и что для любых линейных отображений  $H : V \rightarrow U$  и  $K : W \rightarrow V$  выполняются равенства  $(\lambda F + \mu G)H = \lambda FH + \mu GH$  и  $K(\lambda F + \mu G) = \lambda KF + \mu KG$ .

Векторное пространство линейных отображений  $U \rightarrow W$  обозначается  $\text{Hom}(U, W)$  или же через  $\text{Hom}_{\mathbb{k}}(U, W)$ , если важно подчеркнуть, над каким полем рассматриваются пространства.

**4.4.1. Ядро и образ.** С каждым линейным отображением  $F : V \rightarrow W$  связаны его

$$\text{ядро } \ker F \stackrel{\text{def}}{=} F^{-1}(0) = \{v \in V \mid F(v) = 0\} \text{ и}$$

$$\text{образ } \text{im } F \stackrel{\text{def}}{=} F(V) = \{w \in W \mid \exists v \in V : F(v) = w\}.$$

**УПРАЖНЕНИЕ 4.8.** Убедитесь, что  $\ker F \subset V$  и  $\text{im } F \subset W$  являются векторными подпространствами.

Поскольку равенства  $F(v_1) = F(v_2)$  и  $F(v_1 - v_2) = 0$  для линейного отображения  $F$  эквивалентны друг другу, два вектора  $v_1, v_2 \in V$  тогда и только тогда переводятся отображением  $F$  в один и тот же вектор  $w = F(v_1) = F(v_2) \in \text{im } F$ , когда  $v_1 - v_2 \in \ker F$ . Иными словами,

$$F^{-1}(F(v)) = v + \ker F, \quad (4-5)$$

т. е. полный прообраз любого вектора  $w \in \text{im } F$  является *параллельным сдвигом* векторного подпространства  $\ker F$  на произвольный вектор  $v \in F^{-1}(w)$ . В частности, мы получаем

**ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4.6**

Линейное отображение  $F$  инъективно тогда и только тогда, когда  $\ker F = 0$ . □

**ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4.7**

Если  $V$  конечномерно, то для любого линейного отображения  $F : V \rightarrow W$

$$\dim \ker F + \dim \text{im } F = \dim V. \quad (4-6)$$

**Доказательство.** Выберем базис  $u_1, \dots, u_k \in \ker F$ , дополним его векторами  $e_1, e_2, \dots, e_m$  до базиса в  $V$  и покажем, что векторы  $F(e_1), F(e_2), \dots, F(e_m)$  образуют базис в  $\text{im } F$ . Они порождают образ, т. к. для любого вектора  $v = \sum y_i u_i + \sum x_j e_j \in V$

$$F(v) = \sum y_i F(u_i) + \sum x_j F(e_j) = \sum x_j F(e_j).$$

Они линейно независимы, поскольку равенство  $0 = \sum \lambda_i F(e_i) = F(\sum \lambda_i e_i)$  означает, что  $\sum \lambda_i e_i$  лежит в  $\ker F$ , т. е. является линейной комбинацией векторов  $u_i$ , что возможно только когда все  $\lambda_i = 0$ . □

**Следствие 4.6**

Следующие свойства линейного отображения  $F : V \rightarrow V$  из пространства  $V$  в себя эквивалентны друг другу: (1)  $F$  изоморфизм (2)  $\ker F = 0$  (3)  $\text{im } F = V$ .

**Доказательство.** Свойства (2) и (3) равносильны друг другу по [предл. 4.7](#), а их одновременное выполнение равносильно (1) по [предл. 4.6](#). □

**ПРИМЕР 4.7 (ИНТЕРПОЛЯЦИЯ С КРАТНЫМИ УЗЛАМИ, ПРОДОЛЖЕНИЕ ПРИМ. 4.2)**

Зафиксируем, как и в [прим. 4.2](#) на стр. 52, несколько различных чисел  $a_1, a_2, \dots, a_n \in \mathbb{k}$ , однако теперь зададим для каждого числа  $a_i$  несколько произвольных значений  $b_{i0}, b_{i1}, \dots, b_{im_i} \in \mathbb{k}$ . Пусть общее число заданных значений  $(m_1 + 1) + \dots + (m_n + 1) = m + 1$ . Покажем, что существует единственный такой многочлен  $g \in \mathbb{k}[x]$  степени не выше  $m$ , что при каждом  $i$  сам

этот многочлен и первые его  $m_i$  производных принимают в точке  $a_i$  заданные  $m_i + 1$  значений  $g^{(j)}(a_i) = b_{ij}$ , где  $0 \leq j \leq m_i$ ,  $i = 1, \dots, n$  и  $g^{(k)}(x) = d^k g(x) / dx^k$  означает  $k$ -ю производную от многочлена  $g$ , причём для единообразия обозначений мы полагаем  $g^{(0)} \stackrel{\text{def}}{=} g$ . Занумеруем  $m + 1$  пар чисел  $(i, j)$  с  $1 \leq i \leq n$ ,  $0 \leq j \leq m_i$  произвольным образом и выпишем их в одну строчку в порядке возрастания номеров. Рассмотрим отображение  $F: \mathbb{k}[x]_{\leq m} \rightarrow \mathbb{k}^{m+1}$ , переводящее каждый многочлен  $g$  степени  $\deg g \leq m$  в набор значений  $g^{(j)}(a_i) = b_{ij}$ , записанных в зафиксированном только что порядке.

УПРАЖНЕНИЕ 4.9. Убедитесь, что отображение  $F$  линейно и  $\ker F = 0$ .

Так как  $\dim \operatorname{im} F = \dim \mathbb{k}[x]_{\leq m} = \dim \mathbb{k}^{m+1}$ , мы заключаем, что отображение  $F$  биективно, что и требовалось.

ПРИМЕР 4.8 (ПРОЕКЦИИ)

С каждой парой дополнительных подпространств<sup>1</sup>  $U, W \subset V = U \oplus W$  связаны сюръективные линейные отображения  $\pi_U: V \rightarrow U$ ,  $u + w \mapsto u$ , и  $\pi_W: V \rightarrow W$ ,  $u + w \mapsto w$ , которые называются *проекциями* пространства  $V$ , соответственно, на подпространство  $U$  вдоль подпространства  $W$  и на подпространство  $W$  вдоль подпространства  $U$ . Первая из них имеет  $\ker \pi_U = W$  и тождественно действует на  $U$ , а вторая имеет  $\ker \pi_W = U$  и тождественно действует на  $W$ . Проекции  $\pi_U$  и  $\pi_W$ , рассматриваемые как линейные эндоморфизмы  $V \rightarrow V$ , удовлетворяют соотношениям  $\pi_U \pi_W = \pi_W \pi_U = 0$ ,  $\pi_U + \pi_W = \operatorname{Id}_V$ ,  $\pi_U \circ \pi_U = \pi_U$ ,  $\pi_W \circ \pi_W = \pi_W$ .

УПРАЖНЕНИЕ 4.10. Покажите, что если линейный эндоморфизм  $F: V \rightarrow V$  удовлетворяет соотношению  $F^2 = F$ , то  $V = \ker F \oplus \operatorname{im} F$ , и  $F$  является проекцией  $V$  на  $\operatorname{im} F$  вдоль  $\ker F$ , а оператор  $G = \operatorname{Id}_V - F$  тоже удовлетворяет соотношению<sup>2</sup>  $G^2 = G$  и является проекцией  $V$  на  $\ker F$  вдоль  $\operatorname{im} F$ .

**4.4.2. Матрица линейного отображения.** Зафиксируем в пространствах  $U$  и  $W$  базисы

$$u_1, u_2, \dots, u_n \in U \quad \text{и} \quad w_1, w_2, \dots, w_m \in W, \quad (4-7)$$

и для каждого  $j = 1, 2, \dots, n$  разложим вектор  $F(u_j)$  по базису  $w_1, w_2, \dots, w_m$

$$F(u_j) = \sum_{i=1}^m w_i \cdot f_{ij}. \quad (4-8)$$

Составленная из коэффициентов  $f_{ij}$  прямоугольная таблица<sup>3</sup>

$$(F(u_1), F(u_2), \dots, F(u_n)) = \begin{pmatrix} f_{11} & f_{12} & \dots & f_{1n} \\ f_{21} & f_{22} & \dots & f_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ f_{m1} & f_{m2} & \dots & f_{mn} \end{pmatrix} \in \operatorname{Mat}_{m \times n}(\mathbb{k}), \quad (4-9)$$

$j$ -й столбец которой содержит написанные сверху вниз координаты вектора  $F(u_j)$ , называется *матрицей отображения  $F$  в базисах  $\mathbf{u} = (u_1, u_2, \dots, u_n)$  и  $\mathbf{w} = (w_1, w_2, \dots, w_m)$* . Мы будем

<sup>1</sup>Напомним, что это означает, что  $V = U \oplus W$ , т. е.  $U + W = V$  и  $U \cap W = 0$ , см. *опр. 4.1* на стр. 54.

<sup>2</sup>А также соотношениям  $GF = FG = 0$ .

<sup>3</sup>Ср. с н° 2.1.2 на стр. 25.

обозначать эту матрицу через  $F_{\mathbf{w}\mathbf{u}}$  или  $(f_{ij})$ . Она полностью описывает действие линейного отображения  $F$  на любой вектор  $\mathbf{v} = \sum u_j x_j \in U$ , поскольку

$$F(\mathbf{v}) = F\left(\sum_{j=1}^n u_j x_j\right) = \sum_{j=1}^n F(u_j) \cdot x_j = \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^m w_i \cdot f_{ij} x_j. \quad (4-10)$$

Обозначая через  $\mathbf{u} = (u_1, u_2, \dots, u_n)$ ,  $\mathbf{w} = (w_1, w_2, \dots, w_m)$  и  $F(\mathbf{u}) = (F(u_1), F(u_2), \dots, F(u_n))$  матрицы-строки, элементами которых являются векторы, а через

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \quad \text{и} \quad \mathbf{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix}$$

матрицы-столбцы, составленные из чисел — координат векторов  $\mathbf{v}$  и  $F(\mathbf{v})$  в базисах  $\mathbf{u}$  и  $\mathbf{w}$ , мы получаем матричные равенства<sup>1</sup>  $\mathbf{v} = \mathbf{u} \mathbf{x}$ ,  $F(\mathbf{v}) = \mathbf{w} \mathbf{y}$ ,  $F(\mathbf{u}) = \mathbf{w} F_{\mathbf{w}\mathbf{u}}$  и можем переписать вычисление (4-10) в виде  $F(\mathbf{v}) = F(\mathbf{u} \mathbf{x}) = F(\mathbf{u}) \mathbf{x} = \mathbf{w} F_{\mathbf{w}\mathbf{u}} \mathbf{x}$ , откуда  $\mathbf{y} = F_{\mathbf{w}\mathbf{u}} \mathbf{x}$ . Таким образом, линейное отображение  $F : U \rightarrow W$ , имеющее матрицу  $F_{\mathbf{w}\mathbf{u}}$  в базисах (4-7), переводит вектор со столбцом координат  $\mathbf{x}$  в базисе  $\mathbf{u}$  в вектор со столбцом координат  $F_{\mathbf{w}\mathbf{u}} \mathbf{x}$  в базисе  $\mathbf{w}$ , т. е. в терминах координатных столбцов действует по правилу

$$\mathbf{x} \mapsto F_{\mathbf{w}\mathbf{u}} \mathbf{x} \quad (4-11)$$

УПРАЖНЕНИЕ 4.11. Убедитесь, что при сложении линейных отображений и умножении их на числа матрицы этих отображений поэлементно складываются и умножаются на те же самые числа.

Предложение 4.8

Выбор базисов  $\mathbf{u} = (u_1, u_2, \dots, u_n)$ ,  $\mathbf{w} = (w_1, w_2, \dots, w_m)$  в пространствах  $U$ ,  $W$  задаёт линейный изоморфизм векторного пространства  $\text{Hom}_{\mathbb{K}}(U, W)$  линейных отображений  $U \rightarrow W$  с векторным пространством  $\text{Mat}_{m \times n}(\mathbb{K}) \simeq \mathbb{K}^{mn}$  матриц размера  $m \times n$ , сопоставляющий линейному отображению его матрицу в выбранных базисах:

$$\text{Hom}_{\mathbb{K}}(U, W) \rightarrow \text{Mat}_{m \times n}(\mathbb{K}), \quad F \mapsto F_{\mathbf{w}\mathbf{u}}, \quad (4-12)$$

В частности,  $\dim \text{Hom}(U, W) = \dim U \cdot \dim W$ .

Доказательство. Линейность отображения (4-12) вытекает из упр. 4.11. Если матрица  $F_{\mathbf{w}\mathbf{u}}$  нулевая, то и задаваемое ею линейное отображение (4-11) тождественно нулевое, т. е. линейное отображение (4-12) имеет нулевое ядро, а значит, инъективно. Поскольку любая матрица  $F_{\mathbf{w}\mathbf{u}}$  задаёт по формуле (4-11) линейное отображение  $F : U \rightarrow W$ , отображение (4-12) также и сюръективно.  $\square$

Следствие 4.7

Для любого набора из  $n + 1$  не лежащих в одной гиперплоскости точек  $p_0, p_1, \dots, p_n$  в  $n$ -мерном аффинном пространстве  $A$  и произвольного набора из  $n + 1$  точек  $q_0, q_1, \dots, q_n$  любого аффинного пространства  $B$  существует единственное такое аффинное отображение<sup>2</sup>  $\varphi : A \rightarrow B$ , что  $\varphi(p_i) = q_i$  при всех  $i$ .

<sup>1</sup>Напомним, что произведение матриц было определено в п° 2.1.2, см. форм. (2-5) на стр. 26

<sup>2</sup>См. п° 2.1 на стр. 24.

Доказательство. Обозначим через  $U$  и  $W$  векторные пространства, ассоциированные с аффинными пространствами  $A$  и  $B$ . Если отображение  $\varphi$  существует, то его дифференциал<sup>1</sup>  $D_\varphi : U \rightarrow W$  переводит  $n$  векторов  $\overline{p_0 p_i}$ , составляющих базис векторного пространства  $U$ , в заданные  $n$  векторов  $\overline{q_0 q_i} \in W$ . Как мы видели выше, линейное отображение  $D_\varphi$  с таким свойством существует, единственно и переводит вектор  $u = \sum x_i \cdot \overline{p_0 p_i}$  в вектор  $D_\varphi(u) = \sum x_i \cdot \overline{q_0 q_i}$ . Поэтому аффинное отображение  $\varphi$  тоже существует, единственно и переводит точку  $a = p_0 + \sum x_i \cdot \overline{p_0 p_i}$  в точку  $\varphi(a) = q_0 + \sum x_i \cdot \overline{q_0 q_i}$ .  $\square$

#### Следствие 4.8

Аффинное отображение из  $n$ -мерного аффинного пространства в себя биективно если и только если оно переводит какие-нибудь  $n + 1$  не лежащих в одной гиперплоскости точек в точки, также не лежащие в одной гиперплоскости. Для любых двух упорядоченных наборов из  $n + 1$  точек, в каждом из которых точки не лежат в одной гиперплоскости, существует единственное биективное аффинное преобразование, переводящее первый набор во второй.

Доказательство. Аффинное отображение биективно если и только если биективен его дифференциал. Дифференциал биективен если и только если он переводит базис в базис. Векторы, соединяющие одну из  $n + 1$  точек со всеми остальными, образуют базис если и только если эти  $n + 1$  точек не лежат в одной гиперплоскости.  $\square$

**4.5. Фактор пространства.** Рассмотрим произвольное векторное пространство  $V$  и зафиксируем в нём некоторое подпространство  $U \subset V$ . Проходящее через точку  $v \in \mathbb{A}(V)$  аффинное подпространство  $v + U$  с направляющим подпространством  $U$  можно трактовать как класс эквивалентности вектора  $v$  по модулю сдвигов на векторы из подпространства  $U$ . Такой класс обычно обозначают через  $[v]_U = v \pmod{U} = \{w \in V \mid w - v \in U\}$  и называют классом вычетов вектора  $v$  по модулю  $U$ . На множестве классов вычетов имеется естественная структура векторного пространства, в котором сложение и умножение на числа наследуются из  $V$  и задаются правилами  $[v]_U + [w]_U \stackrel{\text{def}}{=} [v + w]$  и  $\lambda[v]_U \stackrel{\text{def}}{=} [\lambda v]$ .

Упражнение 4.12. Проверьте, что эти определения корректны и задают на множестве классов структуру векторного пространства над полем  $\mathbb{k}$ .

Пространство классов вычетов по модулю подпространства  $U$  обозначается  $V/U$  и называется фактор пространством пространства  $V$  по подпространству  $U$ . Повторюсь, что на геометрическом языке векторами фактор пространства  $V/U$  являются всевозможные аффинные подпространства в  $\mathbb{A}(V)$  с заданным направляющим подпространством  $U \subset V$ .

Линейное сюръективное отображение  $V \twoheadrightarrow V/U$ ,  $v \mapsto [v]$ , переводящее каждый вектор  $v \in V$  в содержащий его класс  $[v]$ , называется отображением факторизации.

#### Пример 4.9 (Фактор по ядру)

Каждое линейное отображение  $F : V \rightarrow W$  задаёт изоморфизм  $V/\ker F \simeq \text{im } F$ , сопоставляющий классу  $[v] \in V/\ker F$  вектор  $F(v) \in \text{im } F$ . Это переформулировка того, что

$$F(v) = F(w) \iff v - w \in \ker F$$

(ср. с форм. (4-5) на стр. 58).

<sup>1</sup>См. н° 2.1.1 на стр. 25.

ПРИМЕР 4.10 (линейная оболочка как фактор)

Линейная оболочка  $W = \text{span}(w_1, w_2, \dots, w_m) \subset V$  произвольного набора из  $m$  векторов  $w_m$  векторного пространства  $V$  является образом линейного отображения  $F: \mathbb{K}^m \rightarrow V$ , переводящего стандартный базисный вектор  $e_i \in \mathbb{K}^m$  в вектор  $w_i \in W$ . Ядро этого отображения  $U = \ker F \subset \mathbb{K}^m$  представляет собою *пространство линейных соотношений* между образующими векторами  $w_i$  пространства  $W$  в том смысле, что вектор

$$u = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m) = \lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2 + \dots + \lambda_m e_m \in \mathbb{K}^m$$

лежит в  $U$  тогда и только тогда, когда  $\lambda_1 w_1 + \lambda_2 w_2 + \dots + \lambda_m w_m = 0$  в  $W$ . Изоморфизм

$$W = \text{im } F \simeq \mathbb{K}^m / U$$

из предыдущего [прим. 4.9](#) в данном случае утверждает, что векторы  $w \in W$  можно трактовать как классы вычетов всевозможных формальных линейных комбинаций  $x_1 w_1 + x_2 w_2 + \dots + x_n w_n$  по модулю тех комбинаций, что являются линейными зависимостями между векторами  $w_i$ .

Предложение 4.9

Если векторы  $v_1, v_2, \dots, v_k$  дополняют некоторый базис  $u_1, u_2, \dots, u_m$  подпространства  $U \subset V$  до базиса во всём пространстве  $V$ , то классы  $[v_1], [v_2], \dots, [v_k]$  их вычетов по модулю  $U$  образуют базис фактор пространства  $V/U$ . В частности,  $\dim U + \dim V/U = \dim V$ .

Доказательство. Это вытекает из [предл. 4.7](#) на стр. 58 и его доказательства, применённых к линейному отображению факторизации  $V \twoheadrightarrow V/U$ . Повторим проведённое там рассуждение ещё раз на языке классов вычетов. Классы  $[v_i]$  линейно независимы в  $V/U$ , поскольку наличие для некоторых  $\lambda_i \in \mathbb{K}$  равенства  $\lambda_1 [v_1] + \lambda_2 [v_2] + \dots + \lambda_k [v_k] = [\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \dots + \lambda_k v_k] = [0]$  в пространстве  $V/U$  означает, что для некоторых  $\mu_j \in \mathbb{K}$  в пространстве  $V$  выполняется равенство  $\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \dots + \lambda_k v_k = \mu_1 u_1 + \mu_2 u_2 + \dots + \mu_m u_m$ , возможное только когда все  $\lambda_i = 0$  и все  $\mu_j = 0$ . Классы  $[v_i]$  линейно порождают  $V/U$ , поскольку для любого вектора

$$v = \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \dots + \lambda_k v_k + \mu_1 u_1 + \mu_2 u_2 + \dots + \mu_m u_m \in V$$

класс  $[v] = [\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \dots + \lambda_k v_k] = \lambda_1 [v_1] + \lambda_2 [v_2] + \dots + \lambda_k [v_k]$  в  $V/U$ . □

## §5. Матрицы

**5.1. Умножение матриц** происходит из композиции линейных отображений. А именно, зафиксируем в пространствах  $U, V, W$  некоторые базисы  $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}$ , и пусть линейные отображения  $B: U \rightarrow V$  и  $A: V \rightarrow W$  имеют в этих базисах матрицы  $B_{vu} = (b_{ij})$  и  $A_{wv} = (a_{ij})$ , т. е.

$$B(u_j) = \sum_k v_k b_{kj} \quad \text{и} \quad A(v_k) = \sum_i w_i a_{ik}.$$

Тогда их композиция  $C = A \circ B: U \rightarrow W$  переводит каждый базисный вектор  $u_j$  из базиса  $\mathbf{u}$  в

$$C(u_j) = A\left(\sum_k v_k b_{kj}\right) = \sum_k A(v_k) b_{kj} = \sum_i \sum_k w_i a_{ik} b_{kj} = \sum_i w_i \cdot \sum_k a_{ik} b_{kj}.$$

Тем самым, матрица  $C_{wu} = (c_{ij})$  имеет в  $i$ -й строке и  $j$ -м столбце элемент

$$c_{ij} = \sum_k a_{ik} b_{kj} = a_{i1} b_{1j} + a_{i2} b_{2j} + \dots + a_{is} b_{sj}, \quad \text{где } s = \dim V, \quad (5-1)$$

равный произведению  $i$ -й строки матрицы  $A$  на  $j$ -й столбец матрицы  $B$  в том самом смысле, как мы определили его в форм. (2-5) на стр. 26:

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = (a_1, a_2, \dots, a_s) \cdot \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_s \end{pmatrix} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + \dots + a_s b_s. \quad (5-2)$$

Таким образом, матрица композиции линейных отображений является произведением матриц этих отображений.

Если в формуле (5-2) интерпретировать каждую букву  $a_\nu$  в строке  $\mathbf{a}$  как столбец элементов, составляющих  $\nu$ -тый столбец матрицы  $A$ , а вместо столбца  $\mathbf{b}$  подставить  $j$ -й столбец матрицы  $B$ , то правило умножения матриц можно сформулировать следующим образом: в  $j$ -м столбце матрицы  $AB$  стоит линейная комбинация столбцов матрицы  $A$  взятых с коэффициентами, стоящими в  $j$ -м столбце матрицы  $B$ . Например, чтобы получить из матрицы

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{pmatrix} = (a_1, a_2, a_3) \quad (5-3)$$

матрицу  $(a_1 + a_2 \cdot \lambda, a_1 + a_3, a_3 + a_2 \cdot \mu, a_1 \cdot 1 + a_2 \cdot 2 + a_3 \cdot 3)$ , у которой во втором столбце стоит сумма первого и третьего столбцов матрицы  $A$ , а в первом и третьем — суммы первого и третьего столбцов матрицы  $A$  со вторым, умноженным, соответственно, на  $\lambda$  и на  $\mu$ , и кроме того, имеется ещё один, четвёртый столбец, равный сумме всех столбцов матрицы  $A$ , помноженных на их номера, надо умножить матрицу  $A$  справа на матрицу

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ \lambda & 0 & \mu & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

УПРАЖНЕНИЕ 5.1. Убедитесь в этом прямым вычислением по формуле (5-1).

Симметричным образом, интерпретируя в формуле (5-2) каждую букву  $b_\mu$  в столбце  $\mathbf{b}$  как  $\mu$ -ю строку матрицы  $B$ , а строку  $\mathbf{a}$  — как  $i$ -ю строку матрицы  $A$ , мы заключаем, что в  $i$ -й строке матрицы  $AB$  стоит линейная комбинация строк матрицы  $B$  с коэффициентами из  $i$ -й строки матрицы  $A$ . Например, если в той же матрице (5-3) хочется поставить вторую строку на место первой, а вместо второй написать её сумму с первой строкой, умноженной на  $\lambda$ , то это достигается умножением слева на матрицу

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \lambda & 1 \end{pmatrix}.$$

УПРАЖНЕНИЕ 5.2. Убедитесь в этом прямым вычислением по формуле (5-1).

Два только данных нами описания произведения  $AB$  получаются друг из друга заменой слова «столбец» на слово «строка» с одновременной перестановкой местами букв  $A$  и  $B$ . Матрица, по строкам которой записаны столбцы матрицы<sup>1</sup>  $A = (a_{ij})$  называется *транспонированной* к матрице  $A$  и обозначается  $A^t = (a_{ij}^t)$ . Её элементы  $a_{ij}^t$  связаны с элементами  $a_{ij}$  матрицы  $A$  равенствами  $a_{ij}^t = a_{ji}$ .

УПРАЖНЕНИЕ 5.3. Проверьте, что транспонирование является инволютивным антигомоморфизмом, т. е.  $(A^t)^t = A$  и  $(AB)^t = B^t A^t$ .

Так как композиция линейных отображений ассоциативна, произведение матриц также ассоциативно, т. е. для любых  $F \in \text{Mat}_{m \times k}(\mathbb{k})$ ,  $G \in \text{Mat}_{k \times \ell}(\mathbb{k})$  и  $H \in \text{Mat}_{\ell \times n}(\mathbb{k})$  выполняется равенство  $(FG)H = H(FG)$ . Поскольку композиция линейных отображений линейна по каждому из сомножителей<sup>2</sup>, в произведении линейных комбинаций матриц одинакового размера можно раскрывать скобки по обычным правилам, т. е.

$$(\lambda_1 F_1 + \mu_1 G_1)(\lambda_2 F_2 + \mu_2 G_2) = \lambda_1 \lambda_2 F_1 F_2 + \lambda_1 \mu_2 F_1 G_2 + \mu_1 \lambda_2 G_1 F_2 + \mu_1 \mu_2 G_1 G_2$$

для всех  $F_i \in \text{Mat}_{m \times k}(\mathbb{k})$ ,  $G_i \in \text{Mat}_{k \times \ell}(\mathbb{k})$  и всех  $\lambda_i, \mu_i \in \mathbb{k}$ .

Как и композиция отображений, умножение матриц обычно не коммутативно. Например,

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 4 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 10 \\ 12 & 15 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 4 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 6 \\ 4 & 23 \end{pmatrix}.$$

Более того, как и композиция отображений, произведение матриц не всегда определено: ширина левого множителя должна быть равна высоте правого. В частности, бывает так, что произведение  $AB$  определено, а  $BA$  — нет.

**5.2. Матрицы перехода.** Пусть вектор  $\mathbf{v}$  линейно выражается через векторы  $w_1, \dots, w_m$ :

$$\mathbf{v} = \sum_{i=1}^m w_i x_i = w_1 x_1 + w_2 x_2 + \dots + w_m x_m. \quad (5-4)$$

<sup>1</sup>Или — что то же самое — по столбцам которой стоят строки матрицы  $A$ .

<sup>2</sup>См. упр. 4.7 на стр. 57.



Организуем коэффициенты  $x_i \in \mathbb{K}$  в матрицу-столбец размера  $m \times 1$

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix} \quad (5-5)$$

а векторы  $w_i$  — в матрицу-строку  $\mathbf{w} = (w_1, w_2, \dots, w_m)$  размера  $1 \times m$  с элементами из  $V$ . Тогда формула (5-4) свернётся в матричное равенство  $v = \mathbf{w}x$ , в котором  $v$  рассматривается как матрица размера  $1 \times 1$  с элементом из  $V$ . Если имеются два набора векторов:  $\mathbf{u} = (u_1, u_2, \dots, u_n)$ ,  $\mathbf{w} = (w_1, w_2, \dots, w_m)$ , и каждый вектор  $u_j$  первого из них линейно выражается через векторы второго в виде

$$u_j = \sum_{v=1}^m c_{vj} w_v = w_1 \cdot c_{1j} + w_2 \cdot c_{2j} + \dots + w_m \cdot c_{mj},$$

то эти  $n$  равенств собираются в одну матричную формулу  $\mathbf{u} = \mathbf{w} \cdot C_{\mathbf{w}\mathbf{u}}$ , где  $\mathbf{u} = (u_1, u_2, \dots, u_n)$  и  $\mathbf{w} = (w_1, w_2, \dots, w_m)$  рассматриваются как матрицы-строки с элементами из  $V$ , а матрица

$$C_{\mathbf{w}\mathbf{u}} = (c_{ij}) = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & \dots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \dots & c_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ c_{m1} & c_{m2} & \dots & c_{mn} \end{pmatrix} \quad (5-6)$$

получается подстановкой в матрицу  $\mathbf{u}$  вместо каждого из векторов  $u_j$  столбца коэффициентов его линейного выражения через векторы  $w_i$ . Матрица (5-6) называется *матрицей перехода* от векторов  $\mathbf{u}$  к векторам  $\mathbf{w}$ . Название объясняется тем, что умножение на матрицу  $C_{\mathbf{u}\mathbf{w}}$  позволяет переходить от линейных выражений произвольных векторов  $v_k \in V$  через векторы  $u_j$  к линейным выражениям этих же векторов через векторы  $w_i$ , а именно

$$v = \mathbf{u}C_{\mathbf{u}\mathbf{v}} \Rightarrow v = \mathbf{w}C_{\mathbf{w}\mathbf{u}}C_{\mathbf{u}\mathbf{v}}.$$

Таким образом, произведение матрицы перехода от векторов  $\mathbf{u}$  к векторам  $\mathbf{w}$  и матрицы перехода от векторов  $\mathbf{v}$  к векторам  $\mathbf{u}$  является матрицей перехода от векторов  $\mathbf{v}$  к векторам  $\mathbf{w}$ :

$$C_{\mathbf{w}\mathbf{u}}C_{\mathbf{u}\mathbf{v}} = C_{\mathbf{w}\mathbf{v}}. \quad (5-7)$$

Подчеркнём, что когда набор векторов  $\mathbf{w} = (w_1, w_2, \dots, w_m)$  линейно зависим, каждый вектор  $v$  из их линейной оболочки допускает много *различных* линейных выражений через векторы  $w_j$ . Поэтому обозначение  $C_{\mathbf{w}\mathbf{v}}$  в этой ситуации не корректно в том смысле, что элементы матрицы  $C_{\mathbf{w}\mathbf{v}}$  определяются наборами векторов  $\mathbf{w}$  и  $\mathbf{v}$  не однозначно, и равенство (5-7) означает, что имея какие-нибудь линейные выражения  $C_{\mathbf{w}\mathbf{u}}$  и  $C_{\mathbf{u}\mathbf{v}}$  векторов  $\mathbf{u}$  через  $\mathbf{v}$  и векторов  $\mathbf{v}$  через  $\mathbf{w}$ , мы можем предъявить некоторое явное линейное выражение  $C_{\mathbf{w}\mathbf{v}}$  векторов  $\mathbf{u}$  через векторы  $\mathbf{w}$ , перемножив матрицы  $C_{\mathbf{w}\mathbf{u}}$  и  $C_{\mathbf{u}\mathbf{v}}$ .

Если же набор векторов  $\mathbf{e} = (e_1, e_2, \dots, e_n)$  является базисом, то матрица перехода  $C_{\mathbf{e}\mathbf{w}}$ , выражающая произвольный набор векторов  $\mathbf{w} = (w_1, w_2, \dots, w_m)$  через базис  $\mathbf{e}$  однозначно определяется по наборам  $\mathbf{e}$  и  $\mathbf{w}$ , т. е. два набора векторов  $\mathbf{u}$ ,  $\mathbf{w}$  совпадают если и только если выполняется равенство  $C_{\mathbf{e}\mathbf{u}} = C_{\mathbf{e}\mathbf{w}}$ .

### 5.3. Обратимые матрицы. Квадратная матрица

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(по диагонали стоят единицы, в остальных местах — нули) называется *единичной*.

УПРАЖНЕНИЕ 5.4. Убедитесь, что  $AE = A$  и  $EA = A$  всякий раз, когда такие произведения определены.

Квадратная матрица  $A$  называется *обратимой* или *невырожденной*, если существует такая матрица  $A^{-1}$ , что  $AA^{-1} = A^{-1}A = E$ . Матрица  $A^{-1}$  называется *обратной* к  $A$ . Она однозначно определяется матрицей  $A$ , поскольку для любых двух матриц  $B, C$ , удовлетворяющих равенствам  $AB = E$  и  $CA = E$ , имеем  $C = CE = C(AB) = (CA)B = EB = B$ . В частности, для обратимости матрицы  $A$  достаточно, чтобы существовали такие матрицы  $B$  и  $C$ , что  $AB = E$  и  $CA = E$ .

УПРАЖНЕНИЕ 5.5. Докажите, что обратимость матрицы  $A$  равносильна обратимости транспонированной к ней матрицы<sup>1</sup>  $A^t$ .

ПРИМЕР 5.1 (ОБРАТИМЫЕ  $2 \times 2$ -МАТРИЦЫ)

Матричное равенство

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

означает, что стандартные базисные векторы  $e_1, e_2$  пространства  $\mathbb{k}^2$  линейно выражаются через столбцы стоящей слева матрицы  $A$  как

$$\begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix} \cdot x_1 + \begin{pmatrix} b \\ d \end{pmatrix} \cdot x_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{и} \quad \begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix} \cdot y_1 + \begin{pmatrix} b \\ d \end{pmatrix} \cdot y_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Если такие выражения существуют, то столбцы матрицы  $A$  линейно порождают  $\mathbb{k}^2$  и в частности не пропорциональны, т. е.  $\det A \neq 0$ . Наоборот, если  $\det A \neq 0$ , то по правилу Крамера<sup>2</sup>

$$x_1 = \frac{d}{ad - bc}, \quad x_2 = \frac{-c}{ad - bc}, \quad y_1 = \frac{-b}{ad - bc}, \quad y_2 = \frac{a}{ad - bc}.$$

Мы заключаем, что  $2 \times 2$ -матрица  $A$  с элементами из поля  $\mathbb{k}$  обратима тогда и только тогда, когда  $\det A \neq 0$  и в этом случае

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^{-1} = (ad - bc)^{-1} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}. \quad (5-8)$$

Стоящая справа матрица называется *присоединённой*<sup>3</sup> к матрице  $A$  и обозначается

$$A^\vee \stackrel{\text{def}}{=} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}.$$

<sup>1</sup>См. упр. 5.3 на стр. 64.

<sup>2</sup>См. лем. 1.2 на стр. 13.

<sup>3</sup>По-английски *adjunct*.

## ПРЕДЛОЖЕНИЕ 5.1

Пусть набор векторов  $\mathbf{v} = (v_1, v_2, \dots, v_n)$  образует базис пространства  $V$ . Для того, чтобы набор из  $n$  векторов  $\mathbf{u} = \mathbf{v} C_{vu}$  тоже составлял базис, необходимо и достаточно, чтобы матрица перехода  $C_{vu} \in \text{Mat}_{n \times n}(\mathbb{k})$  была обратима, и в этом случае  $C_{vu}^{-1} = C_{uv}$ .

Доказательство. Если векторы  $\mathbf{u}$  образуют базис, то векторы  $\mathbf{e}$  линейно выражаются через  $\mathbf{u}$ , и согласно формуле (5-7) имеют место равенства  $C_{ee} = C_{eu}C_{ue}$  и  $C_{uu} = C_{ue}C_{eu}$ . Так как каждый набор векторов имеет единственное выражение через базис, мы имеем равенства

$$C_{ee} = C_{uu} = E.$$

Тем самым,  $C_{ue}C_{eu} = C_{ue}C_{eu} = E$ . Наоборот, если набор  $\mathbf{u}$  не является базисом, то он линейно зависим, т. е.  $\mathbf{u}\lambda = 0$  для некоторого ненулевого столбца коэффициентов  $\lambda \in \mathbb{k}^n$ . Тем самым,  $\mathbf{e}C_{eu}\lambda = 0$ , откуда  $C_{eu}\lambda = 0$ , так как  $\mathbf{e}$  — базис. Если бы матрица  $C_{eu}$  была обратима, умножая обе части этого равенства слева на  $C_{eu}^{-1}$ , мы получили бы  $\lambda = 0$  вопреки выбору  $\lambda$ . Противоречие.  $\square$

## СЛЕДСТВИЕ 5.1

Следующие условия на квадратную матрицу  $A \in \text{Mat}_{n \times n}(\mathbb{k})$  эквивалентны:

- 1) матрица  $A$  обратима
- 2) столбцы матрицы  $A$  линейно независимы
- 3) столбцы матрицы  $A$  линейно порождают координатное пространство  $\mathbb{k}^n$ ,

и то же самое верно с заменой столбцов на строки.

Доказательство. Обозначим через  $a_1, \dots, a_n$  столбцы матрицы  $A$ , воспринимаемые как векторы координатного пространства  $\mathbb{k}^n$ . Матрица  $A$  является матрицей перехода от этих векторов к стандартному базису пространства  $\mathbb{k}^n$ . По предл. 5.1 обратимость матрицы  $A$  равносильна тому, что векторы  $a_i$  образуют в  $\mathbb{k}^n$  базис, что в свою очередь равносильно каждому из условий (2), (3) по сл. 4.1 на стр. 52. Последнее утверждение предложения вытекает из упр. 5.5 на стр. 66.  $\square$

## ПРИМЕР 5.2 (ЗАМЕНА КООРДИНАТ ПРИ СМЕНЕ БАЗИСА)

Пусть набор векторов  $\mathbf{w} = (w_1, w_2, \dots, w_m)$  выражается через базис  $\mathbf{e} = (e_1, e_2, \dots, e_n)$  как  $\mathbf{w} = \mathbf{e}C_{ew}$ . Если  $\mathbf{v} = \mathbf{e}C_{ev}$  — другой базис, то в выражении  $\mathbf{w} = \mathbf{v}C_{vw}$  векторов  $\mathbf{w}$  через базис  $\mathbf{v}$  матрица  $C_{vw} = C_{ve}C_{ew} = C_{ev}^{-1}C_{ew}$ . В частности столбец координат произвольного вектора  $\mathbf{w}$  в базисе  $\mathbf{v}$  получаются из столбца его координат в базисе  $\mathbf{e}$  умножением слева на матрицу  $C_{ev}^{-1}$ , обратную к матрице координат векторов базиса  $\mathbf{v}$  в базисе  $\mathbf{e}$ .

## ПРИМЕР 5.3 (ЗАМЕНА МАТРИЦЫ ОТОБРАЖЕНИЯ ПРИ СМЕНЕ БАЗИСА)

Напомню, что для линейного отображения  $F: U \rightarrow W$  и строки векторов  $\mathbf{v} = (v_1, v_2, \dots, v_r)$  мы обозначаем через  $F(\mathbf{v}) \stackrel{\text{def}}{=} (F(v_1), F(v_2), \dots, F(v_r))$  строку значений отображения  $F$  на этих векторах. В силу линейности отображения  $F$  для любой числовой матрицы  $M \in \text{Mat}_{r \times s}(\mathbb{k})$  выполняется равенство  $F(\mathbf{v}M) = F(\mathbf{v})M$ .

УПРАЖНЕНИЕ 5.6. Убедитесь в этом.

Матрица  $F_{\mathbf{w}\mathbf{u}}$  отображения  $F$  в базисах  $\mathbf{u}$  и  $\mathbf{w}$  пространств  $U$  и  $W$  однозначно определяется равенством  $F(\mathbf{u}) = \mathbf{w}F_{\mathbf{w}\mathbf{u}}$ . В других базисах  $\tilde{\mathbf{u}} = \mathbf{u}C_{\mathbf{u}\tilde{\mathbf{u}}}$  и  $\tilde{\mathbf{w}} = \mathbf{w}C_{\mathbf{w}\tilde{\mathbf{w}}}$  мы получим

$$F_{\tilde{\mathbf{w}}\tilde{\mathbf{u}}} = C_{\tilde{\mathbf{w}}\mathbf{w}}F_{\mathbf{w}\mathbf{u}}C_{\mathbf{u}\tilde{\mathbf{u}}} = C_{\tilde{\mathbf{w}}\mathbf{w}}^{-1}F_{\mathbf{w}\mathbf{u}}C_{\mathbf{u}\tilde{\mathbf{u}}} = C_{\tilde{\mathbf{w}}\mathbf{w}}F_{\mathbf{w}\mathbf{u}}C_{\tilde{\mathbf{u}}\mathbf{u}}^{-1}, \quad (5-9)$$

поскольку  $F(\tilde{\mathbf{u}}) = F(\mathbf{u}C_{\mathbf{u}\tilde{\mathbf{u}}}) = F(\mathbf{u})C_{\mathbf{u}\tilde{\mathbf{u}}} = \mathbf{w}F_{\mathbf{w}\mathbf{u}}C_{\mathbf{u}\tilde{\mathbf{u}}} = \tilde{\mathbf{w}}C_{\tilde{\mathbf{w}}\mathbf{w}}F_{\mathbf{w}\mathbf{u}}C_{\mathbf{u}\tilde{\mathbf{u}}}$ . Если линейный оператор  $F: V \rightarrow V$  действует из векторного пространства  $V$  в себя, то его принято задавать в базисе  $\mathbf{e} = (e_1, \dots, e_n)$  матрицей  $F_{\mathbf{e}} = F_{\mathbf{e}\mathbf{e}}$ , у которой в  $j$ -м столбце стоят координаты вектора  $F(e_j)$  в базисе  $\mathbf{e}$ . В этом случае при замене базиса  $\mathbf{e}$  на базис  $\mathbf{u} = \mathbf{e}C_{\mathbf{e}\mathbf{u}}$  матрица отображения  $F$  в новом базисе приобретёт вид

$$F_{\mathbf{u}} = C_{\mathbf{u}\mathbf{e}}F_{\mathbf{e}}C_{\mathbf{e}\mathbf{u}} = C_{\mathbf{e}\mathbf{u}}^{-1}F_{\mathbf{e}}C_{\mathbf{e}\mathbf{u}} = C_{\mathbf{u}\mathbf{e}}F_{\mathbf{e}}C_{\mathbf{u}\mathbf{e}}^{-1}. \quad (5-10)$$

**5.4. Ранг матрицы.** Размерность линейной оболочки столбцов матрицы  $A \in \text{Mat}_{m \times n}(\mathbb{k})$  в координатном векторном пространстве  $\mathbb{k}^m$  называется *рангом* матрицы  $A$  и обозначается  $\text{rk } A$ . Каждая матрица  $A$  задаёт линейное отображение  $F_A: \mathbb{k}^n \rightarrow \mathbb{k}^m$ ,  $x \mapsto Ax$ , которое переводит координатный столбец  $x \in \mathbb{k}^n$  в координатный столбец  $Ax \in \mathbb{k}^m$  и матрица которого в стандартных базисах координатных пространств  $\mathbb{k}^n$  и  $\mathbb{k}^m$  совпадает с матрицей  $A$ . Линейная оболочка столбцов матрицы  $A$  представляет собою образ оператора  $F_A$ . Тем самым,  $\text{rk } A = \dim \text{im } F_A$ .

ЛЕММА 5.1

Ранг матрицы не меняется при умножении на обратимые матрицы слева или справа.

Доказательство. Пусть матрица  $A \in \text{Mat}_{m \times n}(\mathbb{k})$  произвольна, а матрицы  $D \in \text{Mat}_{n \times n}(\mathbb{k})$  и  $C \in \text{Mat}_{m \times m}(\mathbb{k})$  обратимы. Рассмотрим задаваемые этими матрицами линейные отображения

$$F_C: \mathbb{k}^m \rightarrow \mathbb{k}^m, z \mapsto Cz, \quad F_A: \mathbb{k}^n \rightarrow \mathbb{k}^m, y \mapsto Ay, \quad F_D: \mathbb{k}^n \rightarrow \mathbb{k}^n, x \mapsto Dx.$$

Согласно [сл. 5.1](#) отображения  $F_D$  и  $F_C$  являются линейными изоморфизмами. В силу биективности отображения  $F_D$  образ композиции  $F_A F_D$  совпадает с образом отображения  $F_A$ :

$$\text{im}(F_A F_D) = F_A(F_D(\mathbb{k}^n)) = F_A(\mathbb{k}^n) = \text{im } F_A.$$

Образ композиции  $F_C F_A F_D$  является образом подпространства  $\text{im } F_A \subset \mathbb{k}^m$  при изоморфизме  $F_C: \mathbb{k}^m \xrightarrow{\sim} \mathbb{k}^m$ . Следовательно  $\dim \text{im}(F_C F_A F_D) = \dim \text{im } F_A$ , т. е. линейная оболочка столбцов матрицы  $CAD$  имеет ту же размерность, что и линейная оболочка столбцов матрицы  $A$ .  $\square$

ТЕОРЕМА 5.1 (ТЕОРЕМА О РАНГЕ МАТРИЦЫ)

Для любой матрицы  $A \in \text{Mat}_{m \times n}(\mathbb{k})$  выполняется равенство  $\text{rk } A = \text{rk } A^t$ . Иными словами, линейная оболочка строк матрицы  $A$  в координатном пространстве  $\mathbb{k}^n$  и линейная оболочка столбцов матрицы  $A$  в координатном пространстве  $\mathbb{k}^m$  имеют равные размерности.

Доказательство. Применяя [лем. 5.1](#) к транспонированной матрице  $A^t$ , мы заключаем, что размерность линейной оболочки строк матрицы  $A$  тоже не меняется при умножении матрицы  $A$  слева и справа на обратимые матрицы. Следуя доказательству [предл. 4.7](#) на стр. 58 обозначим через  $u_1, \dots, u_k$  базис в ядре  $\ker F_A \subset \mathbb{k}^n$  задаваемого матрицей  $A$  линейного отображения  $F_A: \mathbb{k}^n \rightarrow \mathbb{k}^m$ ,  $x \mapsto Ax$ , и дополним его до базиса  $\mathbf{v} = (w_1, \dots, w_r, u_1, \dots, u_k)$  всего пространства  $\mathbb{k}^n$ . Как мы видели в доказательстве [предл. 4.7](#), векторы  $f_j = F_A(w_j)$ , где  $1 \leq j \leq r$ , образуют базис в подпространстве  $\text{im } F_A \subset \mathbb{k}^m$ . Дополним его до базиса  $\mathbf{f} = (f_1, \dots, f_m)$  всего пространства  $\mathbb{k}^m$ . Матрица  $F_{\mathbf{f}\mathbf{v}} = (f_{ij})$  оператора  $F_A: \mathbb{k}^n \rightarrow \mathbb{k}^m$  в базисах  $\mathbf{f}$  и  $\mathbf{v}$  пространств  $\mathbb{k}^m$

и  $\mathbb{k}^n$  имеет  $f_{ii} = 1$  при  $1 \leq i \leq r$  и нули в остальных местах. Таким образом, линейная оболочка её строк в координатном пространстве  $\mathbb{k}^n$  и линейная оболочка её столбцов в координатном пространстве  $\mathbb{k}^m$  имеют одну и ту же размерность  $r$ . Согласно [прим. 5.3](#) матрица  $F_{fv} = C_{fm}AC_{nv}$  получается из матрицы  $A = F_{mn}$  оператора  $F_A$  в стандартных базисах  $\mathbf{m}$  и  $\mathbf{n}$  пространств  $\mathbb{k}^m$  и  $\mathbb{k}^n$  умножением слева и справа на обратимые<sup>1</sup> матрицы  $C_{fm}$  и  $C_{nv}$  переходов, соответственно, от стандартного базиса  $\mathbf{m}$  в  $\mathbb{k}^m$  к базису  $\mathbf{f}$  и от базиса  $\mathbf{v}$  к стандартному базису  $\mathbf{n}$  в  $\mathbb{k}^n$ . Как мы знаем, такое умножение не изменяет ни размерность линейной оболочки строк, ни размерность линейной оболочки столбцов.  $\square$

**5.5. Системы линейных уравнений.** Система неоднородных линейных уравнений

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + \dots + a_{3n}x_n = b_3 \\ \dots \dots \dots \dots \dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases} \quad (5-11)$$

на неизвестные  $x_1, \dots, x_n$  в матричных обозначениях записывается одним равенством  $Ax = b$ , в котором  $A = (a_{ij}) \in \text{Mat}_{m \times n}$ , а  $x$  и  $b$  обозначают матрицы-столбцы, состоящие из неизвестных и правых частей уравнений (5-11). Как и в [п° 5.4](#) выше, обозначим через

$$F_A: \mathbb{k}^n \rightarrow \mathbb{k}^m, \quad x \mapsto Ax,$$

линейное отображение, переводящее стандартные базисные векторы  $e_1, \dots, e_n \in \mathbb{k}^n$  в столбцы  $a_1, \dots, a_n$  матрицы  $A$ . Множество решений уравнения  $Ax = b$  и системы (5-11) состоит из всех таких векторов  $x \in \mathbb{k}^n$ , что  $F_A(x) = b$ , т. е. представляет собою полный прообраз  $F^{-1}(b)$  вектора  $b$  при отображении  $F_A$ . Если  $b \notin \text{im } F_A$ , то этот прообраз пуст и система (5-11) несовместна. Если  $b \in \text{im } F_A$ , то по [форм. \(4-5\)](#) на [стр. 58](#) множество решений системы (5-11) представляет собою аффинное подпространство  $F_A^{-1}(b) = p + \ker F_A \subset \mathbb{k}^n$ , которое является сдвигом векторного подпространства  $\ker F_A \subset \mathbb{k}^n$  в любую такую точку  $p$ , что  $F(p) = b$ .

На языке уравнений ядро  $\ker F_A$  представляет собою множество решений системы однородных линейных уравнений  $Ax = 0$  с теми же самыми левыми частями, что и система (5-11). В развёрнутом виде она выглядит как

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = 0 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + \dots + a_{3n}x_n = 0 \\ \dots \dots \dots \dots \dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = 0. \end{cases} \quad (5-12)$$

Наличие у такой системы ненулевого решения означает, что  $\ker F_A \neq 0$ , и в этом случае любая система (5-11) либо несовместна, либо имеет более одного решения<sup>2</sup>. Это наблюдение известно как *альтернатива Фредгольма*: либо у однородной системы (5-12) есть ненулевое решение, либо у каждой системы (5-11) имеется не более одного решения.

<sup>1</sup>См. [предл. 5.1](#) на [стр. 67](#).

<sup>2</sup>А над бесконечным полем — бесконечно много решений.

## Предложение 5.2

Пространство решений системы линейных однородных уравнений (5-12) имеет размерность  $n - \text{rk } A$ . В частности, эта размерность не меньше, чем  $n - m$ , и если в число уравнений  $m$  меньше, чем число неизвестных  $n$ , то система обязательно имеет ненулевое решение.

Доказательство. По предл. 4.7 на стр. 58  $\dim \ker F_A = n - \dim \text{im } F_A = n - \text{rk } A$ . □

## Предложение 5.3 (критерий Кронекера – Капелли)

Система (5-11) совместна если и только если  $\text{rk } A = \text{rk } [A|b]$ , где расширенная матрица системы

$$[A|b] \in \text{Mat}_{m \times (n+1)}(\mathbb{k})$$

получена приписыванием справа к матрице  $A$  столбца  $b$  правых частей системы (5-11).

Доказательство. Совместность системы (5-11) равносильна тому, что вектор  $b$  лежит в линейной оболочке столбцов матрицы  $A$ , что в свою очередь означает, что размерность линейной оболочки столбцов у матрицы  $A$  такая же, как у расширенной матрицы  $[A|b]$ . □

## Пример 5.4 (системы с квадратной матрицей левых частей)

Если количество уравнений в системе (5-11) равно количеству неизвестных, линейное отображение  $F_A : \mathbb{k}^n \rightarrow \mathbb{k}^n$  является эндоморфизмом  $n$ -мерного векторного пространства, и по сл. 4.6 на стр. 58 равенство  $\ker F_A = 0$  равносильно сюръективности оператора  $F_A$ . Это позволяет уточнить альтернативу Фредгольма: при  $m = n$  либо все неоднородные системы (5-11) имеют единственное решение, либо у однородной системы (5-12) есть ненулевое решение. В первом случае матрица  $A$  обратима по сл. 5.1, и знание обратной матрицы  $A^{-1}$  позволяет решить систему  $Ax = b$  при любой правой части  $b$  по формуле  $x = A^{-1}b$ .

**5.6. Алгебры над полем.** Векторное пространство  $A$  над полем  $\mathbb{k}$  называется  $\mathbb{k}$ -алгеброй<sup>1</sup>, если на нём имеется билинейная операция умножения  $A \times A \rightarrow A$ . Это требование включает в себя перестановочность умножения векторов на константы с умножением в алгебре:

$$\forall \lambda \in \mathbb{k}, \forall a, b \in A \quad (\lambda a)b = \lambda(ab) = a(\lambda b)$$

и стандартное правило раскрытия скобок:  $\forall \lambda_1, \lambda_2, \mu_1, \mu_2 \in \mathbb{k}$  и  $\forall a_1, a_2, b_1, b_2 \in A$

$$(\lambda_1 a_1 + \mu_1 b_1)(\lambda_2 a_2 + \mu_2 b_2) = \lambda_1 \lambda_2 a_1 a_2 + \lambda_1 \mu_2 a_1 b_2 + \mu_1 \lambda_2 b_1 a_2 + \mu_1 \mu_2 b_1 b_2.$$

Алгебра  $A$  называется ассоциативной, если  $\forall a, b, c \in A \quad (ab)c = a(bc)$ . Алгебра  $A$  называется коммутативной, если  $\forall a, b \in A \quad ab = ba$ . Алгебра  $A$  называется алгеброй с единицей, если в ней есть такой элемент  $e \in A$ , что  $ea = ae = a$  для всех  $a \in A$ .

Упражнение 5.7. Покажите, что  $0 \cdot a = 0$  для всех  $a$  в любой алгебре  $A$  и что единичный элемент единствен (если существует).

Примерами коммутативных ассоциативных алгебр с единицами являются алгебра многочленов  $\mathbb{k}[x_1, x_2, \dots, x_n]$  и алгебра  $\mathbb{k}[[\mathbb{k}_1, \mathbb{k}_2, \dots, \mathbb{k}_n]]$  формальных степенных рядов с коэффициентами из поля  $\mathbb{k}$ . Ключевыми примерами некоммутативных ассоциативных алгебр являются алгебры  $\text{End}(V)$  линейных эндоморфизмов векторных пространств  $V$  над полем  $\mathbb{k}$  и алгебры  $\text{Mat}_n(\mathbb{k})$

<sup>1</sup>Более торжественно: алгеброй над полем  $\mathbb{k}$ .

квадратных матриц размера  $n \times n$  с элементами из поля  $\mathbb{k}$ . Последние являются частными примерами первых, поскольку каждая квадратная матрица  $A \in \text{Mat}_n(\mathbb{k})$  может восприниматься как эндоморфизм координатного пространства  $\mathbb{k}^n$ , действующий на столбец  $x \in \mathbb{k}^n$  по правилу<sup>1</sup>  $x \mapsto Ax$ .

ПРИМЕР 5.5 (БАЗИС МАТРИЧНОЙ АЛГЕБРЫ)

Базис алгебры  $\text{Mat}_n(\mathbb{k})$  как векторного пространства над полем  $\mathbb{k}$  составляют матрицы  $E_{ij}$  имеющие единицу в пересечении  $i$ -й строки с  $j$ -м столбцом и нули во всех остальных местах. Соответствующий линейный оператор  $E_{ij} : \mathbb{k}^n \rightarrow \mathbb{k}^n$  переводит  $e_j$  в  $e_i$ , а все остальные стандартные базисные векторы отображает в нуль. Из этого описания вытекает, что

$$E_{ij}E_{k\ell} = \begin{cases} E_{i\ell} & \text{при } j = k \\ 0 & \text{в остальных случаях.} \end{cases} \quad (5-13)$$

Написанная таблица умножения базисных матриц позволяет перемножать произвольные матрицы, которые являются линейными комбинациями базисных, просто раскрывая скобки. Например, для всех  $\alpha \in \mathbb{k}$  и  $n \in \mathbb{Z}$

$$\begin{pmatrix} 1 & \alpha \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^n = (E + \alpha E_{12})^n = E + n\alpha E_{12} = \begin{pmatrix} 1 & \alpha n \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

а из равенства  $(E + \alpha E_{12})(E - \alpha E_{12}) = E$  вытекает, что

$$\begin{pmatrix} 1 & \alpha \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -\alpha \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

УПРАЖНЕНИЕ 5.8 (ЦЕНТР МАТРИЧНОЙ АЛГЕБРЫ). Для алгебры  $A$  над полем  $\mathbb{k}$  подалгебра

$$Z(A) \stackrel{\text{def}}{=} \{z \in A \mid \forall a \in A \, az = za\}$$

называется *центром* алгебры  $A$ . Покажите, что  $Z(\text{Mat}_n(\mathbb{k})) = \{tE \mid t \in \mathbb{k}\}$  состоит из *скалярных матриц*.

**5.6.1. Обратимые элементы.** Элемент  $a$  алгебры  $A$  с единицей  $e \in A$  называется *обратимым*, если существует такой элемент  $a^{-1} \in A$ , что  $aa^{-1} = a^{-1}a = e$ . Как и в алгебре матриц<sup>2</sup>, в любой ассоциативной алгебре  $A$  это требование можно ослабить до существования левого и правого обратных к  $a$  элементов  $a', a'' \in A$ , обладающих свойствами  $a'a = e = aa''$ , поскольку такие элементы автоматически равны:  $a' = a'e = a'(aa'') = (a'a)a'' = ea'' = a''$ . Из этого вычисления также вытекает, что обратный к  $a$  элемент ассоциативной алгебры однозначно определяется по  $a$ .

Обратимыми элементами алгебры  $\text{End } V$  линейных эндоморфизмов  $V \rightarrow V$  являются линейные изоморфизмы  $V \xrightarrow{\sim} V$ . Они образуют группу преобразований пространства  $V$ . Эта группа обозначается  $\text{GL } V$  и называется *полной линейной группой* пространства  $V$ . Группа обратимых матриц размера  $n \times n$  обозначается  $\text{GL}_n(\mathbb{k}) \subset \text{Mat}_n(\mathbb{k})$ .

<sup>1</sup>Как в п° 5.4 и п° 5.5 выше.

<sup>2</sup>Ср. с п° 5.3 на стр. 66.

**5.6.2. Алгебраические и трансцендентные элементы.** С каждым элементом  $\xi$  ассоциативной  $\mathbb{k}$ -алгебры  $A$  с единицей связан гомоморфизм вычисления

$$\text{ev}_\xi: \mathbb{k}[t] \rightarrow A, \quad f(x) \mapsto f(\xi) \in A. \quad (5-14)$$

Он переводит многочлен  $f(x) = a_0x^m + a_1x^{m-1} + \dots + a_{m-1}x + a_m$  в результат подстановки в этот многочлен  $x = \xi$ . При этом мы считаем, что результатом такой подстановки в свободный член  $a_0 = a_0x^0$  является элемент  $a_0\xi^0 \stackrel{\text{def}}{=} a_0e \in A$ . Обратите внимание, что отображение (5-14), во-первых, линейно, а во-вторых, перестановочно со сложением и умножением.

Если гомоморфизм (5-14) инъективен, то элемент  $\xi \in A$  называется *трансцендентным* над  $\mathbb{k}$ . Отметим, что в этом случае алгебра  $A$  бесконечномерна как векторное пространство над  $\mathbb{k}$ , так все натуральные степени элемента  $\xi$  линейно независимы. Если гомоморфизм (5-14) имеет ненулевое ядро, то элемент  $\xi$  называется *алгебраическим* над  $\mathbb{k}$ .

**УПРАЖНЕНИЕ 5.9 (по алгебре).** Убедитесь, что если ядро  $\ker \text{ev}_\xi \neq 0$ , то в нём имеется единственный многочлен  $\mu_\xi(x)$  наименьшей положительной степени<sup>1</sup> со старшим коэффициентом 1, и  $\ker \text{ev}_\xi = (\mu_\xi)$  состоит из всех многочленов, делящихся на  $\mu_\xi$ .

Приведённый многочлен  $\mu_\xi$  из **упр. 5.9** называется *минимальным многочленом* элемента  $\xi$ .

**ПРИМЕР 5.6 (Алгебраичность линейных эндоморфизмов)**

Если  $\dim V = n$ , то  $\dim \text{End } V = n^2$ , и последовательные итерации  $F^0 = \text{Id}_V, F, F^2, \dots, F^{n^2}$  любого линейного оператора  $F: V \rightarrow V$  представляют собою линейно зависимый набор векторов пространства  $\text{End } V$ . Поэтому каждый эндоморфизм<sup>2</sup>  $F$  удовлетворяет нетривиальному полиномиальному уравнению  $F^m + a_1F^{m-1} + \dots + a_{m-1}F + a_mE = 0$ , где  $a_i \in \mathbb{k}$ .

**5.7. Матрицы над ассоциативным кольцом.** Абелева группа  $R$ , на которой помимо сложения также имеется операция умножения  $R \times R \rightarrow R$ , называется *ассоциативным кольцом*, если для всех  $f, g, h \in R$  выполнены равенства  $f(g+h) = fg + fh$ ,  $(f+g)h = fh + gh$  и  $f(gh) = (fg)h$ . Если при этом ещё имеется такой элемент  $e \in R$ , что  $ef = fe = f$  для всех  $f \in R$ , то он называется *единицей*, а кольцо  $R$  — *кольцом с единицей*. Например, всякая ассоциативная  $\mathbb{k}$ -алгебра является кольцом.

**УПРАЖНЕНИЕ 5.10.** Покажите, что в любом ассоциативном кольце  $0 \cdot f = 0$  для всех  $f$  и что единица единственна (если существует).

Квадратные матрицы размера  $n \times n$  с элементами из произвольного кольца  $R$  образуют кольцо  $\text{Mat}_n(R)$ , сложение и умножение в котором задаются теми же правилами: сумма  $S = F + G$  и произведение  $P = FG$  матриц  $F = (f_{ij})$  и  $G = (g_{ij})$  имеют в качестве матричных элементов

$$s_{ij} \stackrel{\text{def}}{=} f_{ij} + g_{ij} \quad \text{и} \quad p_{ij} \stackrel{\text{def}}{=} \sum_v f_{iv}g_{vj}$$

**УПРАЖНЕНИЕ 5.11.** Убедитесь, что умножение матриц с элементами из произвольного кольца  $R$  ассоциативно и дистрибутивно по отношению к сложению, и если в кольце  $R$  есть единица  $1 \in R$ , то матрицы  $E_{ij}$ , определённые точно так же, как в **прим. 5.5** на стр. 71, имеют ту же самую таблицу умножения (5-13), а единичная матрица  $E = \sum E_{ii}$  является единицей кольца  $\text{Mat}_n(R)$ .

<sup>1</sup> Среди всех степеней, представленных в  $\ker \text{ev}_\xi$ .

<sup>2</sup> В частности, любая квадратная матрица.



Предостережение 5.1. Вычисления с матрицами, элементы которых лежат в некоммутативном кольце, требуют большей аккуратности, чем вычисления с матрицами, элементы которых лежат в поле, поскольку сомножители в произведениях матричных элементов нельзя переставлять друг с другом и не на все ненулевые матричные элементы можно делить. Например, полученная нами в [прим. 5.1](#) на стр. 66 формула для обратной матрицы с элементами из поля<sup>1</sup>

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \cdot A^{\vee} \quad (5-15)$$

требует уточнения над кольцом, ибо использует деление.

Упражнение 5.12. Докажите, что матрица размера  $2 \times 2$  над коммутативным кольцом с единицей обратима если и только если обратим её определитель, и в этом случае обратная матрица по-прежнему задаётся формулой (5-15).

Над некоммутативным кольцом формула (5-15) перестаёт быть верной, так как ни одна из матриц

$$\begin{aligned} A \cdot A^{\vee} &= \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ad - bc & -ab + ba \\ cd - dc & -cb + da \end{pmatrix} \\ A^{\vee} \cdot A &= \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} da - bc & db - bd \\ -ca + ac & -cb + ad \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

вообще говоря, не равна матрице

$$\det A \cdot E = \begin{pmatrix} ad - bc & 0 \\ 0 & ad - bc \end{pmatrix}.$$

Упражнение 5.13. Покажите, что над произвольным ассоциативным кольцом  $R$  с единицей матрицы

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & b \\ c & d \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} a & b \\ c & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

обратимы тогда и только тогда, когда обратимы оба элемента на не содержащей нуля диагонали, и в этом случае

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & d \end{pmatrix}^{-1} &= \begin{pmatrix} a^{-1} & -a^{-1}bd^{-1} \\ 0 & d^{-1} \end{pmatrix}, & \begin{pmatrix} a & 0 \\ c & d \end{pmatrix}^{-1} &= \begin{pmatrix} a^{-1} & 0 \\ -d^{-1}ca^{-1} & d^{-1} \end{pmatrix}, \\ \begin{pmatrix} a & b \\ c & 0 \end{pmatrix}^{-1} &= \begin{pmatrix} 0 & c^{-1} \\ b^{-1} & -b^{-1}ac^{-1} \end{pmatrix}, & \begin{pmatrix} 0 & b \\ c & d \end{pmatrix}^{-1} &= \begin{pmatrix} -c^{-1}db^{-1} & c^{-1} \\ b^{-1} & 0 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Пример 5.7 (Обратимость унитреугольных матриц)

Диагональ, идущая из левого верхнего угла квадратной матрицы в правый нижний, называется *главной*. Если все стоящие под (соотв. над) главной диагональю элементы нулевые, матрица называется *верхней* (соотв. *нижней*) *треугольной*.

Упражнение 5.14. Проверьте, что верхние и нижние треугольные матрицы являются подкольцами в кольце матриц над любым ассоциативным кольцом.

<sup>1</sup>См. формулу (5-8) на стр. 66.

Если в кольце коэффициентов есть единица, то треугольные матрицы с единицами на главной диагонали называются *унитреугольными*. Покажем, что каждая верхняя унитреугольная матрица  $A = (a_{ij})$  с элементами из любого ассоциативного кольца с единицей обратима, и обратная к ней матрица  $B = A^{-1}$  тоже верхняя унитреугольная с наддиагональными элементами

$$\begin{aligned} b_{ij} &= \sum_{s=0}^{j-i-1} (-1)^{s+1} \sum_{i < v_1 < \dots < v_s < j} a_{iv_1} a_{v_1 v_2} a_{v_2 v_3} \dots a_{v_{s-1} v_s} a_{v_s j} = \\ &= -a_{ij} + \sum_{i < k < j} a_{ik} a_{kj} - \sum_{i < k < \ell < j} a_{ik} a_{k\ell} a_{\ell j} + \sum_{i < k < \ell < m < j} a_{ik} a_{k\ell} a_{\ell m} a_{mj} - \dots \end{aligned} \quad (5-16)$$

Для этого запишем матрицу  $A$  в виде линейной комбинации базисных матриц<sup>1</sup>  $E_{ij}$

$$A = E + \sum_{i < j} a_{ij} E_{ij} = E + N,$$

где матрица  $N = \sum_{i < j} a_{ij} E_{ij}$  представляет собою наддиагональную часть матрицы  $A$ . В силу форм. (5-13) на стр. 71, коэффициент при  $E_{ij}$  в матрице  $N^k$  равен<sup>2</sup> нулю при  $j - i < k$ , а при  $j - i \geq k$  представляет собою сумму всевозможных произведений

$$\underbrace{a_{iv_1} \cdot a_{v_1 v_2} \cdot \dots \cdot a_{v_{k-2} v_{k-1}} \cdot a_{v_{k-1} j}}_{k \text{ сомножителей}}, \quad \text{где } i < v_1 < v_2 < \dots < v_{k-1} < j.$$

В частности  $N^k = 0$  при всех  $k$ , больших размера матрицы  $A$ . Полагая  $x = E$ ,  $y = N$  в равенстве<sup>3</sup>

$$(x + y)(x^{m-1} - x^{m-2}y + \dots + (-1)^{m-2}xy^{m-2} + (-1)^{m-1}y^{m-1}) = x^m - y^m,$$

при достаточно большом  $m$  мы получим матричное равенство  $A(E - N + N^2 - \dots) = E$ , откуда

$$A^{-1} = E - N + N^2 - N^3 + \dots,$$

что и утверждалось.

<sup>1</sup> См. прим. 5.5 на стр. 71.

<sup>2</sup> Продуктивно представлять себе  $E_{ij}$  как стрелку, ведущую из числа  $j$  в число  $i$  на числовой прямой. Произведение  $k$  сомножителей  $E_{ij}$  отлично от нуля если и только если конец каждой стрелки совпадает с началом предыдущей, и в этом случае такое произведение равно сумме всех перемножаемых стрелок, рассматриваемых как целочисленные векторы на числовой прямой. Таким образом, каждое ненулевое произведение  $k$  стрелок имеет длину как минимум  $k$ , а разложения элемента  $E_{ij}$  в произведение  $k$  таких элементов находятся в биекции со всевозможными способами пройти из  $j$  в  $i$  за  $k$  шагов.

<sup>3</sup> Поскольку матрицы  $E$  и  $N$  коммутируют друг с другом, в результате этой подстановки мы получим верное матричное равенство.

## §6. Метод Гаусса

**6.1. Построение базиса в подпространстве.** Рассмотрим  $n$ -мерное координатное векторное пространство  $\mathbb{k}^n$ , векторы которого будем записывать в виде строк  $(x_1, \dots, x_n)$ . Сопоставим каждому набору векторов  $w_1, \dots, w_m \in \mathbb{k}^n$  матрицу размера  $m \times n$ , по строкам которой выписаны координаты этих векторов и которую мы будем называть *матрицей координат* векторов  $w_i$ . Метод Гаусса позволяет построить в линейной оболочке  $U$  произвольного заданного набора векторов  $w_1, \dots, w_m \in \mathbb{k}^n$  базис  $u_1, \dots, u_r$ , матрица координат которого имеет *приведённый ступенчатый вид*. Последнее по определению означает, что в каждой строке этой матрицы самый левый ненулевой элемент равен единице, располагается строго правее, чем в предыдущей строке и является единственным ненулевым элементом своего столбца. Например, матрица

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & * & 0 & * & * & 0 & * & 0 & * \\ 0 & 0 & 0 & 1 & * & * & 0 & * & 0 & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & * & 0 & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

является приведённой ступенчатой при любом выборе элементов, стоящих на отмеченных звёздочками местах.

**Упражнение 6.1.** Убедитесь, что ненулевые строки любой приведённой ступенчатой матрицы линейно независимы и, тем самым, образуют базис своей линейной оболочки.

Столбцы, содержащие самые левые ненулевые координаты базисных векторов  $u_1, \dots, u_r$  называются *базисными столбцами* приведённой ступенчатой матрицы. Их номера  $j_1, \dots, j_r$  строго возрастают, а сами они образуют единичную подматрицу размера  $r \times r$ .

Построение базиса с приведённой ступенчатой матрицей координат заключается в накоплении нулей в левом нижнем углу матрицы путём последовательных замен в порождающем подпространстве  $U$  наборе векторов некоторых пар векторов  $w_i, w_j$  на их линейные комбинации  $w'_i = aw_i + bw_j, w'_j = cw_i + dw_j$  так, чтобы линейная оболочка новых векторов  $w'_i, w'_j$  оставалась такой же, как у исходных векторов  $w_i, w_j$ .

**Упражнение 6.2.** Убедитесь, что для этого необходимо и достаточно, чтобы  $ad - bc \neq 0$ .

В классическом методе Гаусса принято использовать только замены следующих трёх типов:

$$\begin{aligned} 1) \quad w'_i &= w_i + \lambda w_j & w'_j &= w_j & (\text{с произвольным } \lambda \in \mathbb{k}) \\ 2) \quad w'_i &= w_j & w'_j &= w_i \\ 3) \quad w'_i &= \varrho w_i & w'_j &= w_j & (\text{с ненулевым } \varrho \in \mathbb{k}). \end{aligned}$$

При этих заменах исходные векторы линейно выражаются через преобразованные как

$$\begin{aligned} 1) \quad w_i &= w'_i - \lambda w'_j & w_j &= w'_j \\ 2) \quad w_i &= w'_j & w_j &= w'_i \\ 3) \quad w_i &= \varrho^{-1} w'_i & w_j &= w'_j, \end{aligned}$$

а матрица координат испытывает следующие элементарные преобразования строк

- 1) к одной из строк прибавляется другая строка, умноженная на число
  - 2) две строки меняются местами
  - 3) одна из строк умножается на ненулевое число.
- (6-1)

**ТЕОРЕМА 6.1** (О ПРЕОБРАЗОВАНИИ К ПРИВЕДЁННОМУ СТУПЕНЧАТОМУ ВИДУ)

Каждая матрица  $A \in \text{Mat}_{m \times n}(\mathbb{k})$  элементарными преобразованиями строк может быть превращена в приведённую ступенчатую матрицу  $A_{\text{red}}$ . Ненулевые строки матрицы  $A_{\text{red}}$  образуют базис в линейной оболочке строк матрицы  $A$ .

*Доказательство.* Удобно разбить процесс на последовательные шаги, соответствующие столбцам матрицы  $A$ . Будем предполагать, что после выполнения  $(k - 1)$ -го шага та часть матрицы, что находится слева от  $k$ -ого столбца, имеет приведённый ступенчатый вид и  $s$  ненулевых строк. При  $k = 1$  это требование означает, что  $s = 0$ , и не накладывает никаких ограничений на матрицу. При  $k > 1$  ненулевые  $s$  строк слева от  $k$ -ого столбца суть верхние  $s$  строк и  $0 \leq s \leq k - 1$ . Очередной  $k$ -тый шаг вычисления состоит в следующем. Если все элементы  $k$ -го столбца, расположенные строго ниже  $s$ -й строки, нулевые, то можно переходить к  $(k + 1)$ -му шагу. Если же в  $k$ -том столбце имеется ненулевой элемент  $a$ , расположенный строго ниже  $s$ -той строки, то мы умножаем содержащую его строку на  $a^{-1}$ , а затем меняем её местами с  $(s + 1)$ -ой строкой. При этом левые  $(k - 1)$  столбцов матрицы не изменятся, а  $(s + 1)$ -я строка примет вид

$$\underbrace{0 \ 0 \ \dots \ 0 \ 0 \ 1}_{k-1} \ \underbrace{* \ * \ \dots \ * \ *}_{n-k} .$$

Теперь для каждого  $i \neq s + 1$  вычтем из  $i$ -й строки полученной матрицы  $(s + 1)$ -ую строку, умноженную на элемент, стоящий в пересечении  $i$ -й строки и  $k$ -го столбца. Это не изменит левые  $(k - 1)$  столбцов матрицы и обнулит все элементы  $k$ -того столбца за исключением стоящей  $(s + 1)$ -ой строке единицы. В результате мы попадаем в исходное положение для  $(k + 1)$ -го шага. Последнее утверждение предложения вытекает из [упр. 6.1](#) и сделанного выше замечания, что элементарные преобразования строк не меняют линейной оболочки строк матрицы.  $\square$

**ПРИМЕР 6.1**

Построим в координатном пространстве  $\mathbb{Q}^5$  базис линейной оболочки строк матрицы

$$\begin{pmatrix} 2 & -4 & -8 & 2 & -4 \\ -1 & 1 & 3 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 1 & 2 & -1 \\ -1 & 0 & 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}. \quad (6-2)$$

Для этого умножим последнюю строку на  $-1$  и поменяем местами с первой:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 3 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 1 & 2 & -1 \\ 2 & -4 & -8 & 2 & -4 \end{pmatrix}.$$

Теперь обнулیم первый столбец ниже первой строки, прибавляя надлежащие кратности первой строки ко второй, третьей и четвёртой строкам:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 1 & -2 \\ 0 & -4 & -4 & 4 & -2 \end{pmatrix}.$$

Далее обнулیم второй столбец ниже второй строки, добавив подходящие её кратности к нижним двум строкам:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

Наконец, делим третью строку на  $-2$  и зануляем последний столбец вне третьей строки, добавляя к первой и четвёртой строкам подходящие кратности третьей:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (6-3)$$

Верхние три строки этой приведённой ступенчатой матрицы составляют базис в линейной оболочке  $U \subset \mathbb{Q}^5$  строк исходной матрицы (6-2). В частности,  $\dim U = 3$ .

**6.2. Отыскание обратной матрицы.** Каждое из перечисленных в форм. (6-1) на стр. 76 элементарных преобразований строк  $m \times n$  матрицы  $A$  можно осуществить, умножая матрицу  $A$  слева на квадратную матрицу  $S$ , что получается из единичной матрицы  $E$  размера  $m \times m$  тем же самым элементарным преобразованием строк, которое требуется произвести в матрице  $A$ .

Упражнение 6.3. Убедитесь в этом, используя второе из тех двух описаний произведения матриц, что были даны на стр. 63.

Преобразование строк, обратное к тому, что осуществляется левым умножением на матрицу  $S$ , тоже задаётся левым умножением на некоторую  $m \times m$  матрицу  $T$ . Применяя обратные друг другу преобразования  $S$  и  $T$  к единичной  $m \times m$  матрице  $E$ , мы получаем равенства  $TSE = E$  и  $STE = E$ , из которых вытекает, что  $m \times m$  матрицы  $S$  и  $T$  обратны друг другу. Мы заключаем, что приведённая ступенчатая матрица  $A_{\text{red}}$ , которая получается из матрицы  $A$  элементарными преобразованиями строк, имеет вид  $A_{\text{red}} = S_k \dots S_1 A$ , где все элементарные матрицы  $S_1, S_2, \dots, S_k \in \text{Mat}_{m \times m}(\mathbb{k})$  обратимы.

Для квадратной  $m \times m$  матрицы  $A$  приведённая ступенчатая матрица  $A_{\text{red}}$  либо единичная, либо содержит нулевые строки. В первом случае строки матрицы  $A$  линейно независимы, и матрица  $A$  обратима по сл. 5.1 на стр. 67, причём из равенства  $A_{\text{red}} = E = S_k \dots S_1 A$  вытекает, что матрица  $A^{-1} = S_k \dots S_1 = S_k \dots S_1 \cdot E$  получается из единичной матрицы  $E$  той же самой цепочкой элементарных преобразований, которая превращает матрицу  $A$  в матрицу  $E$ . Во втором случае строки матрицы  $A$  линейно зависимы, и матрица  $A$  необратима по тому же сл. 5.1.

Итак, если приписать справа к квадратной матрице  $A$  единичную матрицу  $E$  того же размера и применить к получившейся матрице  $\begin{bmatrix} A & E \end{bmatrix}$  размера  $n \times 2n$  метод Гаусса, то либо на выходе получится матрица  $\begin{bmatrix} E & B \end{bmatrix}$ , что означает обратимость матрицы  $A$  и равенство  $A^{-1} = B$ , либо

в процессе вычислений мы придём к матрице  $[N|C]$  с необратимой матрицей  $N$ , что означает необратимость матрицы  $A$ .

**Пример 6.2**

Выясним обратима ли матрица

$$A = \begin{pmatrix} 6 & 3 & -2 & 1 \\ 1 & 4 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 & -1 \\ -1 & 0 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

Для этого применим метод Гаусса к матрице

$$\left( \begin{array}{cccc|cccc} 6 & 3 & -2 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 3 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & -2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right).$$

Меняем знак нижней строки, после чего меняем её местами с верхней:

$$\left( \begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 2 & -1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 4 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 3 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 6 & 3 & -2 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

и обнуляем первый столбец ниже первой строки, отнимая из всех строк надлежащие кратности первой строки:

$$\left( \begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 2 & -1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 4 & -1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & -14 & 7 & 1 & 0 & 0 & 6 \end{array} \right).$$

Теперь переставляем вторую и третью строки и обнуляем нижние два элемента второго столбца:

$$\left( \begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 2 & -1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -5 & 2 & 0 & 1 & -4 & -3 \\ 0 & 0 & -17 & 7 & 1 & 0 & -3 & 3 \end{array} \right) \quad (6-4)$$

Чтобы избежать вычислений с дробями, отклонимся от классического метода Гаусса и умножим нижние две строки слева на матрицу<sup>1</sup>

$$\begin{pmatrix} -5 & 2 \\ -17 & 7 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 7 & -2 \\ 17 & -5 \end{pmatrix}.$$

---

<sup>1</sup>Это равносильно умножению всей матрицы на  $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 7 & -2 \\ 0 & 0 & 17 & -5 \end{pmatrix}$

Получим

$$\left( \begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 2 & -1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2 & -7 & 22 & 27 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 5 & -17 & 53 & 66 \end{array} \right)$$

Остаётся вычесть из второй строки третью, а из первой — четвёртую и удвоенную третью:

$$\left( \begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & -3 & 9 & 11 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -2 & 7 & -21 & -26 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2 & -7 & 22 & 27 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 5 & -17 & 53 & 66 \end{array} \right)$$

Мы заключаем, что матрица  $A$  обратима и

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 9 & 11 \\ -2 & 7 & -21 & -26 \\ 2 & -7 & 22 & 27 \\ 5 & -17 & 53 & 66 \end{pmatrix}.$$

УПРАЖНЕНИЕ 6.4. Проверьте полученный ответ умножением этой матрицы на исходную матрицу  $A$ .

**6.3. Решение систем линейных уравнений.** В п° 5.5 на стр. 69 мы сопоставили системе линейных уравнений

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + \dots + a_{3n}x_n = b_3 \\ \dots \dots \dots \dots \dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases} \quad (6-5)$$

матрицу  $C = \boxed{A|b}$  размера  $m \times (n + 1)$ , которая получается приписыванием столбца  $b = (b_i)$  правых частей системы (6-5) к  $m \times n$  матрице  $A = (a_{ij})$ , составленной из коэффициентов левых частей уравнений (6-5). Перечисленным в форм. (6-1) на стр. 76 элементарным преобразованиям строк матрицы  $C$  на языке уравнений отвечают следующие три типа преобразований системы (6-5):

- 1) почленное сложение одного из уравнений с другим, умноженным на константу
- 2) перестановка двух уравнений друг с другом
- 3) умножение обеих частей некоторого уравнения на ненулевую константу.

Так как исходная система может быть получена из преобразованной системы аналогичным элементарным преобразованием, обратным к проделанному, исходная и преобразованная система эквивалентны в том смысле, что у них одно и то же пространство решений. Таким образом, метод Гаусса преобразует систему уравнений (6-5) с матрицей  $C = \boxed{A|b}$  в эквивалентную ей систему уравнений с приведённой ступенчатой матрицей  $C_{\text{red}}$ . Пусть самые левые ненулевые элементы строк этой матрицы находятся в столбцах с номерами  $j_1, \dots, j_r$ . Если  $j_r = n + 1$ , то





ПРИМЕР 6.3

Решим методом Гаусса следующую систему уравнений над полем  $\mathbb{Q}$ :

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 2x_3 + x_4 + 5x_5 + 3x_6 = 6 \\ -2x_1 - 4x_2 - 3x_3 - 9x_5 - 5x_6 = -10 \\ 3x_1 + 6x_2 + 4x_3 - x_4 + 13x_5 + 7x_6 = 14 \\ -x_1 - 2x_2 - 5x_3 - 7x_4 - 8x_5 - 6x_6 = -12 \\ -3x_1 - 6x_2 - 7x_3 - 5x_4 - 16x_5 - 9x_6 - 2x_7 = -17 \end{cases} \quad (6-10)$$

Расширенная матрица этой системы вид

$$\left( \begin{array}{ccccccc|c} 1 & 2 & 2 & 1 & 5 & 3 & 0 & 6 \\ -2 & -4 & -3 & 0 & -9 & -5 & 0 & -10 \\ 3 & 6 & 4 & -1 & 13 & 7 & 0 & 14 \\ -1 & -2 & -5 & -7 & -8 & -6 & 0 & -12 \\ -3 & -6 & -7 & -5 & -16 & -9 & -2 & -17 \end{array} \right).$$

Обнуляем первый столбец вне первой строки, прибавляя ко всем строкам надлежащие кратности первой:

$$\left( \begin{array}{ccccccc|c} 1 & 2 & 2 & 1 & 5 & 3 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & -2 & -4 & -2 & -2 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & -3 & -6 & -3 & -3 & 0 & -6 \\ 0 & 0 & -1 & -2 & -1 & 0 & -2 & 1 \end{array} \right).$$

Обнуляем третий столбец вне второй строки, прибавляя ко всем строкам надлежащие кратности второй:

$$\left( \begin{array}{ccccccc|c} 1 & 2 & 0 & -3 & 3 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & 3 \end{array} \right).$$

Удаляем нулевые строки и обнуляем шестой столбец вне нижней строки, прибавляя ко второй и третьей строкам надлежащие кратности нижней строки:

$$\left( \begin{array}{ccccccc|c} 1 & 2 & 0 & -3 & 3 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & 3 \end{array} \right).$$

Система уравнений, отвечающая этой приведённой ступенчатой матрице может быть записана в виде

$$\begin{cases} x_1 = -1 - 2x_2 + 3x_4 - 3x_5 - 2x_7 \\ x_3 = -1 - 2x_4 - x_5 - 2x_7 \\ x_6 = 3 + 2x_7. \end{cases} \quad (6-11)$$

Придавая свободным переменным  $x_2, x_4, x_5, x_7$  произвольные значения и вычисляя соответствующие значения связанных переменных  $x_1, x_3, x_6$  по формулам (6-11) получаем параметрическое описание всех решений исходной системы (6-10).

На геометрическом языке эти решения замечают в  $\mathbb{Q}^7$  аффинное пространство  $p + U$ , где точка  $p = (-1, 0, -1, 0, 0, 3, 0)$  получается подстановкой  $x_2 = x_4 = x_5 = x_7 = 0$  в (6-11), а векторное подпространство  $U \subset \mathbb{Q}^7$  имеет базис из векторов

$$\begin{aligned} u_1 &= (-2, 1, 0, 0, 0, 0, 0), & u_2 &= (3, 0, -2, 1, 0, 0, 0), \\ u_3 &= (-3, 0, -1, 0, 1, 0, 0), & u_4 &= (-2, 0, -2, 0, 0, 1, 2), \end{aligned}$$

координаты которых получаются подстановкой в однородные версии формул (6-11)

$$\begin{cases} x_1 = -2x_2 + 3x_4 - 3x_5 - 2x_7 \\ x_3 = -2x_4 - x_5 - 2x_7 \\ x_6 = 2x_7. \end{cases}$$

значений  $(x_2, x_4, x_5, x_7) = (1, 0, 0, 0), (0, 1, 0, 0), (0, 0, 1, 0), (0, 0, 0, 1)$ .

**6.4. Построение базиса в фактор пространстве.** В предл. 4.9 на стр. 62 мы указали абстрактный базис в фактор пространстве  $V/U$  векторного пространства  $V$  по подпространству  $U \subset V$ . Для координатного пространства  $V = \mathbb{k}^n$  метод Гаусса позволяет предъявить такой базис явно.

Следствие 6.1 (из предл. 4.9 на стр. 62)

Пусть векторное подпространство  $U \subset \mathbb{k}^n$  порождается строками матрицы  $A$  и пусть самые левые ненулевые элементы строк приведённой ступенчатой матрицы  $A_{\text{red}}$ , полученной из  $A$  элементарными преобразованиями строк, находятся в столбцах с номерами  $j_1 < j_2 < \dots < j_r$ . Тогда  $(n - r)$  классов  $[e_i]$  стандартных базисных векторов пространства  $\mathbb{k}^n$  с номерами  $i$ , отличными от  $j_1, \dots, j_r$ , образуют базис фактор пространства  $\mathbb{k}^n / U$ .

Доказательство. Проекция  $\mathbb{k}^n$  на линейную оболочку базисных векторов  $e_{j_v}$  вдоль дополнительного координатного подпространства, натянутого на остальные базисные векторы  $e_i$ , переводит строки приведённой ступенчатой матрицы  $A_{\text{red}}$  ровно в базисные векторы  $e_{j_1}, \dots, e_{j_r}$  и, тем самым, изоморфно отображает  $U$  на линейную оболочку этих векторов. Это означает, что подпространство  $U$  трансверсально ядру проекции, т. е. имеет нулевое пересечение с линейной оболочкой базисных векторов  $e_i$ . Поэтому к этим векторам применимо предл. 4.9.  $\square$

Пример 6.4 (продолжение прим. 6.1 на стр. 76)

Пусть подпространство  $U \subset \mathbb{Q}^5$  порождено строками матрицы

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -4 & -8 & 2 & -4 \\ -1 & 1 & 3 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 1 & 2 & -1 \\ -1 & 0 & 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

из прим. 6.1 на стр. 76. Методом Гаусса мы построили в  $U$  базис с приведённой ступенчатой матрицей координат

$$A_{\text{red}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

самые левые ненулевые строк которой имеют номера 1, 2, 5. Отсюда, согласно сл. 6.1, мы заключаем, что классы  $[e_3]_U$  и  $[e_4]_U$  стандартных базисных векторов  $e_3, e_4$  с дополнительными к 1, 2, 5 номерами образуют базис в факторе  $\mathbb{Q}^5 / U$ .

**6.5. Расположение подпространства относительно базиса.** В этом разделе мы покажем, что в каждом подпространстве  $U \subset \mathbb{k}^n$  существует единственный базис с приведённой ступенчатой матрицей координат. Отсюда вытекает, в частности, что приведённая ступенчатая матрица  $A_{\text{red}}$ , полученная из матрицы  $A$  элементарными преобразованиями строк, не зависит от выбора цепочки преобразований и даже от собственно матрицы  $A$ , а зависит только от линейной оболочки строк матрицы  $A$ .

Предложение 6.1

Для каждого векторного подпространства  $U \subset \mathbb{k}^n$  размерности  $r$  множество  $\{1, \dots, n\}$  можно<sup>1</sup> так разбить в объединение двух непересекающихся дополнительных подмножеств

$$I = \{i_1, \dots, i_{n-r}\} \quad \text{и} \quad J = \{j_1, \dots, j_r\} = \{1, \dots, n\} \setminus I,$$

чтобы линейные оболочки  $E_I = \text{span}(e_{i_1}, e_{i_2}, \dots, e_{i_{n-r}})$  и  $E_J = \text{span}(e_{j_1}, e_{j_2}, \dots, e_{j_r})$  стандартных базисных векторов  $e_\nu \in \mathbb{k}^n$  удовлетворяли следующим эквивалентным условиям:

- 1) подпространства  $U$  и  $E_I$  трансверсальны, т. е.  $U \cap E_I = 0$
- 2) ограничение на подпространство  $U$  линейной проекции пространства  $V$  на подпространство  $E_J$  вдоль подпространства  $E_I$

$$p: V \rightarrow E_J, \quad (x_1, \dots, x_n) \mapsto (x_{j_1}, x_{j_2}, \dots, x_{j_r})$$

является изоморфизмом между  $U$  и  $E_J$

- 3) ограничение на подпространство  $E_I$  линейного отображения факторизации

$$\pi: V \rightarrow V/U, \quad v \mapsto [v]_U$$

является изоморфизмом между  $E_I$  и  $V/U$

- 4) в подпространстве  $U$  найдутся  $r$  таких векторов  $u_1, \dots, u_r$ , что  $u_\nu - e_{j_\nu} \in E_I$  при всех  $1 \leq \nu \leq r$ .

При выполнении этих условий векторы  $u_1, \dots, u_r$  из условия (4) автоматически образуют базис подпространства  $U$  и однозначно определяются подпространством  $U$  и выбором разложения  $\{1, \dots, n\} = I \sqcup J$  обладающего свойствами (1)–(4).

**Доказательство.** Пусть векторы  $v_1, v_2, \dots, v_r \in U$  образуют базис подпространства  $U$ . По лемме о замене<sup>2</sup> некоторые  $r$  векторов  $e_{j_1}, \dots, e_{j_r}$  стандартного базиса в  $\mathbb{k}^n$  можно заменить векторами  $v_j$  так, чтобы полученный в результате набор  $v_1, v_2, \dots, v_r, e_{i_1}, e_{i_2}, \dots, e_{i_{n-r}}$  остался базисом в  $\mathbb{k}^n$ . В таком случае линейная оболочка  $E_I = \text{span}(e_{i_1}, e_{i_2}, \dots, e_{i_{n-r}})$  оставшихся базисных векторов трансверсальна подпространству  $U$ , т. е. обладает свойством (1). Это доказывает существование разложения, обладающего свойством (1). Покажем теперь, что условия (1)–(4) эквивалентны друг другу.

**Упражнение 6.5.** Убедитесь, что ядро ограничения отображения  $p$  на подпространство  $U$  и ядро ограничения отображения  $\pi$  на подпространство  $E_I$  оба равны  $U \cap E_I$ .

<sup>1</sup>Как правило, многими способами.

<sup>2</sup>См. лем. 4.2 на стр. 51.

Из условия (1) вытекает, что  $\ker p|_U = \ker \pi|_{E_I} = U \cap E_I = 0$ . Поэтому оба ограничения  $p|_U: U \rightarrow E_J$  и  $\pi|_{E_I}: E_I \rightarrow V/U$  инъективны. Так как  $\dim U = r = \dim E_J$  и  $\dim E_I = n - r = \dim V/U$ , оба ограничения — изоморфизмы. Таким образом, (1) влечёт (2) и (3). Наоборот, каждое из условий (2), (3) влечёт равенство  $0 = \ker p|_U = \ker \pi|_{E_I} = U \cap E_I$ , т. е. условие (1). Условие (4) утверждает, что  $r$  векторов  $u_1, \dots, u_r$  из  $r$ -мерного подпространства  $U$  переводятся проекцией  $p$  в стандартные базисные векторы  $r$ -мерного координатного подпространства  $E_J$ , что равносильно условию (2). Наконец, если условия (1)-(4) выполняются, то проекция  $p|_U: U \rightarrow E_J$  является изоморфизмом, и в  $U$  есть единственный базис  $u_1, \dots, u_r$ , переводимый этим изоморфизмом в стандартный базис  $e_{j_1}, \dots, e_{j_r}$  пространства  $E_J$ .  $\square$

**Замечание 6.1.** Векторное подпространство  $U \subset \mathbb{k}^n$  размерности  $r$  может быть трансверсально к нескольким и даже ко всем<sup>1</sup>  $(n - r)$ -мерным координатным подпространствам  $E_I$ . На координатном языке условие (4) в [предл. 6.1](#) означает, что матрица координат векторов  $u_1, \dots, u_r$  содержит в столбцах с номерами  $j_1, \dots, j_r$  единичную подматрицу размера  $r \times r$ . Ниже мы увидим, что метод Гаусса строит в подпространстве  $U$  именно такой базис  $u_1, \dots, u_r$  с лексикографически<sup>2</sup> минимально возможной для данного  $U$  последовательностью номеров  $j_1, \dots, j_r$ .

**6.5.1. Комбинаторный тип подпространства.** Лексикографически минимальный набор индексов  $j_1, \dots, j_r$ , для которого выполняются условия [предл. 6.1](#), называется *комбинаторным типом* подпространства  $U \subset \mathbb{k}^n$ . Комбинаторный тип имеет следующее альтернативное описание. Для каждого  $k = 0, 1, \dots, n$  обозначим через  $V_{\leq k}$  линейную оболочку первых  $k$  стандартных базисных векторов  $e_1, \dots, e_k$ , а через  $V_{>k}$  — линейную оболочку остальных стандартных базисных векторов  $e_{k+1}, \dots, e_n$ . При этом мы полагаем  $V_{\leq 0} = V_{>n} = 0$  и  $V_{>0} = V_{\leq n} = V$ . Также обозначим через  $p_k: \mathbb{k}^n \rightarrow V_{\leq k}$  проекцию на  $V_{\leq k}$  вдоль  $V_{>k}$ . Эта проекция стирает последние  $n - k$  координат каждого вектора  $v \in \mathbb{k}^n$  и при  $k = 0$  представляет собою нулевое отображение  $p_0: \mathbb{k}^n \rightarrow 0$ , а при  $k = n$  — тождественный эндоморфизм  $p_n = \text{Id}_{\mathbb{k}^n}: \mathbb{k}^n \rightarrow \mathbb{k}^n$ . Рассмотрим последовательность  $d_0, d_1, \dots, d_n$  размерностей

$$d_k = \dim p_k(U) = n - \dim \ker p_k|_U = n - \dim(U \cap V_{>k}). \quad (6-12)$$

Она имеет  $d_0 = 0$ ,  $d_n = r$  и монотонно не убывает, а каждое её приращение  $d_k - d_{k-1} \leq 1$ , поскольку любые два соседние подпространства неубывающей цепочки

$$0 = U \cap V_{>n} \subseteq U \cap V_{>(n-1)} \subseteq U \cap V_{>(n-2)} \subseteq \dots \subseteq U \cap V_{>1} \subseteq U \cap V_{>0} = U$$

либо совпадают, либо большее из них имеет размерность ровно на единицу больше.

**Упражнение 6.6.** Убедитесь в этом.

**Предложение 6.2**

Для данного подпространства  $U \subset \mathbb{k}^n$  размерности  $r$  следующие три возрастающие последовательности натуральных чисел совпадают друг с другом:

<sup>1</sup>Над бесконечным полем  $\mathbb{k}$  «случайное»  $r$ -мерное подпространство  $U \subset V$  почти наверняка будет именно таким.

<sup>2</sup>Напомню, что *лексикографический порядок* на множестве  $r$ -буквенных слов  $x_1 x_2 \dots x_r$ , составленных из букв некоего упорядоченного алфавита  $X$ , представляет собою стандартное упорядочение всех этих слов по алфавиту, при котором слово  $w_1$  меньше слова  $w_2$  если первая слева различающаяся буква этих слов в слове  $w_1$  меньше, чем в слове  $w_2$ .

- 1) лексикографически наименьший набор индексов  $j_1^{\min}, \dots, j_r^{\min}$ , удовлетворяющий условиям [предл. 6.1](#) на стр. 83
- 2) набор номеров  $j_1, \dots, j_r$  базисных столбцов приведённой ступенчатой матрицы, полученной методом Гаусса из матрицы координат любых векторов, порождающих  $U$
- 3) последовательность  $k_1, \dots, k_r$  тех значений  $k \geq 1$ , для которых  $d_k - d_{k-1} = 1$  в последовательности размерностей (6-12).

Доказательство. Ненулевые строки  $u_1, \dots, u_r$  приведённой ступенчатой матрицы из (2) составляют в пространстве  $U$  базис, удовлетворяющий условиям [предл. 6.1](#) для  $J = \{j_1, \dots, j_r\}$ . Так как проекции  $p_k(u_\nu)$  векторов  $u_\nu$  с  $j_\nu \leq k$  линейно независимы в силу ступенчатости матрицы координат векторов  $u_\nu$ , а векторы  $u_\mu$  с  $j_\mu > k$  лежат в  $\ker p_k$ , первые векторы составляют базис в  $p_k(U)$ , а последние — базис в пересечении  $\ker p_k|_U = U \cap V_{>k}$ . Поэтому те номера  $k$ , для которых  $\dim(U \cap V_{>k}) > \dim(U \cap V_{>(k-1)})$ , суть в точности номера  $j_1, \dots, j_r$ . Это доказывает совпадение последовательностей (2) и (3).

Докажем совпадение последовательностей (1) и (2). Пусть матрица координат базисных векторов  $w_1, \dots, w_r$  пространства  $U$  содержит единичную подматрицу в столбцах с номерами  $j_1^{\min}, \dots, j_r^{\min}$ . Так как проекции  $p_k(w_\nu)$  векторов  $w_\nu$  с  $j_\nu^{\min} \leq k$  линейно независимы, количество таких векторов при каждом  $k$  не превышает размерности  $\dim p_k(U)$ , которая по уже доказанному равна количеству векторов  $u_\nu$  с  $j_\nu \leq k$ . Тем самым, количество не превышающих  $k$  чисел  $j_\nu^{\min}$  при каждом  $k = 1, \dots, n$  не больше количества не превышающих  $k$  чисел  $j_\nu$ , и значит, набор  $j_1^{\min}, \dots, j_r^{\min}$  не может быть лексикографически меньше набора  $j_1, \dots, j_r$ .  $\square$

#### Следствие 6.2

В каждом подпространстве  $U \subset \mathbb{k}^n$  существует единственный базис с приведённой ступенчатой матрицей координат  $M_U$ , и сопоставление подпространству  $U$  этой матрицы  $M_U$  устанавливает биекцию между приведёнными ступенчатыми матрицами, имеющими  $r$  ненулевых строк, и  $r$ -мерными подпространствами в  $\mathbb{k}^n$ .  $\square$

Упражнение 6.7. Убедитесь, что приведённые ступенчатые матрицы с номерами базисных столбцов  $j_1, \dots, j_r$  образуют в пространстве  $\text{Mat}_{r \times n}(\mathbb{k})$  аффинное подпространство размерности

$$r(n-r) - \sum_{\nu=1}^r (j_\nu - \nu + 1),$$

и докажите тождество

$$\frac{(q^n - 1)(q^{n-1} - 1) \cdots (q^{n-r+1} - 1)}{(q^r - 1)(q^{r-1} - 1) \cdots (q - 1)} = \sum_{\lambda \subset \Pi_{r \times (n-r)}} q^{|\Pi_{r \times (n-r)} \setminus \lambda|},$$

где суммирование происходит по всем диаграммам Юнга<sup>1</sup>  $\lambda$ , лежащим внутри прямоугольника  $\Pi_{r \times (n-r)}$  размера  $r \times (n-r)$  так, что левые верхние углы диаграмм и прямоугольника совпадают, а показатель  $|\Pi_{r \times (n-r)} \setminus \lambda|$  справа равен количеству клеток в дополнении диаграммы до прямоугольника. Пустая диаграмма и весь прямоугольник тоже учитываются.

<sup>1</sup>См. пример 1.3 на стр. 7 лекции <http://gorod.bogomolov-lab.ru/ps/stud/algebra-1/1314/lec-01.pdf>.

## §7. Двойственность

**7.1. Двойственные пространства.** Линейные отображения  $V \rightarrow \mathbb{k}$  принято называть *линейными функционалами*<sup>1</sup> или *ковекторами*. Они образуют векторное пространство

$$V^* \stackrel{\text{def}}{=} \text{Hom}_{\mathbb{k}}(V, \mathbb{k}),$$

которое называется *двойственным* или *сопряжённым* к пространству  $V$ .

ПРИМЕР 7.1 (ЛИНЕЙНЫЕ ФУНКЦИОНАЛЫ НА КООРДИНАТНОМ ПРОСТРАНСТВЕ)

Каждый линейный функционал  $\xi : \mathbb{k}^n \rightarrow \mathbb{k}$  однозначно задаётся набором своих значений

$$\xi_i = \xi(e_i) \in \mathbb{k}$$

на стандартных базисных векторах  $e_i$  пространства  $\mathbb{k}^n$ . Значение функционала  $\xi$  на произвольном векторе  $v = x_1 e_1 + x_2 e_2 + \dots + x_n e_n$  при этом равно

$$\xi(v) = \xi(e_1 \cdot x_1 + \dots + e_n \cdot x_n) = \xi(e_1) \cdot x_1 + \dots + \xi(e_n) \cdot x_n = \xi_1 x_1 + \dots + \xi_n x_n.$$

Каждый набор из  $n$  констант  $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n \in \mathbb{k}$  задаёт по этой формуле линейный функционал  $\xi : \mathbb{k}^n \rightarrow \mathbb{k}$ . Если записывать векторы  $v$  пространства  $\mathbb{k}^n$  в виде координатных столбцов высоты  $n$ , то двойственное пространство  $\mathbb{k}^{n*}$  удобно представлять себе как  $n$ -мерное координатное пространство, состоящее из строк ширины  $n$ . При этом действие ковектора-строки  $\xi \in \mathbb{k}^{n*}$  на вектор-столбец  $v \in \mathbb{k}^n$  задаётся матричным умножением:  $\xi(v) = \xi v$ .

ПРИМЕР 7.2 (СТЕПЕННЫЕ РЯДЫ КАК ФУНКЦИОНАЛЫ НА МНОГОЧЛЕНАХ)

Этот пример является бесконечномерной версией предыдущего. Кольцо многочленов  $\mathbb{k}[x]$  является векторным пространством над  $\mathbb{k}$  со счётным базисом из мономов  $x^k$ , где  $k \geq 0$  и  $x^0 = 1$ . Каждый линейный функционал  $\psi : \mathbb{k}[x] \rightarrow \mathbb{k}$  однозначно задаётся последовательностью своих значений  $\psi_k = \psi(x^k)$  на базисных векторах пространства  $\mathbb{k}[x]$  и действует на произвольный многочлен  $a(x) = a_0 + a_1 x + \dots + a_m x^m$  по правилу

$$\psi(a) = \sum_{k=0}^{\deg a} a_k \psi_k = \psi_0 a_0 + \psi_1 a_1 + \dots + \psi_m a_m, \quad \text{где } m = \deg a. \quad (7-1)$$

Каждая бесконечная последовательность  $\psi : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{k}$  элементов  $\psi_i = \psi(i) \in \mathbb{k}$  задаёт по этой формуле линейный функционал  $\psi : \mathbb{k}[x] \rightarrow \mathbb{k}$ , ибо для каждого многочлена  $a \in \mathbb{k}[x]$  сумма в формуле (7-1) конечна и линейно зависит от  $a \in \mathbb{k}[x]$ . Бесконечные последовательности  $(\psi_n)_{n \in \mathbb{N}}$  элементов поля  $\mathbb{k}$  продуктивно кодировать их *производящими функциями*, т. е. формальными степенными рядами  $\Psi(t) = \sum_{n \geq 0} \psi_n t^n \in \mathbb{k}[[t]]$ . Таким образом, двойственное к  $\mathbb{k}[x]$  векторное пространство  $\mathbb{k}[x]^*$  изоморфно пространству формальных степенных рядов  $\mathbb{k}[[t]]$ . При этом изоморфизме каждый степенной ряд

$$\Psi(t) = \sum_{n \geq 0} \psi_n t^n \in \mathbb{k}[[t]]$$

задаёт линейный функционал  $\psi : \mathbb{k}[x] \rightarrow \mathbb{k}$ , переводящий многочлен  $a \in \mathbb{k}[x]$  в число (7-1).

<sup>1</sup>А также *линейными формами*.

Например, функционал вычисления значения многочленов в заданной точке  $\alpha \in \mathbb{k}$

$$\text{ev}_\alpha : \mathbb{k}[x] \rightarrow \mathbb{k}, \quad f \mapsto f(\alpha),$$

действует на базисные мономы по правилу  $x^n \mapsto \alpha^n$  и, тем самым, задаётся степенным рядом

$$E_\alpha(t) = \sum_{n \geq 0} \alpha^n t^n = \frac{1}{1 - \alpha t} \in \mathbb{k}[[t]].$$

Отметим, что все функционалы вычисления линейно независимы, так как равенство

$$\frac{\lambda_1}{1 - \alpha_1 t} + \frac{\lambda_2}{1 - \alpha_2 t} + \dots + \frac{\lambda_k}{1 - \alpha_k t} = 0$$

в кольце  $\mathbb{k}[[t]]$  после приведения к общему знаменателю превращается в равенство

$$\lambda_1 \prod_{v \neq 1} (1 - \alpha_v t) + \lambda_2 \prod_{v \neq 2} (1 - \alpha_v t) + \dots + \lambda_k \prod_{v \neq k} (1 - \alpha_v t) = 0$$

в кольце многочленов  $\mathbb{k}[t]$ , подставляя в которое  $t = 1/\alpha_i$ , мы заключаем, что  $\lambda_i = 0$  для каждого  $i = 1, \dots, k$ . Таким образом, в пространстве  $\mathbb{R}[[t]] \simeq \mathbb{R}[x]^*$ , двойственном к счётномерному пространству  $\mathbb{R}[x]$ , имеется несчётное линейно независимое множество векторов.

**Пример 7.3 (Функционалы вычисления функций на множестве)**

Пусть  $X$  — любое множество, и  $V = \mathbb{k}^X$  — пространство всех функций  $X \rightarrow \mathbb{k}$ , как в [прим. 4.1](#) на стр. 52. С каждой точкой  $x \in X$  связан функционал вычисления<sup>1</sup>

$$\text{ev}_x : \mathbb{k}^X \rightarrow \mathbb{k}, \quad f \mapsto f(x),$$

переводящий функцию  $f : X \rightarrow \mathbb{k}$  в её значение  $f(x) \in \mathbb{k}$  в точке  $x$ . Функционалы вычисления линейно независимы, поскольку вычисляя обе части равенства

$$\lambda_1 \text{ev}_{x_1} + \lambda_2 \text{ev}_{x_2} + \dots + \lambda_m \text{ev}_{x_m} = 0$$

на дельта-функции  $\delta_{x_i} : X \rightarrow \mathbb{k}$ , равную нулю во всех точках множества  $X$  кроме точки  $x_i$ , где она равна единице, мы заключаем, что  $\lambda_i = 0$ , и так для каждого  $i = 1, \dots, m$ .

**7.1.1. Двойственные базисы.** С каждым базисом  $e = (e_1, e_2, \dots, e_n)$  конечномерного векторного пространства  $V$  связан набор координатных функционалов  $e^* = (e_1^*, e_2^*, \dots, e_n^*)$ , лежащих в двойственном пространстве  $V^*$ . По определению, функционал  $e_i^* : V \rightarrow \mathbb{k}$  сопоставляет каждому вектору пространства  $V$  его  $i$ -ю координату в базисе  $e$ , т. е.

$$e_i^*(x_1 e_1 + x_2 e_2 + \dots + x_n e_n) \stackrel{\text{def}}{=} x_i.$$

Таким образом, значения функционала  $e_i^*$  на базисных векторах  $e_j$  суть

$$e_i^*(e_j) = \begin{cases} 1 & \text{при } j = i \\ 0 & \text{при } j \neq i. \end{cases} \quad (7-2)$$

<sup>1</sup>Обозначение  $\text{ev}$  происходит от «evaluation».

УПРАЖНЕНИЕ 7.1. Убедитесь, что все отображения  $e_i^* : V \rightarrow \mathbb{k}$  линейны.

Из формулы (7-2) вытекает, что ковекторы  $e_1^*, e_2^*, \dots, e_n^*$  линейно независимы: вычисляя обе части равенства  $\lambda_1 e_1^* + \lambda_2 e_2^* + \dots + \lambda_n e_n^* = 0$  на базисном векторе  $e_i$ , мы заключаем, что  $\lambda_i = 0$  для каждого  $i = 1, \dots, n$ . С другой стороны, каждый линейный функционал  $\varphi : V \rightarrow \mathbb{k}$  линейно выражается через координатные функционалы  $e_i^*$ : коэффициентами этого линейного выражения являются значения функционала  $\varphi$  на соответствующих базисных векторах пространства  $V$ , поскольку для любого  $v = \sum x_i e_i$  выполняется равенство

$$\varphi(v) = \varphi(x_1 e_1 + \dots + x_n e_n) = x_1 \varphi(e_1) + \dots + x_n \varphi(e_n) = e_1^*(v) \cdot \varphi(e_1) + \dots + e_n^*(v) \cdot \varphi(e_n), \quad (7-3)$$

как раз и означающее, что  $\varphi = e_1^* \cdot \varphi(e_1) + \dots + e_n^* \cdot \varphi(e_n)$  в пространстве  $V^*$ . Мы заключаем, что координатные функционалы  $e_i^*$  образуют базис векторного пространства  $V^*$ . Этот базис называется *двойственным* к базису из векторов  $e_i$  в  $V$ . Таким образом, в противовес прим. 7.2, для конечномерного пространства  $V$  имеет место равенство  $\dim V^* = \dim V$ .

УПРАЖНЕНИЕ 7.2. Пусть  $\dim V = n$ , а векторы  $v_1, \dots, v_n \in V$  и ковекторы  $\varphi_1, \dots, \varphi_n \in V^*$  таковы, что  $\varphi_i(v_i) = 1$  и  $\varphi_i(v_j) = 0$  при  $i \neq j$ . Покажите, что векторы  $v_i$  образуют базис в  $V$ , а ковекторы  $\varphi_i$  — двойственный базис в  $V^*$ .

ПРИМЕР 7.4 (ФОРМУЛА ТЕЙЛОРА)

Пусть поле  $\mathbb{k}$  имеет характеристику нуль<sup>1</sup>. Зафиксируем число  $a \in \mathbb{k}$  и обозначим через

$$\varphi_i : \mathbb{k}[x]_{\leq n} \rightarrow \mathbb{k}, \quad f \mapsto f^{(i)}(a),$$

функционал на пространстве многочленов степени не выше  $n$ , сопоставляющий многочлену значение его  $i$ -й производной в точке  $a$ . При  $i = 0$  мы полагаем  $\varphi_0(f) = \text{ev}_a(f) = f(a)$ . Функционалы  $\varphi_0, \varphi_1, \dots, \varphi_n$  и многочлены

$$f_k(x) = (x - a)^k / k!, \quad \text{где } k = 0, 1, \dots, n$$

удовлетворяют условиям упр. 7.2:  $\varphi_i(f_i) = 1$  и  $\varphi_i(f_j) = 0$  при  $i \neq j$ . Следовательно, многочлены  $f_i$  составляют базис в пространстве  $\mathbb{k}[x]_{\leq n}$  и координатами многочлена  $g \in \mathbb{k}[x]_{\leq n}$  в этом базисе являются значение многочлена  $g$  и первых  $n$  его производных в точке  $a$ . Иными словами, для любого многочлена  $g$  степени не выше  $n$  имеет место *формула Тэйлора*

$$g(x) = g(a) + g'(a) \cdot (x - a) + g''(a) \cdot \frac{(x - a)^2}{2} + \dots + g^{(n)}(a) \cdot \frac{(x - a)^n}{n!}, \quad (7-4)$$

а для любого набора чисел  $b_0, b_1, \dots, b_n \in \mathbb{k}$  существует единственный такой многочлен  $g$  степени не выше  $n$ , что  $g^{(i)}(a) = b_i$  при всех  $i = 0, 1, \dots, n$ , и этот многочлен задаётся формулой

$$g(x) = \sum_{k=0}^n b_k (x - a)^k / k!.$$

<sup>1</sup>Т. е. сумма любого числа единиц поля  $\mathbb{k}$  отлична от нуля.



**7.1.2. Канонический изоморфизм  $V \simeq V^{**}$ .** Каждый вектор  $v \in V$  может рассматриваться как функционал вычисления

$$ev_v : V^* \rightarrow \mathbb{k}, \quad \varphi \mapsto \varphi(v),$$

на двойственном пространстве  $V^*$ . Так как число  $\varphi(v) \in \mathbb{k}$  линейно зависит как от  $v \in V$ , так и от  $\varphi \in V^*$ , сопоставление вектору  $v$  функционала вычисления  $ev_v$  задаёт каноническое<sup>1</sup> линейное вложение

$$ev : V \hookrightarrow V^{**}, \quad v \mapsto ev_v. \quad (7-5)$$

**УПРАЖНЕНИЕ 7.3.** Убедитесь, что для любого<sup>2</sup> векторного пространства  $V$  отображение (7-5) инъективно.

Если пространство  $V$  конечномерно, то согласно [упр. 7.2](#) каждый базис  $e_1, e_2, \dots, e_n$  пространства  $V$  переводится отображением (7-5) в двойственный к базису  $e_1^*, e_2^*, \dots, e_n^*$  пространства  $V^*$  базис пространства  $V^{**}$ . Тем самым, для конечномерного пространства  $V$  отображение (7-5) канонически отождествляет  $V^{**}$  с  $V$ : каждая линейная форма  $V^* \rightarrow \mathbb{k}$  представляет собою функционал вычисления значений ковекторов из  $V^*$  на однозначно задаваемом этой формой векторе  $v \in V$ , и любой базис  $\varepsilon = (\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n)$  пространства  $V^*$  состоит из координатных функционалов для однозначно задаваемого этим базисом базиса  $\varepsilon^* = (e_1, \dots, e_n) = (\varepsilon_1^*, \dots, \varepsilon_n^*)$  в  $V$ . Таким образом, двойственные конечномерные пространства  $V$  и  $V^*$  играют по отношению друг к другу совершенно симметричные роли: *каждое* из них является пространством линейных функционалов на другом. Чтобы подчеркнуть эту симметрию между векторами и ковекторами, мы будем называть число

$$\langle \varphi, v \rangle \stackrel{\text{def}}{=} \varphi(v) = ev_v(\varphi) \in \mathbb{k} \quad (7-6)$$

свёрткой ковектора  $\varphi$  с вектором  $v$ . Свёртка является билинейным отображением

$$V^* \times V \rightarrow \mathbb{k}, \quad (\varphi, v) \mapsto \langle \varphi, v \rangle.$$

Для координатного пространства  $V = \mathbb{k}^n$  в обозначениях из [прим. 7.1](#) на стр. 86 свёртка ковектора-строки  $\xi = (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n) \in \mathbb{k}^{n*}$  с вектором-столбцом  $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)^t \in \mathbb{k}^n$  задаётся матричным произведением

$$\langle \xi, x \rangle = \xi \cdot x = \xi_1 x_1 + \xi_2 x_2 + \dots + \xi_n x_n.$$

Правая часть этого равенства абсолютно симметрична по буквам  $\xi$  и  $x$ .

**7.2. Аннуляторы.** Каждое множество ковекторов  $M \subset V^*$  можно воспринимать как систему однородных линейных уравнений  $\xi(x) = 0$  на неизвестный вектор  $x \in V$  с левыми частями  $\xi$ , пробегающими множество  $M$ . Пространство<sup>3</sup> всех решений такой системы обозначается

$$\text{Ann}(M) \stackrel{\text{def}}{=} \{v \in V \mid \xi(v) = 0 \forall \xi \in M\} \subset V$$

и называется *аннулятором* множества ковекторов  $M \subset V^*$ .

<sup>1</sup>Т. е. не требующее выбора базиса.

<sup>2</sup>В том числе и бесконечномерного.

<sup>3</sup>Будучи пересечением ядер линейных отображений  $\xi : V \rightarrow \mathbb{k}$  по всем  $\xi \in M$ , аннулятор любого множества  $M \subset V^*$  является векторным подпространством в  $V$ .

Двойственным образом, для любого множества векторов  $N \subset V$  положим

$$\text{Ann}(N) \stackrel{\text{def}}{=} \{ \varphi \in V^* \mid \varphi(v) = 0 \ \forall v \in N \} \subset V^* .$$

Таким образом,  $\text{Ann}(N)$  представляет собою множество всех линейных уравнений  $\xi(x) = 0$ , пространство решений которых содержит множество  $N$ , или — на геометрическом языке — множество уравнений всех содержащих множество  $N$  гиперплоскостей<sup>1</sup> в  $V$ . С другой стороны, как и выше, множество  $\text{Ann}(N) \subset V^*$  является множеством решений системы однородных уравнений  $e_{v_i}(y) = 0$  на неизвестный ковектор  $y \in V^*$  с левыми частями  $e_{v_i}$ , пробегающими множество  $N \subset V$ . В частности,  $\text{Ann}(N)$  всегда является векторным подпространством в  $V^*$ .

**УПРАЖНЕНИЕ 7.4.** Убедитесь, что аннулятор любого множества совпадает с аннулятором его линейной оболочки.

**Предложение 7.1**

Для любых<sup>2</sup> векторного пространства  $V$  и подпространства  $U \subset V$  имеются канонические изоморфизмы  $(V/U)^* \simeq \text{Ann } U$  и  $U^* \simeq V^* / \text{Ann } U$ .

**Доказательство.** Обозначим через  $\pi : V \rightarrow V/U$ ,  $v \mapsto [v]_U$ , линейное сюръективное отображение факторизации. Отображение  $F : (V/U)^* \rightarrow V^*$ ,  $\xi \mapsto \xi \circ \pi$ , сопоставляющее линейному функционалу  $\xi : V/U \rightarrow \mathbb{k}$  его композицию с  $\pi$ , которая действует по правилу  $v \mapsto \xi([v]_U)$ , линейно и имеет  $\ker F = 0$  и  $\text{im } F \subset \text{Ann } U$ . Для любого лежащего в  $\text{Ann } U$  линейного функционала  $\psi : V \rightarrow \mathbb{k}$  правило  $[v]_U \mapsto \psi(v)$  корректно задаёт линейный функционал  $V/U \rightarrow \mathbb{k}$ , который переводится в  $\psi$  линейным отображением  $F$ .

**УПРАЖНЕНИЕ 7.5.** Убедитесь в этом.

Следовательно,  $\text{im } F = \text{Ann } U$  и  $F$  является изоморфизмом между  $(V/U)^*$  и  $\text{Ann } U$ .

Линейное отображение  $R : V^* \rightarrow U^*$ ,  $\xi \mapsto \xi|_U$ , сопоставляющее линейному функционалу  $\xi : V \rightarrow \mathbb{k}$  его ограничение на подпространство  $U \subset V$ , имеет  $\ker R = \text{Ann } U$  и сюръективно, так как каждый функционал  $\psi : U \rightarrow \mathbb{k}$  можно продолжить до функционала  $V \rightarrow \mathbb{k}$ , произвольным образом задав его действие на базисных векторах пространства  $V$ , дополняющих какой-нибудь базис в  $U$  до базиса<sup>3</sup> в  $V$ . Поэтому канонический изоморфизм  $V^* / \ker R \simeq \text{im } R$  из **прим. 4.9** на стр. 61 является изоморфизмом между  $V^* / \text{Ann } U$  и  $U^*$ .  $\square$

**Пример 7.5 (ТЕОРЕМА О РАНГЕ МАТРИЦЫ)**

Столбцы  $a_1, a_2, \dots, a_n$  произвольной матрицы  $A \in \text{Mat}_{m \times n}(\mathbb{k})$  являются векторами координатного пространства  $\mathbb{k}^m$ . Обозначим через  $U \subset \mathbb{k}^m$  их линейную оболочку. Каждый максимальный по включению линейно независимый набор столбцов является базисом в  $U$  и состоит ровно из  $\dim U$  векторов. В  $i$ -й строке матрицы  $A$  стоят вычисленные на векторах  $a_1, a_2, \dots, a_n$  значения базисного ковектора  $e_i^* \in \mathbb{k}^{m*}$  из двойственного к стандартному базису  $e_1, e_2, \dots, e_m$  пространства  $\mathbb{k}^m$  базиса  $e_1^*, e_2^*, \dots, e_m^*$  двойственного пространства  $\mathbb{k}^{m*}$ . Согласно **предл. 7.1**, ограничения функционалов  $e_1^*, e_2^*, \dots, e_m^*$  на подпространство  $U$  линейно порождают двойственное к  $U$  пространство  $U^*$ . Поэтому любой максимальный по включению линейно независимый набор функционалов  $e_i^*|_U$  составляет базис в  $U^*$  и тоже состоит из  $\dim U^* = \dim U = \text{rk } A$  векторов. Поскольку линейная зависимость функционалов  $e_i^*|_U$  равносильна линейной зависимости

<sup>1</sup> См. **прим. 4.4** на стр. 53.

<sup>2</sup> В том числе бесконечномерных.

<sup>3</sup> Состоятельность этого рассуждения в бесконечномерном случае объясняется в теоретико-множественном добавлении из п° 7.4 на стр. 94 ниже.

строк значений этих функционалов на порождающих пространство  $U$  векторах<sup>1</sup>  $a_1, a_2, \dots, a_n$ , ограничения на подпространство  $U$  ковекторов  $e_{i_1}^*, e_{i_2}^*, \dots, e_{i_{rkA}}^*$  тогда и только тогда составляют базис в  $U^*$ , когда строки с номерами  $i_1, i_2, \dots, i_{rkA}$  составляют базис линейной оболочки строк матрицы  $A$  в пространстве  $\mathbb{k}^n$ . Мы получаем новое, более простое и концептуальное доказательство теоремы о ранге матрицы<sup>2</sup>: линейная оболочка строк  $m \times n$  матрицы в координатном пространстве  $\mathbb{k}^n$  имеет ту же размерность, что и линейная оболочка столбцов этой матрицы в координатном подпространстве  $\mathbb{k}^m$ .

Следствие 7.1

Если векторное пространство  $V$  конечномерно, то для любого подпространства  $U \subset V$  выполняется равенство  $\dim U + \dim \text{Ann } U = \dim V$ .

Доказательство. В силу предл. 7.1  $\dim \text{Ann } U = \dim(V/U)^* = \dim(V/U)$ , а по предл. 4.9 на стр. 62  $\dim(V/U) = \dim V - \dim U$ .  $\square$

УПРАЖНЕНИЕ 7.6. Пусть векторы  $u_1, \dots, u_k$  составляют базис в  $U$ , а векторы  $w_1, \dots, w_m$  дополняют их до базиса в  $V$ . Обозначим через  $u_1^*, \dots, u_k^*, w_1^*, \dots, w_m^*$  двойственный базис<sup>3</sup> в  $V^*$ . Покажите, что ковекторы  $w_1^*, \dots, w_m^*$  образуют базис в  $\text{Ann } U$ .

Следствие 7.2

Для любого векторного подпространства  $U \subset V$  выполняется равенство  $\text{Ann Ann } U = U$ .

Доказательство. По определению аннуляторов,  $U \subset \text{Ann Ann } U$ . С другой стороны, по сл. 7.1  $\dim \text{Ann Ann } U = \dim V^* - \dim \text{Ann } U = \dim V^* - \dim V + \dim U = \dim U$ .  $\square$

Замечание 7.1. Если в сл. 7.1 и сл. 7.2 взять в качестве  $V$  двойственное пространство  $V^*$  и отождествить двойственное к  $V^*$  пространство  $V^{**}$  с исходным пространством  $V$  при помощи канонического изоморфизма из н° 7.1.2, то мы получим для любого подпространства  $U \subset V^*$  равенства  $\dim U + \dim \text{Ann } U = \dim V$  и  $\text{Ann Ann } U = U$ .

Замечание 7.2. На языке линейных уравнений сл. 7.2 утверждает, что любая линейная форма, обращающаяся в нуль на всех решениях какой-нибудь системы линейных однородных уравнений линейно выражается через уравнения системы, а сл. 7.1 означает, что каждое подпространство коразмерности  $t$  в  $V$  можно задать системой из  $t$  линейно независимых линейных уравнений, и наоборот, множество решений всякой системы из  $t$  линейно независимых уравнений на пространстве  $V$  представляет собою векторное подпространство коразмерности  $t$ .

УПРАЖНЕНИЕ 7.7. Покажите, что  $\text{Ann Ann } N = \text{span } N$  для любого подмножества  $N \subset V$ .

ТЕОРЕМА 7.1

Соответствие  $U \leftrightarrow \text{Ann } U$  задаёт биекцию между подпространствами дополнительных размерностей в двойственных пространствах  $V$  и  $V^*$ . Эта биекция оборачивает включения:

$$U \subset W \iff \text{Ann } U \supset \text{Ann } W,$$

<sup>1</sup>Ибо равенство  $\lambda_1 \varphi_1 + \lambda_2 \varphi_2 + \dots + \lambda_k \varphi_k = 0$  в  $U^*$ , где  $\lambda_i \in \mathbb{k}$ , а  $\varphi_i \in U^*$ , равносильно выполнению равенств  $\lambda_1 \varphi_1(u) + \lambda_2 \varphi_2(u) + \dots + \lambda_k \varphi_k(u) = 0$  для всех векторов  $u$  из какого-нибудь линейно порождающего пространство  $U$  набора векторов.

<sup>2</sup>Ср. с теор. 5.1 на стр. 68.

<sup>3</sup>См. н° 7.1.1 на стр. 87.

и переводит суммы подпространств в пересечения, а пересечения — в суммы.

Доказательство. Обозначим через  $\mathcal{S}(V)$  множество всех подпространств векторного пространства  $V$ . Равенство  $\text{Ann Ann } U = U$  означает, что отображения, сопоставляющие подпространству его аннулятор в двойственном пространстве

$$\mathcal{S}(V) \begin{array}{c} \xrightarrow{U \mapsto \text{Ann } U} \\ \xleftarrow{\text{Ann } W \mapsto W} \end{array} \mathcal{S}(V^*)$$

обратны друг другу, и следовательно, биективны. Импликация  $U \subset W \Rightarrow \text{Ann } U \supset \text{Ann } W$  очевидна. Если взять в ней в качестве  $U$  и  $W$ , соответственно, подпространства  $\text{Ann } W$  и  $\text{Ann } U$  и воспользоваться равенствами  $\text{Ann Ann } W = W$  и  $\text{Ann Ann } U = U$ , получим обратную импликацию  $\text{Ann } U \supset \text{Ann } W \Rightarrow U \subset W$ . Равенство

$$\bigcap_{\nu} \text{Ann } U_{\nu} = \text{Ann} \left( \sum_{\nu} U_{\nu} \right) \quad (7-7)$$

тоже очевидно: любая линейная форма, зануляющаяся на каждом из подпространств  $U_{\nu}$ , зануляется и на их линейной оболочке, а форма, зануляющаяся на сумме подпространств, зануляется и на каждом подпространстве в отдельности. Если взять в (7-7) в качестве подпространств  $U_{\nu}$  пространства  $\text{Ann } U_{\nu}$ , получаем равенство  $\bigcap_{\nu} U_{\nu} = \text{Ann} \left( \sum_{\nu} \text{Ann } U_{\nu} \right)$ . Беря в нём аннуляторы обеих частей, приходим к равенству  $\text{Ann} \left( \bigcap_{\nu} W_{\nu} \right) = \sum_{\nu} \text{Ann } W_{\nu}$ .  $\square$

Следствие 7.3

Две системы однородных линейных уравнений  $Ax = 0$  и  $Bx = 0$  на переменный вектор-столбец  $x \in \mathbb{k}^n$  имеют одно и то же пространство решений если и только если приведённые ступенчатые матрицы  $A_{\text{red}}$  и  $B_{\text{red}}$  этих систем совпадают друг с другом с точностью до добавления или удаления нулевых строк.

Доказательство. Обозначим через  $U$  и  $W$  линейные оболочки строк матриц  $A$  и  $B$  в пространстве  $\mathbb{k}^{n*}$  ковекторов-строк ширины  $n$ . Согласно упр. 7.7 пространства решений систем уравнений  $Ax = 0$  и  $Bx = 0$  суть не что иное как лежащие в пространстве векторов-столбцов  $\mathbb{k}^n$  высоты  $n$  аннуляторы  $\text{Ann } U$  и  $\text{Ann } W$  пространств  $U$  и  $W$ . По теор. 7.1 равенство  $\text{Ann } U = \text{Ann } W$  пространств решений равносильно равенству  $U = W$  линейных оболочек строк матриц  $A$  и  $B$ . По сл. 6.2 на стр. 85 эти линейные оболочки совпадают если и только если совпадают их базисы с приведёнными ступенчатыми матрицами координат.  $\square$

**7.3. Двойственные линейные отображения.** С каждым линейным отображением векторных пространств  $F : U \rightarrow W$  канонически связано двойственное отображение

$$F^* : W^* \rightarrow U^*, \quad \xi \mapsto \xi \circ F, \quad (7-8)$$

действующее между двойственными пространствами в противоположном к  $F$  направлении и переводящее линейную форму  $\xi : W \rightarrow \mathbb{k}$  в линейную форму  $F^* \xi$ , значение которой на векторе  $v \in U$  равно  $F^* \xi(v) \stackrel{\text{def}}{=} \xi(Fv)$ .

Упражнение 7.8. Убедитесь, что композиция  $F \circ \xi$  является линейной формой на  $U$  и что отображение  $F^*$  линейно.

На языке свёрток между векторами и ковекторами<sup>1</sup> связь между двойственными операторами описывается равенством

$$\forall \langle F^* \xi, v \rangle = \langle \xi, Fv \rangle \quad \text{для всех } v \in W \text{ и } \xi \in U^*, \quad (7-9)$$

из которого видно, что операторы  $F$  и  $F^*$  играют симметричные роли по отношению друг к другу: двойственный к оператору  $F^* : W^* \rightarrow U^*$  оператор  $F^{**} : U^{**} \rightarrow W^{**}$  превращается в оператор  $F : U \rightarrow W$  при канонических отождествлениях  $U^{**} \simeq U$  и  $W^{**} \simeq W$  из п° 7.1.2 на стр. 89.

УПРАЖНЕНИЕ 7.9. Убедитесь в этом.

#### Предложение 7.2

Для двойственных операторов  $F : U \rightarrow W$  и  $F^* : W^* \rightarrow U^*$  имеют место равенства

$$\begin{aligned} (1) \ker F &= \text{Ann im}(F^*) & (2) \ker(F^*) &= \text{Ann im } F \\ (3) \text{im}(F^*) &= \text{Ann ker } F & (4) \text{im } F &= \text{Ann ker}(F^*). \end{aligned}$$

Доказательство. Вектор  $F(v) \in W$  нулевой если и только если все линейные функционалы  $\xi : W \rightarrow \mathbb{K}$  принимают на нём нулевое значение, т. е.  $\langle \xi, Fv \rangle = 0$  для всех  $\xi \in W^*$ . В силу (7-9) это требование равносильно требованию  $\langle F^* \xi, v \rangle = 0$  для всех  $\xi \in W^*$ , которое означает, что  $v \in \text{Ann im } F^*$ . Это доказывает равенство (1). Равенство (2) представляет собою равенство (1), написанное для оператора  $F^*$  в роли  $F$  и оператора  $F^{**} = F$  в роли  $F^*$ . Равенства (3) и (4) получаются из равенства (1) и (2) взятием аннуляторов обеих частей.  $\square$

#### Следствие 7.4

Векторные пространства  $\text{im } F \subset U$  и  $\text{im}(F^*) \subset W^*$  канонически двойственны друг другу. Свёртка вектора  $Fv \in \text{im } F$  с ковектором  $F^* \xi \in \text{im } F^*$  задаётся формулой

$$\langle F^* \xi, Fv \rangle \stackrel{\text{def}}{=} \langle F^* \xi, v \rangle = \langle \xi, Fv \rangle. \quad (7-10)$$

Доказательство. В прим. 4.9 на стр. 61 и предл. 7.1 на стр. 90 были построены канонические изоморфизмы  $\text{im } F \simeq U / \ker F$  и  $(U / \ker F)^* \simeq \text{Ann ker } F$ , последний из которых спаривает ковектор  $\eta \in \text{Ann ker } F \subset U^*$  с вектором  $[u] \in U / \ker F$  по правилу  $\langle \eta, [u] \rangle = \langle \eta, u \rangle$ , а первый отождествляет класс  $[u] \in U / \ker F$  с вектором  $F(u) \in \text{im } F$ . Равенство (3) из предл. 7.2 утверждает, что каждый  $\eta \in \text{Ann ker } F$  однозначно записывается в виде  $F^* \xi$ , где  $\xi \in W^*$ . Собирая всё это вместе и пользуясь равенством  $\langle F^* \xi, u \rangle = \langle \xi, Fu \rangle$ , мы заключаем, что свёртка ковектора  $\eta = F^* \xi \in \text{im } F^* = \text{Ann ker } F \subset U^*$  с вектором  $Fu \in \text{im } F$ , который представляет класс  $[u] \in U / \ker F$  при изоморфизме  $\text{im } F \simeq U / \ker F$ , задаётся формулой (7-10).  $\square$

УПРАЖНЕНИЕ 7.10. Убедитесь непосредственно, что формула (7-10) корректна, т. е. результат свёртки не зависит от выбора ковектора  $\xi \in W^*$  и вектора  $v \in U$ , использованных для записи элементов из  $\text{im } F^*$  и  $\text{im } F$ .

#### Следствие 7.5

Векторное пространство  $\ker F \subset U$  канонически двойственно фактор пространству  $U^* / \text{im } F^*$ , а пространство  $\ker F^* \subset W^*$  — фактор пространству  $W / \text{im } F$ . Свёртки между ними задаются формулами

$$\langle \psi + \ker F^*, v \rangle \stackrel{\text{def}}{=} \langle \psi, v \rangle \quad \text{и} \quad \langle \xi, w + F(U) \rangle \stackrel{\text{def}}{=} \langle \xi, w \rangle, \quad (7-11)$$

<sup>1</sup>См. 7-6 на стр. 89.

где  $\psi + \ker F^* \in U^* / \text{im}(F^*)$ ,  $v \in \ker F$ ,  $\xi \in \ker^*$ ,  $w + F(U) \in W / \text{im} F$ .  $\square$

УПРАЖНЕНИЕ 7.11. Проверьте корректность определений (7-11), т. е. независимость правых частей от выбора представителей  $\psi \in U^*$  и  $w \in W$  в классах  $\psi + \ker F^*$  и  $w + F(U)$ , и докажите сл. 7.5 по образцу сл. 7.4.

ЗАМЕЧАНИЕ 7.3. Принимая во внимание двойственности из сл. 7.5, фактор по образу линейного отображения  $F$  часто называют *коядром* отображения  $F$  и обозначают  $\text{coker}(F) \stackrel{\text{def}}{=} W / \text{im} F$ . В этих обозначениях первые два утверждения из сл. 7.5 записываются равенствами

$$(\ker F)^* = \text{coker}(F^*) \quad \text{и} \quad (\text{coker} F)^* = \ker(F^*).$$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 7.3

Пусть отображение  $F : U \rightarrow W$  имеет в некоторых базисах  $\mathbf{u} = (u_1, \dots, u_n)$  и  $\mathbf{w} = (w_1, \dots, w_m)$  пространств  $U$  и  $W$  имеет матрицу<sup>1</sup>  $F_{\mathbf{w}\mathbf{u}} = (f_{ij})$ . Тогда матрица  $F_{\mathbf{u}^*\mathbf{w}^*} = (f_{ij}^*)$  двойственного отображения  $F^* : W^* \rightarrow U^*$  в двойственных базисах  $\mathbf{u}^* = (u_1^*, \dots, u_n^*)$  и  $\mathbf{w}^* = (w_1^*, \dots, w_m^*)$  пространств  $W^*$  и  $U^*$  является транспонированной<sup>2</sup> к матрице отображения  $F$ :

$$F_{\mathbf{u}^*\mathbf{w}^*} = F_{\mathbf{w}\mathbf{u}}^t, \quad \text{т. е. } f_{ij}^* = f_{ji}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Число  $f_{ij}^*$  равно  $i$ -й координате ковектора  $F^*(w_j^*)$  в базисе  $\mathbf{u}^*$ , т. е. свёртке этого ковектора с базисным вектором<sup>3</sup>  $u_i$ :

$$f_{ij}^* = \langle F^* w_j^*, u_i \rangle = \langle w_j^*, F u_i \rangle = \langle w_j^*, \sum_k w_k \cdot f_{ki} \rangle = \sum_k \langle w_j^*, w_k \rangle \cdot f_{ki} = f_{ji},$$

что и утверждалось.  $\square$

ПРИМЕР 7.6 (ЕЩЁ РАЗ О РАНГЕ МАТРИЦЫ)

Каждая матрица  $A = (a_{ij}) \in \text{Mat}_{m \times n}(\mathbb{K})$  является матрицей линейного отображения

$$F : \mathbb{K}^n \rightarrow \mathbb{K}^m,$$

и линейная оболочка столбцов матрицы  $A$  совпадает с образом  $\text{im} F$  этого отображения, т. е.  $\text{rk} A = \dim \text{im} F$ . Согласно предл. 7.3, двойственное отображение  $F^* : \mathbb{K}^{m^*} \rightarrow \mathbb{K}^{n^*}$  задаётся в двойственных базисах транспонированной матрицей  $A^t$ , откуда

$$\text{rk} A^t = \dim \text{im} F^* = m - \dim \ker F^* = m - \dim \text{Ann im} F = \dim \text{im} F = \text{rk} A,$$

что даёт ещё одно доказательство теоремы о ранге матрицы<sup>4</sup>.

**7.4. Отступление: бесконечномерие.** Этот раздел относится скорее к теории множеств, чем к линейной алгебре. В нём изложена стандартная машинерия, позволяющая отбросить предположения о конечномерности, которые для упрощения первого знакомства с предметом были сделаны нами в теореме о базисе<sup>5</sup>.

<sup>1</sup> См. п° 4.4.2 на стр. 59.

<sup>2</sup> См. обсуждение перед упр. 5.3 на стр. 64 из п° 5.1.

<sup>3</sup> См. форм. (7-3) на стр. 88 и сопутствующее обсуждение.

<sup>4</sup> Ср. с прим. 7.5 на стр. 90.

<sup>5</sup> См. теор. 4.1 на стр. 51.

**7.4.1. Отношения порядка.** Множество  $X$  называется *частично упорядоченным* если между некоторыми парами элементов  $x, y \in X$  установлено такое отношение  $x \leq y$ , что для всех  $x, y, z \in X$  из  $x \leq y$  и  $y \leq z$  вытекает, что  $x \leq z$ , а одновременное выполнение условий  $x \leq y$  и  $y \leq x$  равносильно равенству  $x = y$ . Запись  $x < y$  означает, что  $x \leq y$  и  $x \neq y$ .

Например, пусть  $X = 2^M$  является множеством всех подмножеств некоторого множества  $M$ . Отношение нестрого включения  $x \subseteq y$  подмножества  $x \subseteq M$  в подмножество  $y \subseteq M$  задаёт на множестве  $2^M$  частичный порядок. Запись  $x \subset y$  означает строгое включение.

Частичный порядок на множестве  $X$  называется *линейным*, если для любой пары элементов  $x, y \in X$  выполняется неравенство  $x \leq y$  или неравенство  $y \leq x$ . Например, множество рациональных чисел  $\mathbb{Q}$  со стандартным отношением неравенства между числами линейно упорядочено, а множество  $2^M$  всех подмножеств множества  $M$  с отношением включения не является линейно упорядоченным, если в  $M$  не меньше двух элементов.

Линейно упорядоченное множество  $X$  называется *вполне упорядоченным*, если каждое непустое подмножество  $S \subset X$  содержит такой элемент  $s_* \in S$ , что  $s_* \leq s$  для всех  $s \in S$ . Этот элемент автоматически единствен и называется *начальным элементом* подмножества  $S$ . Например, множество натуральных чисел  $\mathbb{N}$  со стандартным отношением неравенства между числами вполне упорядочено, как и любое дизъюнктивное объединение вида  $\mathbb{N} \sqcup \mathbb{N} \sqcup \mathbb{N} \sqcup \dots$ , в котором все элементы каждой копии множества  $\mathbb{N}$  полагаются строго большими всех элементов всех предыдущих копий. Пустое множество тоже вполне упорядочено. Напротив, множество  $\mathbb{Q} \supset \mathbb{N}$  со стандартным отношением неравенства между числами не является вполне упорядоченным.

Вполне упорядоченные множества замечательны тем, что их элементы можно рекурсивно перебрать точно так же, как и элементы множества  $\mathbb{N}$ . А именно, пусть некоторое зависящее от элемента  $x$  вполне упорядоченного множества  $X$  утверждение  $\Phi(x)$  истинно для начального элемента  $x_*$  множества  $X$ , и пусть для каждого  $x \in X$  истинность утверждения  $\Phi(y)$  при всех  $y < x$  влечёт за собою истинность утверждения  $\Phi(x)$ . Тогда  $\Phi(x)$  истинно для всех  $x \in X$ .

УПРАЖНЕНИЕ 7.12. Убедитесь в этом.

Такой способ доказательства утверждения  $\Phi(x)$  для всех  $x \in X$  называется *трансфинитной индукцией*. Используемые для индуктивного перехода специальные подмножества

$$[x] \stackrel{\text{def}}{=} \{y \in X \mid y < x\}$$

называются *начальными интервалами* частично упорядоченного множества  $X$ . Элемент  $x \in X$  называется *точной верхней гранью* начального интервала  $[x] \subset X$ . Отметим, что начальный элемент  $x_* \in X$  является точной верхней гранью пустого начального интервала  $[x_*] = \emptyset$ .

УПРАЖНЕНИЕ 7.13. Покажите, что собственное подмножество  $I \subsetneq X$  тогда и только тогда является начальным интервалом вполне упорядоченного множества  $X$ , когда  $[y] \subset I$  для каждого  $y \in I$ , и в этом случае точная верхняя грань интервала  $I$  однозначно восстанавливается по  $I$  как начальный элемент дополнения  $X \setminus I$ .

**7.4.2. Лемма Цорна.** Рассмотрим произвольное частично упорядоченное множество  $P$  и обозначим через  $\mathcal{W}(P)$  множество всех подмножеств  $W \subset P$ , которые вполне упорядочены имеющимся на  $P$  отношением  $x \leq y$ . Множество  $\mathcal{W}(P)$  непусто и содержит пустое подмножество  $\emptyset \subset P$ , а также все конечные линейно упорядоченные подмножества<sup>1</sup>  $L \subset P$  и, в частности, все элементы множества  $P$ .

<sup>1</sup>Линейно упорядоченные подмножества частично упорядоченного множества называются *цепями*.

## ЛЕММА 7.1

Не существует такого отображения  $\varrho : \mathcal{W}(P) \rightarrow P$ , что  $\varrho(W) > w$  для всех  $W \in \mathcal{W}(P)$  и  $w \in W$ .

Доказательство. Пусть такое отображение  $\varrho$  существует. Назовём вполне упорядоченное подмножество  $W \subset P$   $\varrho$ -рекурсивным, если  $\varrho(\{y\}) = y$  для всех  $y \in W$ . Например, множество

$$\left\{ \varrho(\emptyset), \varrho(\{\varrho(\emptyset)\}), \varrho(\{\varrho(\emptyset), \varrho(\{\varrho(\emptyset)\})\}) \right\}$$

$\varrho$ -рекурсивно и может неограниченно расширяться вправо. Любые два различных  $\varrho$ -рекурсивных вполне упорядоченных подмножества с общим начальным элементом обладают тем свойством, что одно из них является начальным интервалом другого.

УПРАЖНЕНИЕ 7.14. Докажите это.

Обозначим через  $U \subset P$  объединение всех  $\varrho$ -рекурсивных вполне упорядоченных подмножеств в  $P$  с начальным элементом  $\varrho(\emptyset)$ .

УПРАЖНЕНИЕ 7.15. Убедитесь, что подмножество  $U \subset P$  вполне упорядочено и  $\varrho$ -рекурсивно.

Поскольку элемент  $\varrho(U)$  строго больше всех элементов из  $U$ , он не лежит в  $U$ . С другой стороны, множество  $W = U \cup \{\varrho(U)\}$  вполне упорядочено,  $\varrho$ -рекурсивно, и его начальным элементом является  $\varrho(\emptyset)$ . Следовательно,  $W \subset U$ , откуда  $\varrho(U) \in U$ . Противоречие.  $\square$

## ПРЕДЛОЖЕНИЕ 7.4

Пусть каждое вполне упорядоченное подмножество  $W$  частично упорядоченного множества  $P$  имеет в  $P$  верхнюю грань<sup>1</sup>. Тогда в  $P$  есть такой (возможно не единственный) элемент  $p^* \in P$ , что неравенство  $p^* \leq x$  выполняется в  $P$  только для  $x = p^*$ .

Доказательство. Если требуемого элемента  $p^*$  нет, то для каждого элемента  $p \in P$  найдётся такой элемент  $p' \in P$ , что  $p < p'$ . Тогда для каждого вполне упорядоченного подмножества  $W \subset P$  найдётся такой (возможно не единственный) элемент  $w^* \in P$ , что  $w < w^*$  для всех  $w \in W$ . Сопоставляя каждому  $W \in \mathcal{W}$  один из этих элементов  $w^*$ , мы получаем отображение  $\varrho : \mathcal{W} \rightarrow P$ , которого не может быть по лем. 7.1.  $\square$

## СЛЕДСТВИЕ 7.6 (ЛЕММА ЦОРНА)

Пусть каждое линейно упорядоченное подмножество  $L$  частично упорядоченного множества  $P$  имеет в  $P$  верхнюю грань, т. е. такой (возможно не единственный) элемент  $s^* \in P$ , что  $x \leq s^*$  для всех  $x \in L$ . Тогда в  $P$  есть такой (возможно не единственный) элемент<sup>2</sup>  $p^*$ , что неравенство  $p^* \leq x$  выполняется в  $P$  только при  $x = p^*$ .  $\square$

**7.4.3. Теоремы о базисах.** Подмножество  $B$  векторного пространства  $V$  называется *порождающим*, если каждый вектор  $v \in V$  записывается в виде

$$v = \lambda_1 b_1 + \lambda_2 b_2 + \dots + \lambda_n b_n, \quad \text{где } n \in \mathbb{N}, b_i \in B, \lambda_i \in \mathbb{k}.$$

Иначе можно сказать, что каждый вектор  $v \in V$  допускает линейное разложение

$$v = \sum_{b \in B} \lambda_b b, \quad \text{где } \lambda_b \in \mathbb{k}, \quad (7-12)$$

<sup>1</sup>Т. е. такой (возможно не единственный) элемент  $w^* \in P$ , что  $w \leq w^*$  для всех  $w \in W$ .

<sup>2</sup>Элементы с таким свойством принято называть *максимальными*.



в котором лишь конечное число коэффициентов  $\lambda_b$  отлично от нуля. Порождающее подмножество  $B \subset V$  называется *базисом* пространства  $V$ , если для каждого  $v \in V$  разложение (7-12) единственно, то есть равенство  $\sum_{b \in B} \lambda_b b = \sum_{b \in B} \mu_b b$ , в котором лишь конечное число коэффициентов  $\lambda_b, \mu_b$  отлично от нуля, равносильно тому, что  $\lambda_b = \mu_b$  при всех  $b \in B$ . Непустое множество  $A \subset V$  называется *линейно независимым* если равенство

$$\lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + \dots + \lambda_n a_n = 0, \quad \text{где } n \in \mathbb{N}, a_i \in A, \lambda_i \in \mathbb{k},$$

возможно только когда все  $\lambda_i = 0$ .

**УПРАЖНЕНИЕ 7.16.** Убедитесь в том, что множество  $E \subset V$  является базисом если и только если оно линейно независимо и порождает  $V$ .

**ТЕОРЕМА 7.2 (СУЩЕСТВОВАНИЕ БАЗИСА)**

В каждом отличном от нуля векторном пространстве  $V$  для любого линейно независимого множества векторов  $A$  и любого содержащего  $A$  и порождающего пространство  $V$  множества векторов  $B$  существует базис  $E$ , содержащий  $A$  и содержащийся в  $B$ .

**Доказательство.** Линейно независимые множества векторов  $X \subseteq V$  со свойством  $A \subseteq X \subseteq B$  образуют частично упорядоченное отношением включения множество, удовлетворяющее лемме Цорна<sup>1</sup>. А именно, в качестве верхней грани линейно упорядоченной цепи вложенных друг в друга линейно независимых наборов векторов можно взять их объединение. Оно тоже будет линейно независимо, так как любая конечная линейная комбинация векторов такого объединения всегда является линейной комбинацией векторов какого-нибудь одного достаточно большого множества цепочки. Тем самым, по лемме Цорна существует такое линейно независимое множество  $E$  со свойством  $A \subseteq E \subseteq B$ , что для любого линейно независимого множества  $X$  со свойством  $A \subseteq X \subseteq B$  включение  $E \subseteq X$  влечёт равенство  $E = X$ . Покажем, что  $E$  линейно порождает  $V$ . Достаточно убедиться, что каждый вектор  $b \in B \setminus E$  линейно выражается через  $E$ . Так как множество  $E \cup \{b\}$  строго больше  $E$ , оно линейно зависимо. Поскольку само множество  $E$  линейно независимо, всякая линейная зависимость между векторами из  $E \cup \{b\}$  содержит с ненулевым коэффициентом вектор  $b$ . Тем самым, он линейно выражается через  $E$ .  $\square$

**Следствие 7.7**

Каждое ненулевое векторное пространство имеет базис, и любой базис любого подпространства можно дополнить до базиса во всём пространстве.  $\square$

**ТЕОРЕМА 7.3 (РАВНОМОЩНОСТЬ БАЗИСОВ)**

В каждом векторном пространстве все базисы равномощны.

**Доказательство.** Пусть базис  $B$  строго мощнее базиса  $E$ . Поскольку в конечномерном пространстве это невозможно по **теор. 4.1** на стр. 51, оба базиса бесконечны. Каждый вектор  $e \in E$  является линейной комбинацией конечного множества векторов  $B_e \subset B$ . Так как множество  $E$  бесконечно, объединение  $B_E = \bigcup_{e \in E} B_e$  всех этих конечных множеств равномощно  $E$ .

**УПРАЖНЕНИЕ 7.17.** Убедитесь в этом.

Тем самым, существует вектор  $b \in B$ , не лежащий в  $B_e$ . Линейно выражая  $b$  через векторы базиса  $E$ , а каждый из входящих в это выражение векторов  $e \in E$  — через векторы из  $B_e$ , мы

<sup>1</sup>См. [сл. 7.6](#) на стр. 96.

получим линейное выражение вектора  $b \in B \setminus B_E$  через векторы из  $B_E$ . Тем самым, множество  $B$  линейно зависимо.  $\square$

Следствие 7.8

Всякое более мощное, чем базис, множество векторов линейно зависимо.  $\square$

ТЕОРЕМА 7.4 (ПРОДОЛЖЕНИЕ ЛИНЕЙНЫХ ОТОБРАЖЕНИЙ)

Для каждого линейного отображения  $F : U \rightarrow W$ , заданного на подпространстве  $U$  векторного пространства  $V$ , существует (возможно, не единственное) такое линейное отображение  $G : V \rightarrow W$ , что  $G|_U = F$ .

Доказательство. Каждое линейное отображение  $G : V \rightarrow W$  однозначно задаётся своими значениями на векторах любого базиса  $E$  пространства  $V$ , и для любого отображения множеств  $g : E \rightarrow W$  существует единственное такое линейное отображение  $G : V \rightarrow W$ , что  $G(e) = g(e)$  для всех  $e \in E$ .

УПРАЖНЕНИЕ 7.18. Убедитесь в этом.

Рассмотрим произвольный базис  $B$  в  $U$ , дополним его до базиса  $E = B \sqcup C$  в  $V$  и рассмотрим любое отображение множеств  $g : E \rightarrow W$ , переводящее каждый вектор  $b \in B$  в  $F(b)$ . Отвечающее этой функции линейное отображение обладает требуемым свойством.  $\square$

## §8. Объёмы и определители

**8.1. Объём  $n$ -мерного ориентированного параллелепипеда.** Ненулевая функция от  $n$  аргументов из  $n$ -мерного векторного пространства  $V$

$$\omega : V \times V \times \dots \times V \rightarrow \mathbb{k}$$

называется *объёмом ориентированного параллелепипеда* или *формой  $n$ -мерного объёма*, если она обладает теми же двумя свойствами, что и форма площади из н° 1.3 на стр. 13, а именно<sup>1</sup>:

- 1) объём не меняется при добавлений к любому из аргументов произвольной кратности любого другого аргумента:  $\omega(\dots, u + \lambda w, \dots, w, \dots) = \omega(\dots, u, \dots, w, \dots)$
- 2) при умножении любого из аргументов на число объём умножается на это число:

$$\omega(\dots, \lambda v, \dots) = \lambda \omega(\dots, v, \dots).$$

На геометрическом языке эти свойства, как и раньше, означают, что объём параллелепипеда, натянутого на векторы  $v_1, v_2, \dots, v_n$ , как на рис. 8◊1, умножается на  $\lambda$  при умножении любого ребра на  $\lambda$ , и не меняется при сдвиге двух противоположных  $(n - 1)$ -мерных граней друг относительно друга в направлении какого-нибудь параллельного этим граням ребра (параллельная проекция происходящего на двумерную плоскость, порождённую ребром, вдоль которого делается сдвиг, и ребром, соединяющим сдвигаемые грани, изображена на рис. 8◊2).

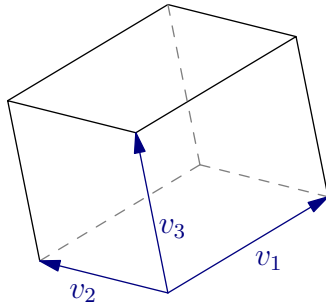


Рис. 8◊1. Параллелепипед.

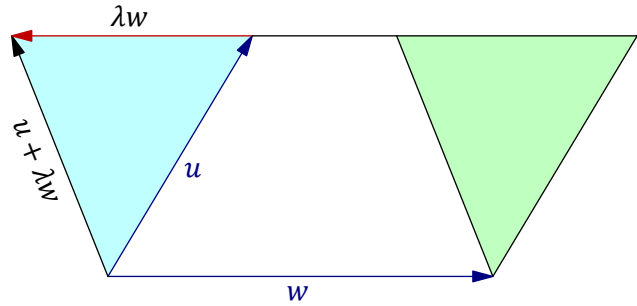


Рис. 8◊2. Параллельный перекоп.

Дословно также, как лем. 1.3 на стр. 14, доказывается

**Лемма 8.1**

Каждая форма  $n$ -мерного объёма  $\omega$  автоматически обладает следующими свойствами:

- 1) если векторы  $v_1, v_2, \dots, v_n$  линейно зависимы, то  $\omega(v_1, v_2, \dots, v_n) = 0$ ; в частности, форма  $\omega$  кососимметрична, т. е. обращается в нуль, когда какие-нибудь два аргумента совпадают:  $\omega(\dots, v, \dots, v, \dots) = 0$
- 2) форма  $\omega$  линейна по каждому из своих аргументов при фиксированных остальных:

$$\omega(\dots, \lambda u + \mu w, \dots) = \lambda \omega(\dots, u, \dots) + \mu \omega(\dots, w, \dots) \quad (8-1)$$

<sup>1</sup>Здесь и далее мы обозначаем многоточиями аргументы, остающиеся неизменными в левой и правой части равенства.

3) форма  $\omega$  знакопеременна<sup>1</sup>:  $\omega(\dots, u, \dots, w, \dots) = -\omega(\dots, w, \dots, u, \dots)$ .

Доказательство. Если один из векторов линейно выражается через остальные, скажем,

$$v_1 = \lambda_2 v_2 + \dots + \lambda_n v_n,$$

то

$$\begin{aligned} \omega(v_1, v_2, \dots, v_n) &= \omega(\lambda_2 v_2 + \dots + \lambda_n v_n, v_2, \dots, v_n) = \omega(0, v_2, \dots, v_n) = \\ &= \omega(0 \cdot 0, v_2, \dots, v_n) = 0 \cdot \omega(0, v_2, \dots, v_n) = 0. \end{aligned}$$

Это доказывает первое свойство. Второе свойство очевидно выполняется, когда оба набора аргументов в правой части (8-1) линейно зависимы, так как в этом случае набор аргументов в левой части тоже линейно зависим, и обе части равенства (8-1) зануляются по свойству (1). Поэтому без ограничения общности можно считать, что аргументы первого слагаемого правой части образуют базис пространства  $V$ . Тогда  $w = \rho u + v$ , где  $v$  является линейной комбинацией остальных  $(n - 1)$  аргументов, и левая часть (8-1) равна

$$\omega(\dots, (\lambda + \mu\rho) \cdot u + \mu v, \dots) = (\lambda + \mu\rho) \cdot \omega(\dots, u, \dots),$$

а второе слагаемое правой части переписывается как

$$\mu\omega(\dots, \rho u + v, \dots) = \mu\rho \cdot \omega(\dots, u, \dots).$$

Тем самым, правая часть совпадает с левой. Знакопеременность следует из кососимметричности и линейности:

$$0 = \omega(\dots, (u + w), \dots, (u + w), \dots) = \omega(\dots, u, \dots, w, \dots) + \omega(\dots, w, \dots, u, \dots).$$

□

## 8.2. Пространство кососимметричных $n$ -линейных форм. Функция от $k$ векторов

$$V \times \dots \times V \rightarrow \mathbb{k},$$

линейная по каждому из своих аргументов при фиксированных остальных, называется  $k$ -линейной формой на векторном пространстве  $V$ .

УПРАЖНЕНИЕ 8.1. Убедитесь, что  $k$ -линейные формы образуют векторное пространство относительно обычных операций сложения функций и умножения функций на константы, а кососимметричные формы составляют в нём векторное подпространство.

### ТЕОРЕМА 8.1

Пространство  $n$ -линейных кососимметричных форм на  $n$ -мерном векторном пространстве  $V$  одномерно.

<sup>1</sup>Т. е. умножается на  $-1$  при перестановке любых двух аргументов.

**8.2.1. Начало доказательства теор. 8.1.** Зафиксируем в пространстве  $V$  какой-нибудь базис  $e_1, e_2, \dots, e_n$  и рассмотрим произвольную  $n$ -линейную кососимметричную форму  $\omega$  на  $V$ . Идея доказательства заключается в том, чтобы выразить значение  $\omega(v_1, v_2, \dots, v_n)$  на произвольном наборе векторов через  $\omega(e_1, e_2, \dots, e_n)$ , пользуясь линейностью и кососимметричностью. Пусть  $(v_1, v_2, \dots, v_n) = (e_1, e_2, \dots, e_n) \cdot C$ , где  $C = (c_{ij})$  — матрица размера  $n \times n$ , в  $j$ -том столбце которой стоят координаты вектора  $v_j$  в базисе  $e$ , т. е.

$$v_j = \sum_{i=1}^n e_i \cdot c_{ij}.$$

Тогда в силу линейности формы  $\omega$  по каждому из аргументов

$$\begin{aligned} \omega(v_1, v_2, \dots, v_n) &= \omega\left(\sum_{i_1} c_{i_1 1} e_{i_1}, \sum_{i_2} c_{i_2 2} e_{i_2}, \dots, \sum_{i_n} c_{i_n n} e_{i_n}\right) = \\ &= \sum_{i_1 i_2 \dots i_n} c_{i_1 1} \cdot c_{i_2 2} \cdot \dots \cdot c_{i_n n} \cdot \omega(e_{i_1}, e_{i_2}, \dots, e_{i_n}). \end{aligned}$$

Так как при совпадении двух аргументов  $\omega$  обращается в нуль, ненулевой вклад в последнюю сумму дают только такие  $(i_1, i_2, \dots, i_n)$ , где каждое из чисел  $1, 2, \dots, n$  встречается ровно один раз, т. е. всевозможные перестановки набора  $(1, 2, \dots, n)$ .

**8.2.2. Комбинаторное отступление: длина и знак перестановки.** Каждую перестановку

$$(g_1, g_2, \dots, g_n)$$

чисел  $(1, 2, \dots, n)$  можно воспринимать как взаимно однозначное отображение

$$g: \{1, 2, \dots, n\} \rightarrow \{1, 2, \dots, n\}, \quad i \mapsto g_i.$$

Иными словами, перестановки образуют группу всех биективных отображений множества

$$N = \{1, 2, \dots, n\}$$

в себя. Эта группа обозначается  $S_n$  и называется  $n$ -той симметрической группой. Скажем, что упорядоченная пара  $i < j$  элементов множества  $N$  является *инверсной* для заданной перестановки  $g = (g_1, g_2, \dots, g_n) \in S_n$ , если  $g_i > g_j$ . Таким образом, каждая перестановка  $g \in S_n$  разбивает множество всех  $n(n-1)/2$  упорядоченных пар  $i < j$  на два непересекающихся подмножества — инверсные пары и неинверсные пары. Количество  $\ell(g)$  инверсных пар перестановки  $g$  называется *числом инверсий* или *длиной* перестановки  $g$ .

**УПРАЖНЕНИЕ 8.2.** Найдите  $\max \ell(g)$  по всем  $g \in S_n$  и укажите все перестановки на которых он достигается.

Число  $\text{sgn}(g) \stackrel{\text{def}}{=} (-1)^{\ell(g)}$  называется *знаком* перестановки  $g$ . Перестановка  $g$  называется *чётной*, если  $\text{sgn}(g) = 1$  и *нечётной*, если  $\text{sgn}(g) = -1$ .

Перестановка, меняющая местами какие-либо два элемента  $i, j$  и оставляющая все остальные элементы на месте, обозначается  $s_{ij}$  и называется *транспозицией*  $i$ -го и  $j$ -го элементов.

**УПРАЖНЕНИЕ 8.3.** Убедитесь, что каждая перестановка  $g \in S_n$  является композицией транспозиций.

Обратите внимание, что разложение перестановки в композицию транспозиций не единственно: например, транспозицию  $\sigma_{13} = (3, 2, 1) \in S_3$  иначе можно записать как  $\sigma_{12}\sigma_{23}\sigma_{12}$  или как  $\sigma_{23}\sigma_{12}\sigma_{23}$ . Тем не менее чётность количества транспозиций, в композицию которых раскладывается данная перестановка  $g$ , не зависит от способа разложения и совпадает с чётностью числа инверсных пар перестановки  $g$ , т. е. все чётные перестановки являются композициями чётного числа транспозиций, а нечётные — нечётного. Это вытекает из следующей леммы.

Лемма 8.2

$\text{sgn}(g\sigma_{ij}) = -\text{sgn}(g)$  для любой перестановки  $g = (g_1, g_2, \dots, g_n)$  и любой транспозиции  $\sigma_{ij}$ .

Доказательство. Перестановки

$$\begin{aligned} g &= (g_1, \dots, g_{i-1}, g_i, g_{i+1}, \dots, g_{i-1}, g_j, g_{j+1}, \dots, g_n) \\ g\sigma_{ij} &= (g_1, \dots, g_{i-1}, g_j, g_{i+1}, \dots, g_{i-1}, g_i, g_{j+1}, \dots, g_n) \end{aligned} \quad (8-2)$$

отличаются друг от друга транспозицией элементов  $g_i$  и  $g_j$ , стоящих на  $i$ -том и  $j$ -том местах перестановки  $g$ . В этих двух перестановках пара  $(i, j)$ , а также  $2(j - i - 1)$  пар вида  $(i, m)$  и  $(m, j)$  с произвольным  $m$  из промежутка  $i < m < j$  имеют противоположную инверсность, а инверсность всех остальных пар одинакова.  $\square$

Следствие 8.1

Если перестановка  $g$  является композицией  $m$  транспозиций, то  $\text{sgn}(g) = (-1)^m$  и чётность перестановки совпадает с чётностью числа  $m$ .

Доказательство. Тожественная перестановка не имеет инверсных пар и, стало быть, чётна. В силу леммы, перестановка получающаяся из тождественной умножением на  $m$  транспозиций, имеет чётность  $(-1)^m$ .  $\square$

УПРАЖНЕНИЕ 8.4. Убедитесь, что  $\text{sgn}(gh) = \text{sgn}(g)\text{sgn}(h)$ , т. е. отображение  $\text{sgn} : S_n \rightarrow \{\pm 1\}$  является гомоморфизмом групп.

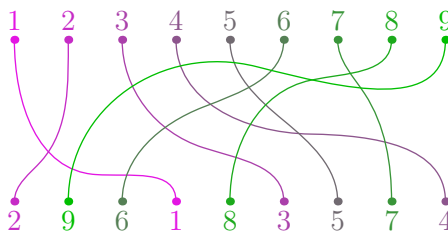


Рис. 8♦3.  $\text{sgn}(2, 9, 6, 1, 8, 3, 5, 7, 4) = +1$  (всего 18 пересечений).

Пример 8.1 (правило ниточек)

Чётность числа инверсных пар может быть определена следующим наглядным способом, известным как *правило ниточек*<sup>1</sup>. Запишем исходные числа и их перестановку друг под другом,

<sup>1</sup>Этот способ не слишком эффективен, когда требуется отыскать знак явно заданной длинной перестановки — обычно быстрее бывает разложить перестановку в композицию непересекающихся циклов и воспользоваться тем, что циклы чётной длины нечётны, а циклы нечётной длины чётны. Тем не менее, он оказывается полезен во некоторых вычислениях, с которыми мы столкнёмся далее.

как на рис. 8◊3, и соединим одинаковые числа нитями так, чтобы ни одна из нитей не вылезла за пределы прямоугольника, образованного четырьмя угловыми числами, и чтобы все точки пересечения нитей были простыми двойными<sup>1</sup>. Тогда чётность числа инверсных пар равна чётности числа точек пересечения нитей.

УПРАЖНЕНИЕ 8.5. Докажите это и найдите при помощи правила ниточек чётность *тасующей* перестановки  $(i_1, i_2, \dots, i_k, j_1, j_2, \dots, j_m)$ , в которой наборы номеров

$$(i_1, i_2, \dots, i_k) \quad \text{и} \quad (j_1, j_2, \dots, j_m)$$

не пересекаются, и каждый из них строго возрастает слева направо.

**8.2.3. Завершение доказательства теор. 8.1.** Так как при каждой транспозиции аргументов кососимметричная форма  $\omega$  меняет свой знак, для любой перестановки  $g \in S_n$  выполняется равенство  $\omega(e_{g_1}, e_{g_2}, \dots, e_{g_n}) = \text{sgn}(g)\omega(e_1, e_2, \dots, e_n)$ . Поэтому вычисление из н° 8.2.1 завершается следующим образом:

$$\begin{aligned} \omega(v_1, v_2, \dots, v_n) &= \sum_{i_1 i_2 \dots i_n} c_{i_1 1} \cdot c_{i_2 2} \cdot \dots \cdot c_{i_n n} \cdot \omega(e_{i_1}, e_{i_2}, \dots, e_{i_n}) = \\ &= \omega(e_1, e_2, \dots, e_n) \cdot \sum_{g \in S_n} \text{sgn}(g) \cdot c_{g_1 1} c_{g_2 2} \dots c_{g_n n}. \end{aligned} \quad (8-3)$$

Так как последняя сумма зависит только от матрицы  $C$ , но не от формы  $\omega$ , для любых двух  $n$ -линейных кососимметричных форм  $\omega_1, \omega_2$  и любого набора векторов  $v_1, v_2, \dots, v_n \in V$  выполняется равенство

$$\frac{\omega_1(v_1, v_2, \dots, v_n)}{\omega_2(v_1, v_2, \dots, v_n)} = \frac{\omega_1(e_1, e_2, \dots, e_n)}{\omega_2(e_1, e_2, \dots, e_n)}$$

где  $e_1, e_2, \dots, e_n$  произвольно зафиксированный базис пространства  $V$ . Мы заключаем, что правая часть этого равенства не зависит от выбора базиса, а левая — от выбора векторов  $v_i$ , т. е. формы  $\omega_1$  и  $\omega_2$  пропорциональны.

Для завершения доказательства теор. 8.1 остаётся убедиться, что при любом выборе ненулевой константы  $\omega(e_1, e_2, \dots, e_n) \in \mathbb{k}$  формула (8-3) действительно определяет ненулевую кососимметричную  $n$ -линейную форму на  $V$ , т. е. что сумма, стоящая в конце этой формулы, является кососимметричной функцией от столбцов матрицы  $C$  и линейна по каждому столбцу при фиксированных остальных. Это будет сделано в предл. 8.2 ниже.

**8.3. Определители.** Последняя сумма из формулы (8-3) обозначается

$$\det C \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{g \in S_n} \text{sgn}(g) \cdot c_{g_1 1} c_{g_2 2} \dots c_{g_n n} \quad (8-4)$$

и называется *определителем* квадратной матрицы  $C = (c_{ij})$  размера  $n \times n$ . Правая часть равенства (8-4) предписывает всеми возможными способами выбирать в матрице  $C$  по  $n$  элементов так, чтобы в каждой строке и в каждом столбце оказалось выбрано ровно по одному элементу. Множество клеток, в которых стоят выбранные элементы, является графиком биективного отображения  $g : j \mapsto g_j$  из множества номеров столбцов в множество номеров строк. Выбранные  $n$  элементов перемножаются между собою и умножаются на знак перестановки  $g$ , которую они задают. Полученные таким образом  $n!$  произведений складываются.

<sup>1</sup>Т. е. в каждой точке пересечения встречается ровно две нити, причём их касательные в точке пересечения различны.

## ПРИМЕР 8.2

Определители матриц размера  $2 \times 2$  и  $3 \times 3$  имеют вид

$$\det \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{pmatrix} = c_{11}c_{22} - c_{12}c_{21} \quad (8-5)$$

$$\det \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} \end{pmatrix} = c_{11}c_{22}c_{33} + c_{13}c_{21}c_{32} + c_{12}c_{23}c_{31} - \\ - c_{11}c_{23}c_{32} - c_{13}c_{22}c_{31} - c_{12}c_{21}c_{33}. \quad (8-6)$$

Во втором равенстве сначала выписаны тождественная и две циклических перестановки, потом — три транспозиции.

## ПРИМЕР 8.3 (ОПРЕДЕЛИТЕЛЬ ТРЕУГОЛЬНОЙ МАТРИЦЫ)

Если матрица  $C$  верхнетреугольная<sup>1</sup>, т. е.  $c_{ij} = 0$  при  $i > j$ , то единственным ненулевым слагаемым в сумме (8-4) будет произведение диагональных элементов матрицы  $C$ , отвечающее тождественной перестановке  $g = \text{Id}$ . Таким образом, для верхнетреугольной матрицы  $C$  определитель  $\det C = \prod_i c_{ii}$ . В частности,  $\det E = 1$ .

## ПРЕДЛОЖЕНИЕ 8.1

Для любой квадратной матрицы  $C$  выполняется равенство  $\det C = \det C^t$ .

Доказательство. Суммы (8-4), вычисляющие  $\det C$  и  $\det C^t$ , состоят из одних и тех же произведений всевозможных  $n$ -ок элементов матрицы, являющихся графиками биекций  $g: j \mapsto g_j$  между номерами столбцов и номерами строк, только в первой сумме отвечающее такой биекции произведение берётся со знаком  $\text{sgn}(g)$ , а во второй — со знаком  $\text{sgn}(g^{-1})$ . Но обратные друг другу перестановки имеют одинаковую чётность: если  $g = \sigma_1\sigma_2 \cdots \sigma_m$ , где  $\sigma_i$  — транспозиции, то  $g^{-1} = \sigma_m\sigma_{m-1} \cdots \sigma_1$  в силу равенства  $\sigma_i\sigma_i = \text{Id}$ .  $\square$

## ПРЕДЛОЖЕНИЕ 8.2

Определитель линеен по каждому столбцу матрицы  $C$  и обращается в нуль, если какие-то два столбца совпадают.

Доказательство. Первое вытекает из формулы (8-4): так как каждое из суммируемых произведений линейно зависит от каждого столбца, вся сумма тоже линейна по каждому столбцу. Если  $i$ -й столбец матрицы  $C$  совпадает с  $j$ -м, то в сумме (8-4) слагаемое, отвечающее перестановке  $g$  сократится со слагаемым, отвечающим перестановке  $h = g\sigma_{ij}$ , поскольку  $\text{sgn}(h) = -\text{sgn}(g)$ , а  $c_{h_1 1}c_{h_2 2} \cdots c_{h_n n} = c_{g_1 1} \cdots c_{g_j i} \cdots c_{g_j j} \cdots c_{g_n n} = c_{g_1 1} \cdots c_{g_j j} \cdots c_{g_i i} \cdots c_{g_n n} = c_{g_1 1}c_{g_2 2} \cdots c_{g_n n}$ .  $\square$

## СЛЕДСТВИЕ 8.2

Определитель  $n \times n$ -матрицы является  $n$ -линейной кососимметричной функцией как столбцов, так и строк.

Доказательство. Это следует из предл. 8.2 и равенства  $\det C = \det C^t$ .  $\square$

<sup>1</sup>См. прим. 5.7 на стр. 73.



## Следствие 8.3

На каждом  $n$ -мерном векторном пространстве  $V$  над произвольным полем  $\mathbb{K}$  существует единственная с точностью до пропорциональности ненулевая форма  $n$ -мерного объёма  $\omega$ . Если векторы  $e_1, e_2, \dots, e_n$  образуют базис  $V$ , а векторы  $v_1, v_2, \dots, v_n$ , линейно выражающихся через базис как  $(v_1, v_2, \dots, v_n) = (e_1, e_2, \dots, e_n) \cdot C$ , то

$$\omega(v_1, v_2, \dots, v_n) = \omega(e_1, e_2, \dots, e_n) \cdot \det C \quad (8-7)$$

для любой формы объёма  $\omega$  на  $V$ .

**Доказательство.** Из [лем. 8.1](#) на стр. 99 вытекает, что всякая форма объёма  $n$ -линейна и кососимметрична. Наоборот, всякая  $n$ -линейная кососимметричная форма является формой объёма, так как свойства (1), (2) со стр. 99 очевидным образом вытекают из линейности и кососимметричности.  $\square$

**8.3.1. Определитель линейного оператора.** Зафиксируем на векторном пространстве  $V$  размерности  $n$  форму объёма  $\omega$ . Для любого линейного оператора  $F : V \rightarrow V$  форма

$$\omega_F(v_1, v_2, \dots, v_n) \stackrel{\text{def}}{=} \omega(Fv_1, Fv_2, \dots, Fv_n)$$

полилинейна и кососимметрична. Поэтому она пропорциональна форме  $\omega$ . Коэффициент пропорциональности  $\omega_F / \omega$  равен отношению значений этих форм на элементах произвольного базиса  $e = (e_1, e_2, \dots, e_n)$  пространства  $V$  и не зависит от выбора базиса. Поскольку

$$(Fe_1, Fe_2, \dots, Fe_n) = (e_1, e_2, \dots, e_n) \cdot F_e,$$

где  $F_e$  — матрица оператора  $F$  в базисе  $e$ , коэффициент пропорциональности

$$\frac{\omega_F}{\omega} = \frac{\omega(Fe_1, Fe_2, \dots, Fe_n)}{\omega(e_1, e_2, \dots, e_n)} = \frac{\omega(e_1, e_2, \dots, e_n) \cdot \det F_e}{\omega(e_1, e_2, \dots, e_n)} = \det F_e.$$

Мы заключаем, что определитель  $\det F_e$  матрицы оператора не зависит от выбора базиса  $e$ , в котором пишется матрица, и при применении оператора  $F$  к любому набору векторов объём натянутого на них параллелепипеда умножается на  $\det F_e$ . Определитель  $\det F_e$  называется *определителем линейного оператора*  $F : V \rightarrow V$  и обозначается  $\det F$ .

Поскольку при последовательном выполнении операторов  $G : V \rightarrow V$  и  $F : V \rightarrow V$  объёмы параллелепипедов умножаются сначала на  $\det(G)$ , а потом на  $\det(F)$ , мы заключаем, что для любых двух линейных операторов  $F, G : V \rightarrow V$  выполняется равенство

$$\det(FG) = \det(F) \det(G) \quad (8-8)$$

В частности,  $\det(FG) = \det(GF)$ .

## Предложение 8.3

Линейный оператор  $F : V \rightarrow V$  биективен если и только если  $\det F \neq 0$ .

**Доказательство.** Если оператор  $F$  биективен, то он обратим. Вычисляя определитель обеих частей в матричном равенстве  $FF^{-1} = \text{Id}$ , получаем  $\det F \det F^{-1} = 1$ , откуда  $\det F \neq 0$ . Если оператор не биективен, то столбцы его матрицы  $F_e$  линейно зависимы по [сл. 5.1](#) на стр. 67, откуда  $\det F = \det F_e = 0$ .  $\square$

## Следствие 8.4

Квадратная матрица  $A$  обратима если и только если  $\det A \neq 0$ .  $\square$

**8.3.2. Специальная линейная группа.** Из предыдущего вытекает, что операторы определителя 1 образуют в полной линейной группе  $GL(V)$  подгруппу. Она обозначается  $SL(V)$  и называется *специальной линейной группой* пространства  $V$ . Геометрически, специальная линейная группа состоит из всех операторов, сохраняющих ненулевую форму объёма на  $V$ , и это свойство не зависит от выбора формы объёма. Специальная линейная группа координатного пространства  $\mathbb{k}^n$  состоит из матриц определителя 1 и обозначается  $SL_n(\mathbb{k}) \subset GL_n(\mathbb{k})$ .

**8.3.3. Мультипликативность определителя.** Формула (8-8) на матричном языке превращается в полиномиальное тождество. А именно, обозначим через  $K = \mathbb{Z}[a_{ij}, b_{ij}]$  кольцо многочленов с целыми коэффициентами от  $2n^2$  независимых переменных  $a_{ij}$  и  $b_{ij}$ , где  $1 \leq i, j \leq n$ , и рассмотрим в кольце  $\text{Mat}_n(K)$  матрицы  $A = (a_{ij})$  и  $B = (b_{ij})$ , элементами которых являются эти переменные.

Упражнение 8.6. Покажите, что многочлен  $f(x_1, \dots, x_m) \in \mathbb{k}[x_1, \dots, x_m]$  над бесконечным полем  $\mathbb{k}$  является нулём если и только если он принимает нулевое значение в каждой точке координатного аффинного пространства  $\mathbb{k}^m$ .

Следствие 8.5 (мультипликативность определителя)

В кольце  $K = \mathbb{Z}[a_{ij}, b_{ij}]$  выполняется равенство  $\det(AB) = \det(A) \cdot \det(B)$ .

Доказательство. Поскольку поле  $\mathbb{Q}$  бесконечно, многочлен  $\det(AB) - \det(A) \cdot \det(B)$  является нулевым если и только если он принимает нулевое значение во всех точках аффинного пространства  $\mathbb{Q}^{2n^2}$  с координатами  $a_{ij}, b_{ij}$ , т. е. тогда и только тогда, когда равенство  $\det(AB) = \det(A) \cdot \det(B)$  выполняется для всех рациональных матриц  $A$  и  $B$ . Но для таких матриц оно превращается в равенство (8-8) для линейных операторов

$$F: \mathbb{Q}^n \rightarrow \mathbb{Q}^n, x \mapsto Ax, \quad \text{и} \quad G: \mathbb{Q}^n \rightarrow \mathbb{Q}^n, x \mapsto Bx,$$

имеющих в стандартном базисе координатного пространства  $\mathbb{Q}^n$  матрицы  $A$  и  $B$ . □

**8.4. Правила Крамера.** Для векторов  $v_1, \dots, v_n \in \mathbb{k}^n$  обозначим через  $\det(v_1, \dots, v_n)$  определитель матрицы, составленной из координат этих векторов. Поскольку определитель не меняется при транспонировании, не имеет значения как записываются координаты — по строкам или по столбцам. Непосредственным обобщением лем. 1.2 на стр. 13 является

Предложение 8.4 (первое правило Крамера)

Векторы  $v_1, v_2, \dots, v_n$  образуют базис в  $\mathbb{k}^n$  если и только если  $\det(v_1, v_2, \dots, v_n) \neq 0$ , и тогда  $i$ -тая координата произвольного вектора  $w = x_1 v_1 + x_2 v_2 + \dots + x_n v_n$  в этом базисе равна

$$x_i = \frac{\det(v_1, \dots, v_{i-1}, w, v_{i+1}, \dots, v_n)}{\det(v_1, v_2, \dots, v_n)}. \quad (8-9)$$

Доказательство. Если векторы  $v_1, v_2, \dots, v_n$  не образуют базис, то они линейно зависимы, и в этом случае  $\det(v_1, \dots, v_n) = 0$  по лем. 8.1 на стр. 99. Если  $v_1, v_2, \dots, v_n \in V$  образуют базис, то матрица со столбцами  $v_1, \dots, v_n$  обратима и её определитель  $\det(v_1, \dots, v_n) \neq 0$  по сл. 8.4. При этом каждый вектор  $w \in \mathbb{k}^n$  обладает единственным разложением

$$w = x_1 e_1 + x_2 e_2 + \dots + x_n e_n.$$

Применение к обеим частям этого равенства линейного функционала

$$V \rightarrow \mathbb{k}, \quad u \mapsto \det(v_1, \dots, v_{i-1}, u, v_{i+1}, \dots, v_n),$$

приводит к нужному равенству  $\det(v_1, \dots, v_{i-1}, w, v_{i+1}, \dots, v_n) = x_i \cdot \det(v_1, v_2, \dots, v_n)$ .  $\square$

**Пример 8.4 (уравнение гиперплоскости)**

Пусть  $n$  точек  $p_1, \dots, p_n$  в аффинном координатном пространстве  $\mathbb{k}^n$  не лежат в одном  $(k-2)$ -мерном аффинном подпространстве. Тогда, согласно [предл. 4.5](#) на стр. 57 через них проходит единственная гиперплоскость. Точка  $x$  лежит в этой гиперплоскости если и только если вектор  $\overrightarrow{p_n x} = x - p_n$  линейно выражается через  $n-1$  векторов  $\overrightarrow{p_n p_1}, \overrightarrow{p_n p_2}, \dots, \overrightarrow{p_n p_{n-1}}$ , что равносильно равенству  $\det(x - p_n, p_1 - p_n, p_2 - p_n, \dots, p_{n-1} - p_n) = 0$ . В силу полилинейности определителя, это соотношение представляет собою неоднородное линейное уравнение на  $x$ , которое можно переписать как

$$\det(x, p_1 - p_n, p_2 - p_n, \dots, p_{n-1} - p_n) = \det(p_n, p_1, p_2, \dots, p_{n-1}).$$

Например, в трёхмерном аффинном координатном пространстве  $\mathbb{k}^3$  плоскость  $p + \lambda u + \mu v$ , проходящая через точку  $p$  параллельно векторам  $u, v$ , задаётся неоднородным линейным уравнением  $\det(x, u, v) = \det(p, u, v)$ .

**8.4.1. Присоединённая матрица.** Для квадратной матрицы  $C = (c_{ij})$  обозначим через  $C_{ij}$  подматрицу размера  $(n-1) \times (n-1)$ , которая получается из  $C$  удалением  $i$ -й строки и  $j$ -го столбца. Число  $(-1)^{i+j} \det C_{ij}$  называется *алгебраическим дополнением* к элементу  $c_{ij}$  матрицы  $C$ . Транспонированная к матрице из алгебраических дополнений матрица

$$C^\vee = (c_{ij}^\vee), \quad \text{где} \quad c_{ij}^\vee = (-1)^{i+j} \det C_{ji},$$

называется *присоединённой*<sup>1</sup> к матрице  $C$ .

Обозначим через  $K = \mathbb{Z}[c_{ij}]$  кольцо многочленов с целыми коэффициентами от  $n^2$  независимых переменных  $c_{ij}$ ,  $1 \leq i, j \leq n$ , а через  $C = (c_{ij}) \in \text{Mat}_n(K)$  матрицу, элементами которой являются эти переменные

**ТЕОРЕМА 8.2**

В кольце  $n \times n$  матриц  $\text{Mat}_n(K)$  с элементами из кольца  $K = \mathbb{Z}[c_{ij}]$  выполняется равенство

$$C \cdot C^\vee = C^\vee \cdot C = \det(C) \cdot E. \quad (8-10)$$

**Доказательство.** Приравнивая соответственные матричные элементы в правой и левой части равенства (8-10), мы получаем набор из  $n^2$  равенств между многочленами с целыми коэффициентами от переменных  $c_{ij}$ . Чтобы доказать каждое такое равенство, достаточно проверить, что оно превращается в верное числовое равенство для всех наборов из  $n^2$  численных значений  $c_{ij} \in \mathbb{R}$  из некоторого всюду плотного подмножества в  $\mathbb{R}^{n^2}$ .

**УПРАЖНЕНИЕ 8.7 (по анализу).** Убедитесь в этом, а также в том, что для любого ненулевого многочлена  $f \in \mathbb{R}[x_1, \dots, x_m]$  множество  $\mathcal{D}(f) = \{p \in \mathbb{R}^m \mid f(p) \neq 0\}$  всюду плотно в  $\mathbb{R}^m$ .

<sup>1</sup>По-английски *adjunct*.

Таким образом, достаточно доказать равенство (8-10) для всех числовых матриц  $C \in \text{Mat}_n(\mathbb{R})$ , имеющих  $\det C \neq 0$ , что мы и сделаем. Столбцы  $v_1, \dots, v_n$  такой матрицы  $C$  образуют базис  $\mathbf{v}$  координатного векторного пространства  $\mathbb{R}^n$ . Стандартный базис  $\mathbf{e} = (e_1, \dots, e_n)$  пространства  $\mathbb{R}^n$  выражается через него по формуле  $\mathbf{e} = \mathbf{v} C_{ve}$ . Матрица перехода  $C_{ve}$  обратна к матрице перехода  $C_{ev} = C$  и удовлетворяет соотношениям

$$CC_{ve} = C_{ve}C = E. \quad (8-11)$$

С другой стороны, согласно правилу Крамера  $i$ -й элемент  $j$ -го столбца матрицы  $C_{ve}$  равен

$$\frac{\det(v_1, \dots, v_{i-1}, e_j, v_{i+1}, \dots, v_n)}{\det C}.$$

В числителе стоит определитель матрицы, имеющей в  $i$ -м столбце ровно один ненулевой элемент — единицу, стоящую в  $j$ -й строке. Переставим её в верхний левый угол, сделав  $i-1$  транспозиций столбцов и  $j-1$  транспозиций строк:

$$\begin{aligned} \det(v_1, \dots, v_{i-1}, e_j, v_{i+1}, \dots, v_n) &= (-1)^{i-1} \det(e_j, v_1, \dots, v_{i-1}, v_{i+1}, \dots, v_n) = \\ &= (-1)^{i+j-2} \det \begin{pmatrix} 1 & c_{j,1} & \cdots & c_{j,i-1} & c_{j,i+1} & \cdots & c_{j,n} \\ 0 & c_{1,2} & \cdots & c_{1,i-1} & c_{1,i+1} & \cdots & c_{1,n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & c_{j-1,2} & \cdots & c_{j-1,i-1} & c_{j-1,i+1} & \cdots & c_{j-1,n} \\ 0 & c_{j+1,2} & \cdots & c_{j+1,i-1} & c_{j+1,i+1} & \cdots & c_{j+1,n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & c_{n,1} & \cdots & c_{n,i-1} & c_{n,i+1} & \cdots & c_{n,n} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Ненулевой вклад в этот определитель дают только перестановки, оставляющие 1 на месте. Сумма произведений матричных элементов, отвечающих таким перестановкам, равна определителю  $(n-1) \times (n-1)$ -матрицы, получающейся выкидыванием из написанной выше матрицы первой строки и первого столбца, что равносильно удалению  $j$ -той строки и  $i$ -того столбца из матрицы  $C$ . Таким образом,  $C_{ve} = C^\vee / \det C$ , и равенства (8-11) превращаются в требуемые равенства (8-10).  $\square$

Следствие 8.6 (формула для обратной матрицы)

Если матрица  $C$  обратима, то  $C^{-1} = C^\vee / \det C$ .  $\square$

Пример 8.5

Матрицы размеров  $2 \times 2$  и  $3 \times 3$  с определителем 1 обращаются по формулам

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} (c_{22}c_{33} - c_{23}c_{32}) & -(c_{12}c_{33} - c_{13}c_{31}) & (c_{12}c_{23} - c_{13}c_{22}) \\ -(c_{21}c_{33} - c_{23}c_{31}) & (c_{11}c_{33} - c_{13}c_{31}) & -(c_{11}c_{23} - c_{13}c_{21}) \\ (c_{21}c_{32} - c_{22}c_{31}) & -(c_{11}c_{32} - c_{12}c_{32}) & (c_{11}c_{22} - c_{12}c_{21}) \end{pmatrix}$$

Для матриц с отличным от единицы определителем все матричные элементы в правых частях надо поделить на определитель матрицы из левой части.

Следствие 8.7 (разложение определителя по  $i$ -й строке или  $i$ -у столбцу)

В кольце  $n \times n$  матриц  $\text{Mat}_n(K)$  с элементами из кольца  $K = \mathbb{Z}[c_{ij}]$  выполняется равенство

$$\det C = \sum_{k=1}^n (-1)^{k+i} c_{ik} \det C_{ik} = \sum_{k=1}^n (-1)^{k+i} c_{ki} \det C_{ki}.$$

Доказательство. Соотношения получаются приравниванием  $(i, i)$ -тых диагональных элементов матриц из правой и левой части (8-10).  $\square$

Пример 8.6

Раскладывая определитель  $3 \times 3$  по первому столбцу, получаем

$$\det \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} \end{pmatrix} = c_{11} (c_{22}c_{33} - c_{23}c_{32}) - c_{21} (c_{12}c_{33} - c_{13}c_{32}) + c_{31} (c_{12}c_{23} - c_{13}c_{22}).$$

что согласуется с прямым вычислением из прим. 8.2.

**8.4.2. Тождество Гамильтона–Кэли.** Для любого коммутативного кольца  $K$  с единицей кольцо  $n \times n$  матриц  $\text{Mat}_n(K[t])$  с элементами из кольца многочленов  $K[t]$  совпадает с кольцом многочленов  $\text{Mat}_n(K)[t]$  от переменной  $t$  с коэффициентами в кольце матриц  $\text{Mat}_n(K)$ , поскольку каждую матрицу, в клетках которой стоят многочлены от  $t$ , можно записать как многочлен от  $t$  с матричными коэффициентами и наоборот. Например,

$$\begin{pmatrix} 3t^2 + 2t & t^3 - 1 \\ 2t + 3 & t^3 + t - 1 \end{pmatrix} = t^3 \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + t^2 \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}.$$

Определение 8.1

Для матрицы  $A = (a_{ij}) \in \text{Mat}_n(K)$  многочлен

$$\chi_A(t) \stackrel{\text{def}}{=} \det(tE - A) = t^n - \sigma_1(A) \cdot t^{n-1} + \dots + (-1)^{n-1} \sigma_{n-1}(A) \cdot t + (-1)^n \sigma_n(A) \in K[t]$$

называется *характеристическим многочленом* матрицы  $A$ . Коэффициент при  $t^{n-k}$  в характеристическом многочлене обозначается через  $(-1)^k \sigma_k(A)$ .

Упражнение 8.8. Убедитесь, что число  $\sigma_k(A) \in K$  равно сумме определителей всех таких  $k \times k$  подматриц матрицы  $A$ , главная диагональ которых является подмножеством главной диагонали матрицы  $A$ . В частности,  $\sigma_1(A) = \text{tr}(A)$  и  $\sigma_n(A) = \det A$ .

Теорема 8.3 (тождество Гамильтона–Кэли)

Каждая квадратная матрица с элементами из произвольного коммутативного кольца  $K$  с единицей аннулируется своим характеристическим многочленом, т. е. в кольце  $\text{Mat}_n(K)$  выполняется тождество  $\chi_A(A) = 0$ .

Доказательство. Подставляя в форм. (8-10) на стр. 107 вместо переменной матрицы  $C$  матрицу  $tE - A$ , где  $E$  — единичная матрица размера  $n \times n$ , заключаем, что в кольце  $\text{Mat}_n(K[t])$  выполняется равенство

$$\det(tE - A) \cdot E = (tE - A)(tE - A)^\vee,$$

где  $(tE - A)^\vee$  — присоединённая<sup>1</sup> к  $(tE - A)$  матрица. Перепишем это равенство в виде равенства между многочленами от  $t$  с коэффициентами в кольце матриц  $\text{Mat}_n(K)$ :

$$t^n \cdot E - \sigma_1(A)t^{n-1} \cdot E + \dots + (-1)^n \sigma_n(A) \cdot E = (tE - A) (t^m \cdot A_m^\vee + \dots + t \cdot A_1^\vee + A_0^\vee),$$

где  $A_0^\vee, A_1^\vee, \dots, A_m^\vee \in \text{Mat}_n(K)$  — некоторые матрицы. Подставляя в него  $t = A$ , получаем в кольце  $\text{Mat}_n(K)$  равенство  $\chi_A(A) \cdot E = 0$ , откуда  $\chi_A(A) = 0$ .  $\square$

**8.4.3. Однородные системы из  $n$  линейных уравнений на  $n+1$  неизвестных. Пространство решений системы из  $n$  линейных уравнений**

$$\begin{cases} a_{10}x_0 + a_{11}x_1 + \dots + a_{1n}x_n = 0 \\ a_{20}x_0 + a_{21}x_1 + \dots + a_{2n}x_n = 0 \\ \dots \dots \dots \dots \dots \\ a_{n0}x_0 + a_{n1}x_1 + \dots + a_{nn}x_n = 0 \end{cases} \quad (8-12)$$

на  $n+1$  неизвестных  $(x_0, x_1, \dots, x_n)$ , рассматриваемых как вектор-столбец координатного пространства  $\mathbb{K}^{n+1}$ , является аннулятором линейной оболочки строк матрицы

$$A = \begin{pmatrix} a_{1,0} & a_{1,1} & \dots & a_{1,n} \\ a_{2,0} & a_{2,1} & \dots & a_{2,n} \\ \vdots & \dots & \dots & \vdots \\ a_{n,0} & a_{n,1} & \dots & a_{n,n} \end{pmatrix}$$

в двойственном координатном пространстве  $\mathbb{K}^{n+1*}$ . Если строки этой матрицы линейно независимы, пространство решений системы (8-12) одномерно, и базисный вектор в этом подпространстве можно указать явно. Для этого обозначим через

$$A_i \stackrel{\text{def}}{=} (-1)^i \det \begin{pmatrix} a_{1,0} & \dots & a_{1,i-1} & a_{1,i+1} & \dots & a_{1,n} \\ a_{2,0} & \dots & a_{2,i-1} & a_{2,i+1} & \dots & a_{2,n} \\ \vdots & \dots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ a_{n,0} & \dots & a_{n,i-1} & a_{n,i+1} & \dots & a_{n,n} \end{pmatrix} \quad (8-13)$$

определитель  $n \times n$  матрицы, получающихся из  $A$  выкидыванием  $i$ -го столбца.

**Предложение 8.5 (второе правило Крамера)**

Уравнения (8-12) линейно независимы если и только если вектор  $a = (A_0, A_1, \dots, A_n) \neq 0$ , и в этом случае вектор  $a$  порождает одномерное пространство решений системы (8-12).

**Доказательство.** Допишем к матрице  $A$  сверху ещё одну копию её  $i$ -той строки. Определитель получившейся матрицы размера  $(n+1) \times (n+1)$  равен нулю. Раскладывая его по верхней строке, получаем  $a_{i0}A_0 + a_{i1}A_1 + \dots + a_{in}A_n = 0$ . Тем самым, вектор  $a = (A_0, A_1, \dots, A_n)$  в любом случае является решением системы (8-12). Если строки матрицы  $A$  линейно зависимы, то и строки всех матриц (8-13) линейно зависимы с теми же самыми коэффициентами. Поэтому все компоненты вектора  $A$  в таком случае нулевые. Если же ковекторы  $\alpha_i = (a_{i,0}, a_{i,1}, \dots, a_{i,n})$

<sup>1</sup>См. п° 8.4.1 на стр. 107.

линейно независимы в  $\mathbb{K}^{n+1^*}$ , то по лемме о замене<sup>1</sup> их можно дополнить до базиса в  $\mathbb{K}^{n+1^*}$  одним из стандартных базисных ковекторов  $e_i^*$ . Определитель матрицы

$$\begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ a_{10} & \cdots & \cdots & a_{1i} & \cdots & \cdots & a_{ni} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n0} & \cdots & \cdots & a_{ni} & \cdots & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix},$$

в строки которой записаны координаты базисных ковекторов  $e_i^*, \alpha_1, \dots, \alpha_n$ , отличен от нуля. Раскладывая его по первой строке, видим, что он равен  $(-1)^i A_i$ , откуда  $A_i \neq 0$ .  $\square$

ПРИМЕР 8.7 (ПЕРЕСЕЧЕНИЕ АФФИННЫХ ПЛОСКОСТЕЙ В  $\mathbb{K}^3$ )

Две непараллельные плоскости, заданные в трёхмерном аффинном координатном пространстве уравнениями

$$\begin{cases} a_1x + a_2y + a_3z = c \\ b_1x + b_2y + b_3z = d \end{cases}$$

с непропорциональными левыми частями  $(a_1, a_2, a_3)$  и  $(b_1, b_2, b_3)$ , пересекаются по прямой с вектором скорости  $v = (a_2b_3 - a_3b_2, -a_1b_3 + a_3b_1, a_1b_2 - a_2b_1)$ , который является базисным решением системы однородных уравнений

$$\begin{cases} a_1x + a_2y + a_3z = 0 \\ b_1x + b_2y + b_3z = 0. \end{cases}$$

Если, скажем, первая компонента вектора  $v$  ненулевая, то эта прямая проходит через точку  $p$  с координатами  $(0, p_2, p_3)$ , где

$$p_2 = \frac{cb_3 - da_3}{a_2b_3 - b_2a_3}, \quad p_3 = \frac{a_2d - b_2c}{a_2b_3 - b_2a_3}$$

это единственное решение системы неоднородных уравнений

$$\begin{cases} a_2y + a_3z = c \\ b_2y + b_3z = d. \end{cases}$$

<sup>1</sup>См. лем. 4.2 на стр. 51.

## §9. Вариации на тему определителей

**9.1. Объём и барицентрические координаты.** Пусть в аффинном пространстве  $\mathbb{A}^n = \mathbb{A}(V)$  задан набор из  $n + 1$  точек  $p_0, p_1, \dots, p_n$ , не лежащих в одной гиперплоскости. Поместим это пространство внутрь  $(n + 1)$ -мерного аффинного пространства  $\mathbb{A}^{n+1} = \mathbb{A}(\mathbb{k} \oplus V)$  в качестве аффинной гиперплоскости  $\Pi = (1, 0) + V$ , проходящей через точку  $(1, 0) \in \mathbb{k} \oplus V$  и имеющей направляющее векторное подпространство  $V \subset \mathbb{k} \oplus V$ . Рассмотрим в  $\mathbb{A}^{n+1}$  аффинный координатный репер с началом в точке  $o = (0, 0) \in \mathbb{k} \oplus V$  и базисными векторами

$$e_0 = \overrightarrow{op_0}, e_1 = \overrightarrow{op_1}, e_2 = \overrightarrow{op_2}, \dots, e_n = \overrightarrow{op_n}.$$

Гиперплоскость  $\Pi = \mathbb{A}^n$  проходит через концы этих базисных векторов и задаётся уравнением

$$x_0 + x_1 + \dots + x_n = 1.$$

Поэтому координаты  $(x_0, x_1, \dots, x_n)$  точки  $a \in \Pi$  можно воспринимать как такой набор весов с суммой 1, что центр тяжести точек  $p_i$ , взятых с весами  $x_i$ , оказывается в точке  $a$ , ибо

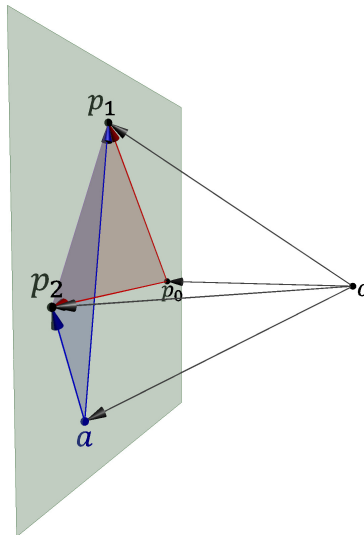
$$x_0 \overrightarrow{ap_0} + x_1 \overrightarrow{ap_1} + \dots + x_n \overrightarrow{ap_n} = \overrightarrow{oa} \cdot \sum x_i - \sum x_i e_i = 0.$$

Этот набор весов называют *барицентрическими координатами* точки  $a$  относительно точек  $p_i$ . Таким образом мы получаем биекцию между точками  $a \in \mathbb{A}^n$  и наборами весов  $(x_0, x_1, \dots, x_n)$  с суммой  $\sum x_i = 1$ . Основным результатом этого раздела является

**Предложение 9.1**

Барицентрические координаты  $(x_0, x_1, \dots, x_n)$  точки  $a \in \mathbb{A}^n$  относительно набора не лежащих в одной гиперплоскости точек  $p_0, p_1, \dots, p_n \in \mathbb{A}^n$  равны отношению объёмов  $n$ -мерных ориентированных параллелепипедов, натянутых на векторы, ведущие из точки  $a$  во все точки  $p_\nu$  кроме  $p_i$ , и на векторы, идущие из точки  $p_i$  во все остальные точки  $p_\nu$ :

$$x_i = \frac{\det(\overrightarrow{ap_0}, \dots, \overrightarrow{ap_{i-1}}, \overrightarrow{ap_{i+1}}, \dots, \overrightarrow{ap_n})}{\det(\overrightarrow{p_i p_0}, \dots, \overrightarrow{p_i p_{i-1}}, \overrightarrow{p_i p_{i+1}}, \dots, \overrightarrow{p_i p_n})}. \quad (9-1)$$



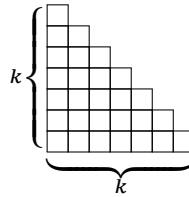
**Рис. 9◊1.** Барицентрические координаты как отношения объёмов



**9.1.1. Неформальный геометрический комментарий.** Координата  $x_i$  вектора  $\vec{oa}$  в базисе из векторов  $e_i = \vec{op}_i$  вычисляется по правилу Крамера:

$$x_i = \frac{\omega(\vec{op}_0, \dots, \vec{op}_{i-1}, \vec{oa}, \vec{op}_{i+1}, \dots, \vec{op}_n)}{\omega(\vec{op}_0, \dots, \vec{op}_n)}. \quad (9-2)$$

Над полем  $\mathbb{R}$  стоящие в числителе и знаменателе этой формулы объёмы параллелепипедов можно заменить на объёмы пирамид, отсекаемых от этих параллелепипедов гиперплоскостью  $\Pi$ , см. рис. 9♦1. Эти  $(n + 1)$ -мерные пирамиды имеют общую вершину  $o$ , а их основаниями служат лежащие в гиперплоскости  $\Pi$   $n$ -мерные пирамиды с вершинами, соответственно, в точках  $p_0, \dots, p_{i-1}, a, p_{i+1}, \dots, p_n$  и в точках  $p_0, \dots, p_n$ . В самом деле, отношение объёма пирамиды, натянутой на линейно независимые векторы  $v_1, \dots, v_n$  к объёму параллелепипеда, натянутого на те же векторы, зависит только от размерности и вычисляется следующим наглядным способом. Определим « $n$ -мерную ступенчатую пирамиду высоты  $k$ » как стопку  $n$ -мерных кубиков со стороной 1, лежащих в положительном гипероктанте пространства  $\mathbb{R}^n$  на плоскости  $x_n = 0$  так, что днища кубиков самого нижнего слоя образуют  $(n - 1)$ -мерную ступенчатую пирамиду высоты  $k$  в плоскости  $x_n = 0$ , днища кубиков следующего, второго снизу этажа образуют  $(n - 1)$ -мерную ступенчатую пирамиду высоты  $k - 1$  в плоскости  $x_n = 1$  и т. д. вплоть до единственного самого верхнего кубика, лежащего на плоскости  $x_n = k - 1$ . Обозначим объём такой пирамиды<sup>1</sup> через  $\Pi_k^n$ . Например, при  $n = 2$  двумерная ступенчатая пирамида высоты  $k$  имеет вид



и состоит из  $\Pi_k^2 = k(k + 1)/2$  квадратиков<sup>2</sup>. Трёхмерная пирамида высоты  $k$  имеет на нижнем этаже  $\Pi_k^2$  кубиков, надстраивающих предыдущую картинку вверх вдоль третьей координатной оси, её второй этаж состоит из  $\Pi_{k-1}^2$  кубиков, надстраивающих вверх такую же двумерную пирамидку высоты  $k - 1$  и т. д. Таким образом, трёхмерная пирамида состоит из

$$\Pi_k^3 = \Pi_1^2 + \dots + \Pi_k^2 = k(k + 1)(k + 2)/6$$

трёхмерных кубиков.

УПРАЖНЕНИЕ 9.1 (по анализу и комбинаторике). Убедитесь, что

$$\Pi_k^n \stackrel{\text{def}}{=} \Pi_1^{n-1} + \Pi_2^{n-1} + \dots + \Pi_k^{n-1} = \binom{n + k - 1}{n}$$

и выведите отсюда, что объём вещественного  $n$ -мерного параллелепипеда в  $n!$  раз больше объёма  $n$ -мерной пирамиды с вершинами в какой-нибудь вершине этого параллелепипеда и всех вершинах, соединённые с нею ребром.

Например, площадь параллелограмма, натянутого на векторы  $\vec{op}_0, \vec{op}_1$ , вдвое больше площади треугольника  $op_1p_2$ , а объём трёхмерного параллелепипеда, натянутого на векторы  $\vec{op}_0, \vec{op}_1, \vec{op}_2$ , вшестеро больше объёма тетраэдра  $op_1p_2p_3$ .

<sup>1</sup>Т. е. число кубиков, из которых она состоит.

<sup>2</sup>По этой причине число  $\Pi_k^2 = \binom{k+1}{2}$  часто называют  $k$ -тым треугольным числом и обозначают  $T_k$ .

Поэтому над произвольным полем  $\mathbb{k}$  характеристики нуль уместно называть величину

$$\omega(\overline{op}_1, \dots, \overline{op}_n) / n!$$

объёмом ориентированного  $n$ -мерного симплекса  $[op_1 \dots p_n]$  с вершинами в точках  $o, p_1, \dots, p_n$ . Такой симплекс представляет собою пирамиду, которая отрезается от натянутого на векторы  $\overline{op}_1, \dots, \overline{op}_n$  параллелограмма с вершиной в точке  $o$  гиперплоскостью, проходящей через все соединённые с  $o$  ребром вершины  $p_1, \dots, p_n$ .

Сформулированное выше [предл. 9.1](#) вытекает из формулы (9-2) в силу того, что объёмы  $(n + 1)$ -мерных пирамид с общей вершиной и лежащими в одной  $n$ -мерной гиперплоскости основаниями относятся точно также, как  $n$ -мерные объёмы этих оснований. И хотя идущее ниже доказательство [предл. 9.1](#) не будет использовать объёмы пирамид, описанную только что геометрическую интерпретацию полезно держать в голове.

Лемма 9.1

Для любого  $k$ -мерного подпространства  $U$  в  $m$ -мерном векторном пространстве  $W$  и таких векторов  $u_1, u_2, \dots, u_k, v_1, v_2, \dots, v_k \in U$  и  $w_1, w_2, \dots, w_{m-k} \in W$ , что векторы

$$w_1, w_2, \dots, w_{m-k}, u_1, u_2, \dots, u_k$$

составляют базис пространства  $W$ , выполняется равенство

$$\frac{\omega_m(w_1, w_2, \dots, w_{m-k}, v_1, v_2, \dots, v_k)}{\omega_m(w_1, w_2, \dots, w_{m-k}, u_1, u_2, \dots, u_k)} = \frac{\omega_k(v_1, v_2, \dots, v_k)}{\omega_k(u_1, u_2, \dots, u_k)}, \quad (9-3)$$

в котором  $\omega_k$  и  $\omega_m$  это любые ненулевые формы  $k$ -мерного и  $m$ -мерного объёмов в пространствах  $U$  и  $W$  соответственно.

Доказательство. Из сделанных предположений вытекает, что векторы  $u_1, u_2, \dots, u_k$  линейно независимы и составляют базис в  $U$ . Согласно [предл. 8.4](#) на стр. 106,

$$\omega_m(w_1, w_2, \dots, w_{m-k}, u_1, u_2, \dots, u_k) \neq 0 \quad \text{и} \quad \omega_k(u_1, u_2, \dots, u_k) \neq 0.$$

Определим на подпространстве  $U$  ещё одну форму объёма  $\omega'$  равенством

$$\omega'(v'_1, v'_2, \dots, v'_k) \stackrel{\text{def}}{=} \omega_m(w_1, w_2, \dots, w_{m-k}, v'_1, v'_2, \dots, v'_k)$$

для любых векторов  $v'_1, v'_2, \dots, v'_k \in U$ .

Упражнение 9.2. Убедитесь, что это действительно ненулевая форма объёма на  $U$ .

Поскольку ненулевая форма объёма единственна с точностью до пропорциональности и отлична от нуля на базисе  $u_1, u_2, \dots, u_k$ ,

$$\frac{\omega_k(v_1, v_2, \dots, v_k)}{\omega_k(u_1, u_2, \dots, u_k)} = \frac{\omega'(v_1, v_2, \dots, v_k)}{\omega'(u_1, u_2, \dots, u_k)} = \frac{\omega_m(w_1, w_2, \dots, w_{m-k}, v_1, v_2, \dots, v_k)}{\omega_m(w_1, w_2, \dots, w_{m-k}, u_1, u_2, \dots, u_k)}.$$

□

**9.1.2. Доказательство предл. 9.1.** Для каждого  $v \neq i$  подставим в числитель дроби из формулы (9-2) разложения  $\overline{op}_v = \overline{oa} + \overline{ap}_v$  и, пользуясь тем, что объём полилинеен и зануляется на линейно зависимых векторах, преобразуем этот числитель к виду

$$\omega(\overline{ap}_0, \dots, \overline{ap}_{i-1}, \overline{oa}, \overline{ap}_{i+1}, \dots, \overline{ap}_n).$$

Аналогично, подставляя в знаменатель  $\overline{op}_v = \overline{op}_i + \overline{pi}p_v$  для всех  $v \neq i$ , преобразуем его в

$$\omega(\overline{pi}p_0, \dots, \overline{pi}p_{i-1}, \overline{opi}, \overline{pi}p_{i+1}, \dots, \overline{pi}p_n).$$

Так как  $\overline{op}_i$  отличается от  $\overline{oa}$  на линейную комбинацию векторов  $\overline{pi}p_v$ , знаменатель равен

$$\begin{aligned} & \omega(\overline{pi}p_0, \dots, \overline{pi}p_{i-1}, \overline{oa}, \overline{pi}p_{i+1}, \dots, \overline{pi}p_n), \\ \text{а } x_i &= \frac{\omega(\overline{ap}_0, \dots, \overline{ap}_{i-1}, \overline{oa}, \overline{ap}_{i+1}, \dots, \overline{ap}_n)}{\omega(\overline{pi}p_0, \dots, \overline{pi}p_{i-1}, \overline{opi}, \overline{pi}p_{i+1}, \dots, \overline{pi}p_n)}. \end{aligned}$$

Остаётся применить лем. 9.1 для  $k = n$ ,  $U = V$ ,  $m = n + 1$ ,  $W = \mathbb{k} \oplus V$ ,  $w_1 = \overline{oa}$ ,  $u_v = \overline{pi}p_v$  и  $v_v = \overline{ap}_v$ , где  $v$  пробегает отличные от  $i$  значения от 0 до  $n$ .

**9.2. Грассмановы многочлены.** Полезным алгебраическим инструментом для работы с кососимметричными формами и определителями является алгебра  $\mathbb{k}\langle \xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n \rangle$  грассмановых многочленов от переменных  $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$  с коэффициентами из поля  $\mathbb{k}$ . Она определяется точно также, как и обычная алгебра многочленов, с той только разницей, что грассмановы переменные  $\xi_i$  не коммутируют, но *антикоммутируют* друг с другом, т. е. подчиняются соотношениям<sup>1</sup>

$$\forall i, j \quad \xi_i \wedge \xi_j = -\xi_j \wedge \xi_i \quad \text{и} \quad \forall i \quad \xi_i \wedge \xi_i = 0, \quad (9-4)$$

где символ « $\wedge$ » обозначает кососимметричное грассманово умножение, дабы отличать его от обычного коммутативного. Поскольку квадраты грассмановых переменных равны нулю, каждый грассманов моном *линеен* по каждой входящей в него переменной. Для каждого набора  $I = (i_1, i_2, \dots, i_m)$  строго возрастающих слева направо номеров  $i_1 < i_2 < \dots < i_m$  имеется грассманов моном

$$\xi_I \stackrel{\text{def}}{=} \xi_{i_1} \wedge \xi_{i_2} \wedge \dots \wedge \xi_{i_m}, \quad (9-5)$$

знак которого при перестановке  $g \in S_m$  переменных  $\xi_{i_1}, \xi_{i_2}, \dots, \xi_{i_m}$  меняется по правилу

$$\xi_{i_{g(1)}} \wedge \xi_{i_{g(2)}} \wedge \dots \wedge \xi_{i_{g(m)}} = \text{sgn}(g) \cdot \xi_{i_1} \wedge \xi_{i_2} \wedge \dots \wedge \xi_{i_m}. \quad (9-6)$$

Мономы (9-5), занумерованные всевозможными подмножествами  $I \subset \{1, 2, \dots, n\}$ , составляют базис алгебры  $\mathbb{k}\langle \xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n \rangle$  как векторного пространства над  $\mathbb{k}$  и перемножаются по правилу

$$\xi_I \wedge \xi_J = \begin{cases} \text{sgn}(I, J) \cdot \xi_{I \sqcup J} & \text{если } I \cap J = \emptyset \\ 0 & \text{если } I \cap J \neq \emptyset \end{cases} \quad (9-7)$$

где  $\text{sgn}(I, J) = \pm 1$  обозначает знак *тасяющей перестановки*, расставляющей в порядке возрастания набор номеров  $i_1, i_2, \dots, i_m, j_1, j_2, \dots, j_k$ , в котором  $i_1 < i_2 < \dots < i_m$  и  $j_1 < j_2 < \dots < j_k$ .

<sup>1</sup>Если  $\text{char } \mathbb{k} \neq 2$  соотношения  $\xi_i \wedge \xi_i = 0$  вытекают из соотношений  $\xi_i \wedge \xi_j = -\xi_j \wedge \xi_i$  и могут быть опущены. Однако когда  $\text{char } \mathbb{k} = 2$  именно соотношения на квадраты  $\xi_i \wedge \xi_i = 0$  отличает грассмановы переменные от обычных коммутативных.

Если наборы  $I = (i_1, i_2, \dots, i_m)$  и  $J = \{1, 2, \dots, n\} \setminus I$  дополняют друг друга, то согласно упр. 8.5 на стр. 103 этот знак  $\text{sgn}(I, J) = (-1)^{i_1+i_2+\dots+i_m+m(m+1)/2}$ .

Единственный моном старшей степени  $\xi_{\text{top}} \stackrel{\text{def}}{=} \xi_1 \wedge \xi_2 \wedge \dots \wedge \xi_n$  аннулируется умножением на любой грасманов многочлен с нулевым свободным членом. Однородные грасмановы многочлены степени  $k$  образуют векторное пространство размерности  $\binom{n}{k}$ , базис в котором составляют мономы (9-5), отвечающие всевозможным  $k$ -элементным подмножествам  $I$ . Размерность всей грасмановой алгебры  $\dim \mathbb{k} \langle \xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n \rangle = 2^n$ .

Два грасмановых монома степеней  $m$  и  $k$  коммутируют друг с другом по правилу

$$\begin{aligned} (\xi_{i_1} \wedge \xi_{i_2} \wedge \dots \wedge \xi_{i_m}) \wedge (\xi_{j_1} \wedge \xi_{j_2} \wedge \dots \wedge \xi_{j_k}) &= \\ &= (-1)^{km} (\xi_{j_1} \wedge \xi_{j_2} \wedge \dots \wedge \xi_{j_k}) \wedge (\xi_{i_1} \wedge \xi_{i_2} \wedge \dots \wedge \xi_{i_m}), \end{aligned}$$

ибо при переносе каждой из  $k$  переменных  $\xi_j$  через  $m$  переменных  $\xi_i$  происходит  $m$  транспозиций. Поэтому для любых двух однородных грасмановых многочленов  $\eta$  и  $\omega$

$$\eta \wedge \omega = (-1)^{\deg \eta \deg \omega} \omega \wedge \eta. \quad (9-8)$$

В частности, каждый однородный многочлен чётной степени коммутирует со всеми грасмановыми многочленами.

УПРАЖНЕНИЕ 9.3. Опишите центр<sup>1</sup> грасмановой алгебры.

**9.2.1. Грасманова алгебра векторного пространства.** Если в векторном пространстве  $V$  выбран базис  $e_1, \dots, e_n$ , алгебра грасмановых многочленов  $\mathbb{k} \langle e_1, e_2, \dots, e_n \rangle$  от базисных векторов пространства  $V$  обозначается  $\Lambda V$  и называется *грасмановой* (или *внешней*) алгеброй векторного пространства  $V$ . Не апеллирующие к выбору базиса название и обозначение вызваны тем, что пространство однородных грасмановых многочленов степени 1 канонически отождествляется с пространством  $V$  и, таким образом, не зависит от выбора базиса, а пространство однородных грасмановых многочленов степени  $k$  является линейной оболочкой всевозможных произведений  $v_1 \wedge v_2 \wedge \dots \wedge v_k$  из  $k$  произвольных векторов  $v_i \in V$  и тоже не зависит от выбора базиса. Обозначая пространство однородных грасмановых многочленов степени  $k$  через  $\Lambda^k V$ , мы получаем разложение алгебры  $\Lambda V$  в прямую сумму векторных пространств

$$\Lambda V = \bigoplus_{k=0}^n \Lambda^k V,$$

где  $\Lambda^0 V \stackrel{\text{def}}{=} \mathbb{k} \cdot 1$  обозначает одномерное пространство констант, тоже не зависящее от базиса.

**9.2.2. Линейные замены переменных.** Если векторы  $\mathbf{u} = (u_1, u_2, \dots, u_\ell)$  линейно выражены через векторы  $\mathbf{w} = (w_1, w_2, \dots, w_k)$  по формуле  $\mathbf{u} = \mathbf{w}C$ , где  $C = (c_{ij}) \in \text{Mat}_{k \times \ell}(\mathbb{k})$ , то их грасмановы произведения  $\mathbf{u}_J = u_{j_1} \wedge u_{j_2} \wedge \dots \wedge u_{j_m}$  линейно выражаются через грасмановы произведения  $\mathbf{w}_I = w_{i_1} \wedge w_{i_2} \wedge \dots \wedge w_{i_m}$  по формулам

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_J &= u_{j_1} \wedge u_{j_2} \wedge \dots \wedge u_{j_m} = \left( \sum_{i_1} w_{i_1} c_{i_1 j_1} \right) \wedge \left( \sum_{i_2} w_{i_2} c_{i_2 j_2} \right) \wedge \dots \wedge \left( \sum_{i_m} w_{i_m} c_{i_m j_m} \right) = \\ &= \sum_{1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_m \leq n} w_{i_1} \wedge w_{i_2} \wedge \dots \wedge w_{i_m} \cdot \sum_{g \in S_m} \text{sgn}(g) c_{i_{g(1)} j_1} c_{i_{g(2)} j_2} \dots c_{i_{g(m)} j_m} = \sum_I \mathbf{w}_I \cdot c_{IJ}, \end{aligned}$$

<sup>1</sup>Т.е. подалгебру, состоящую из всех грасмановых многочленов, которые коммутируют со всеми грасмановыми многочленами.

где  $c_{IJ} = \det C_{IJ}$  обозначает определитель  $m \times m$ -подматрицы  $C_{IJ} \subset C$ , сосредоточенной в пересечениях столбцов с номерами из  $J$  и строк с номерами из  $I$ , а суммирование происходит по всем наборам  $I = (i_1, i_2, \dots, i_m)$  из  $m$  возрастающих номеров  $1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_m \leq \ell$ . Определитель  $c_{IJ} = \det C_{IJ}$  называется  $IJ$ -тым *минором*  $m$ -того порядка в матрице  $C$ . Таким образом,  $IJ$ -тый элемент матрицы, выражающей грасмановы мономы  $u_j$  через грасмановы мономы  $w_I$  равен  $IJ$ -тому минору  $m$ -того порядка в матрице выражающей векторы  $u$  через векторы  $w$ .

В частности, если наборы векторов  $e = (e_1, e_2, \dots, e_n)$  и  $f = (f_1, f_2, \dots, f_n)$  оба являются базисами пространства  $V$ , то базисные грасмановы мономы  $e_J$  пространства  $\Lambda^m V$  выражаются через базисные мономы  $f_I$  при помощи матрицы перехода размера  $\binom{m}{n} \times \binom{m}{n}$ , у которой в позиции  $IJ$  стоит  $IJ$ -тый минор  $(c_{IJ})$  матрицы  $C_{fe}$ , выражающей  $e$  через  $f$ . Эта матрица обозначается  $\Lambda^m C_{fe}$  и называется  $m$ -той *внешней степенью* матрицы  $C_{fe}$ .

**9.3. Соотношения Лапласа.** Для набора возрастающих чисел  $J = (j_1, \dots, j_m) \subset \{1, \dots, n\}$  положим  $\deg J \stackrel{\text{def}}{=} m$ ,  $|J| \stackrel{\text{def}}{=} j_1 + j_2 + \dots + j_m$  и условимся обозначать через

$$\hat{J} = (\hat{j}_1, \hat{j}_2, \dots, \hat{j}_{n-m}) = \{1, 2, \dots, n\} \setminus J$$

дополнительный к  $J$  набор из  $\deg \hat{J} = n - m$  возрастающих номеров.

Рассмотрим произвольную квадратную матрицу  $A \in \text{Mat}_{n \times n}(\mathbb{k})$ , столбцы которой обозначим  $\alpha_1, \dots, \alpha_n$  и будем воспринимать как векторы координатного пространства  $\mathbb{k}^n$ . Матрица  $A$  является матрицей перехода от этих векторов к стандартному базису  $e_1, \dots, e_n$  пространства  $\mathbb{k}^n$ . Для любых двух мультииндексов  $I, J$  одинаковой длины  $\deg I = \deg J = m$  грасмановы мономы  $\alpha_J = \alpha_{j_1} \wedge \dots \wedge \alpha_{j_m}$  и  $\alpha_{\hat{J}} = \alpha_{\hat{j}_1} \wedge \dots \wedge \alpha_{\hat{j}_{n-m}}$  имеют дополнительные степени  $m$  и  $n - m$  и перемножаются по форм. (9-7) на стр. 115, которая с учётом упр. 8.5 имеет вид:

$$\alpha_J \wedge \alpha_{\hat{J}} = \begin{cases} (-1)^{|J| + \frac{m(m+1)}{2}} \alpha_1 \wedge \alpha_2 \wedge \dots \wedge \alpha_n & \text{при } I = J \\ 0 & \text{при } I \neq J. \end{cases} \quad (9-9)$$

Выражая мономы  $\alpha_J$  и  $\alpha_{\hat{J}}$  в левой части (9-9) через базисные мономы  $e_K$ , получаем

$$\left( \sum_K e_K a_{KJ} \right) \wedge \left( \sum_L e_L a_{L\hat{J}} \right) = (-1)^{\frac{m(m+1)}{2}} e_1 \wedge e_2 \wedge \dots \wedge e_n \sum_K (-1)^{|K|} a_{KJ} a_{K\hat{J}},$$

где  $K$  пробегает все возрастающие мультииндексы длины  $\deg K = m$ . Так как правая часть (9-9) при  $I = J$  равна  $(-1)^{\frac{m(m+1)}{2} + |J|} \det A \cdot e_1 \wedge e_2 \wedge \dots \wedge e_n$ , для любых двух наборов  $J, I$  из  $m$  строк произвольной квадратной матрицы  $A$  выполняются *соотношения Лапласа*

$$\sum_K (-1)^{|K| + |J|} a_{KJ} a_{K\hat{J}} = \begin{cases} \det A & \text{при } I = J \\ 0 & \text{при } I \neq J \end{cases} \quad (9-10)$$

где суммирование идёт по всем наборам  $K$  из  $m = \deg K$  строк матрицы  $A$ .

При  $I = J$  соотношение (9-10) даёт формулу для вычисления определителя<sup>1</sup>

$$\det A = \sum_K (-1)^{|K| + |J|} a_{KJ} a_{K\hat{J}} \quad (9-11)$$

<sup>1</sup>С геометрической точки зрения эта формула вычисляет объём  $n$ -мерного параллелепипеда через объёмы его  $m$ -мерных и  $(n - m)$ -мерных граней.

через всевозможные миноры  $a_{KJ}$  порядка  $m$ , сосредоточенные в  $m$  фиксированных столбцах матрицы  $A$  с номерами  $J$ , и *дополнительные* к ним миноры  $a_{j\hat{K}}$  порядка  $n - m$ , равные определителям матриц, получающихся из  $A$  вычёркиванием всех строк и столбцов, которые высекают минор  $a_{KJ}$ . Произведение  $(-1)^{|K|+|J|} a_{j\hat{K}}$  называется *алгебраическим дополнением* к минору  $a_{KJ}$  и обозначается  $\hat{a}_{KJ}$ .

УПРАЖНЕНИЕ 9.4. Для любых матриц  $A \in \text{Mat}_n(\mathbb{k})$ ,  $C \in \text{Mat}_m(\mathbb{k})$ ,  $B \in \text{Mat}_{n \times m}(\mathbb{k})$  покажите,

$$\text{что } \det \begin{pmatrix} A & B \\ 0 & C \end{pmatrix} = \det A \cdot \det C.$$

При  $I \neq J$  соотношение (9-10) имеет вид  $\sum_K a_{KJ} \hat{a}_{IK} = 0$  и называется *теоремой об умножении на чужие алгебраические дополнения*, поскольку его левая часть отличается от левой части формулы (9-11) тем, что миноры  $a_{KJ}$  умножаются не на свои алгебраические дополнения  $\hat{a}_{KJ}$ , а на дополнения  $\hat{a}_{IK}$  к минорам  $a_{IK}$ , сосредоточенным в другом наборе столбцов  $I \neq J$ .

Если согласованно занумеровать все  $m$ -элементные подмножества и все  $(n - m)$ -элементные подмножества в множестве  $\{1, 2, \dots, n\}$  так, чтобы дополнительные подмножества  $J$  и  $\hat{J}$  имели одинаковые номера, то соотношения Лапласа можно записать одним равенством

$$\Lambda^m A \cdot \Lambda^{n-m} \hat{A}^t = \det A \cdot E \quad (9-12)$$

на матрицы размера  $\binom{n}{m} \times \binom{n}{m}$ , в котором  $(IJ)$ -тый элемент матрицы  $\Lambda^{n-m} \hat{A}^t$  равен

$$\hat{a}_{JI} = (-1)^{|J|+|I|} a_{j\hat{I}}.$$

УПРАЖНЕНИЕ 9.5. Установите транспонированный вариант соотношений Лапласа

$$\sum_K a_{JK} \hat{a}_{IK} = \begin{cases} \det A & \text{при } I = J \\ 0 & \text{при } I \neq J \end{cases} \quad (9-13)$$

Пример 9.1 (соотношения Пюккера)

Рассмотрим  $2 \times 4$  матрицу  $A = (a_{ij}) \in \text{Mat}_{2 \times 4}(\mathbb{k})$  и обозначим через  $A_{ij}$  её  $2 \times 2$  минор, образованный  $i$ -м и  $j$ -м столбцами. Шесть чисел  $A_{ij}$  не могут принимать произвольные значения. Они связаны квадратичным соотношением Пюккера

$$A_{12}A_{34} - A_{13}A_{24} + A_{14}A_{23} = 0, \quad (9-14)$$

которое получается при раскрытии нулевого определителя  $4 \times 4$  матрицы  $\begin{pmatrix} A \\ A \end{pmatrix}$  по первым двум строкам.

УПРАЖНЕНИЕ 9.6. Убедитесь в этом и для любых шести чисел  $A_{ij}$ , удовлетворяющих соотношению (9-14), явно предъявите  $2 \times 4$  матрицу  $A$  с  $2 \times 2$  минорами  $A_{ij}$ .

Пример 9.2 (определитель пучка матриц)

Линейная оболочка пары непропорциональных квадратных матриц  $A, B \in \text{Mat}_{n \times n}(\mathbb{k})$  называется *пучком матриц* и обозначается  $(AB)$ . Таким образом, всякая матрица из пучка  $(AB)$  имеет вид  $t_0 A + t_1 B$ , где  $t_0, t_1 \in \mathbb{k}$ , а её определитель  $\det(t_0 A + t_1 B)$  является однородным многочленом степени  $n$  от  $t_0, t_1$ . Покажем, что коэффициент этого многочлена при  $t_0^k t_1^{n-k}$  равен

$$\sum_{IJ} a_{IJ} \hat{b}_{IJ}, \quad (9-15)$$

где суммирование идёт по всем  $k$ -элементным подмножествам  $I, J \subset \{1, 2, \dots, n\}$ .

Для этого обозначим через  $a_1, a_2, \dots, a_n$  и  $b_1, b_2, \dots, b_n$  столбцы матриц  $A$  и  $B$ , понимаемые как векторы координатного пространства  $\mathbb{k}^n$  со стандартным базисом  $e_1, \dots, e_n$ . Тогда

$$(t_0 a_1 + t_1 b_1) \wedge (t_0 a_2 + t_1 b_2) \wedge \dots \wedge (t_0 a_n + t_1 b_n) = \det(t_0 A + t_1 B) e_1 \wedge e_2 \wedge \dots \wedge e_n.$$

Моном  $t_0^k t_1^{n-k}$  возникает в левой части при выборе первого слагаемого в каких-нибудь  $k$  из перемножаемых скобок и второго слагаемого в остальных  $n - k$  скобках. Если обозначить номера этих  $k$  скобок через  $I = (i_1, i_2, \dots, i_k)$  то вклад в коэффициент при  $t_0^k t_1^{n-k}$  будет равен

$$\begin{aligned} (-1)^{\frac{k(k+1)}{2} + |I|} a_I \wedge b_{\hat{I}} &= (-1)^{\frac{k(k+1)}{2} + |I|} \left( \sum_J e_J a_{J\hat{I}} \right) \wedge \left( \sum_K e_K b_{K\hat{I}} \right) = \\ &= (-1)^{\frac{k(k+1)}{2} + |I|} \sum_{JK} e_J \wedge e_K \cdot a_{J\hat{I}} b_{K\hat{I}} = e_1 \wedge e_2 \wedge \dots \wedge e_n \cdot \sum_J (-1)^{|I| + |J|} a_{J\hat{I}} b_{\hat{I}J} \end{aligned}$$

Полный коэффициент при  $t_0^k t_1^{n-k}$  в  $\det(t_0 A + t_1 B)$  получается суммированием таких подобных слагаемых по всем наборам  $I$  из  $k$  возрастающих номеров, что и даёт формулу (9-15). В обозначениях из (9-12) её можно переписать в виде

$$\det(t_0 A + t_1 B) = \sum_{k=0}^n \operatorname{tr} (\Lambda^k A \cdot \Lambda^{n-k} \hat{B}^t) t_0^k t_1^{n-k}, \quad (9-16)$$

## §10. Линейные операторы

**10.1. Пространство с оператором.** Пусть  $\mathbb{k}$  — произвольное поле,  $V$  — конечномерное векторное пространство над  $\mathbb{k}$ , а  $F : V \rightarrow V$  — линейный эндоморфизм пространства  $V$ . Мы будем называть пару  $(F, V)$  *пространством с оператором* или просто *линейным оператором* над  $\mathbb{k}$ . Линейное отображение  $C : U_1 \rightarrow U_2$  между пространствами с операторами  $(F_1, U_1)$  и  $(F_2, U_2)$  называется *гомоморфизмом*, если  $F_2 \circ C = C \circ F_1$ , т. е. диаграмма линейных отображений

$$\begin{array}{ccc} U_1 & \xrightarrow{C} & U_2 \\ F_1 \uparrow & & \uparrow F_2 \\ U_1 & \xrightarrow{C} & U_2 \end{array}$$

коммутативна<sup>1</sup>. Если при этом отображение  $C$  биективно, операторы  $F_1$  и  $F_2$  называются *изоморфными* или *подобными*. Таким образом, подобие операторов  $F_1$  и  $F_2$  означает равенство

$$F_2 = CF_1C^{-1}$$

для некоторого обратимого линейного отображения  $C$ . В этой ситуации также говорят, что  $F_2$  получается из  $F_1$  *сопряжением* посредством  $C$ .

Подпространство  $U \subset V$  называется *F-инвариантным*, если  $F(U) \subset U$ . В этой ситуации пара  $(F|_U, U)$  тоже является пространством с оператором и вложение  $U \hookrightarrow V$  является гомоморфизмом пространств с операторами. Оператор, не имеющий инвариантных подпространств, отличных от нуля и всего пространства, называется *неприводимым* или *простым*.

**Упражнение 10.1.** Покажите, что оператор умножения на класс  $[t]$  в фактор кольце  $\mathbb{R}[t]/(t^2 + 1)$  неприводим.

Оператор  $F : V \rightarrow V$  называется *разложимым*, если пространство  $V$  можно разложить в прямую сумму двух ненулевых  $F$ -инвариантных подпространств, и *неразложимым* — в противном случае. Если оператор неприводим, то он и неразложим. Обратное неверно, как показывает следующий пример.

**Упражнение 10.2.** Покажите, что оператор умножения на класс  $[t]$  в фактор кольце  $\mathbb{k}[t]/(t^n)$  при всех  $n > 1$  приводим, но неразложим.

Таким образом, над любым полем  $\mathbb{k}$  имеются неразложимые пространства с оператором любой размерности, и они могут быть приводимы. Каждое конечномерное разложимое пространство с оператором является прямой суммой неразложимых инвариантных подпространств.

**Упражнение 10.3.** Покажите, что двойственные операторы<sup>2</sup>  $F : V \rightarrow V, F^* : V^* \rightarrow V^*$  либо оба разложимы, либо оба неразложимы.

**Замечание 10.1.** (классификация пространств с оператором) Над произвольным полем  $\mathbb{k}$  каждое конечномерное неразложимое пространство с оператором изоморфно оператору умножения на класс  $[t]$  в кольце вычетов  $\mathbb{k}[t]/(p^m)$ , где  $p \in \mathbb{k}[t]$  — неприводимый многочлен, а  $m \in \mathbb{N}$ , и все такие пространства не изоморфны друг другу при разных  $p$  или  $m$ . Пространство  $\mathbb{k}[t]/(p^m)$

<sup>1</sup>Диаграмма отображений между множествами называется *коммутативной*, если композиции отображений вдоль любых двух путей с общим началом и концом одинаковы.

<sup>2</sup>См. п. 7.3 на стр. 92.



неприводимо если и только если  $m = 1$ . Произвольное пространство с оператором изоморфно оператору умножения на класс  $[t]$  в прямой сумме фактор колец вида<sup>1</sup>  $\mathbb{k}[t]/(p^m)$ , и такое представление пространства с оператором единственно с точностью до перестановки слагаемых. Доказательства всех этих фактов обычно даются в курсе алгебры<sup>2</sup>. Мы не собираемся использовать данную классификацию в полной общности, и все те её следствия, которые понадобятся в настоящем курсе, будут отдельно доказаны ниже.

**10.1.1. Характеристический многочлен.** Пусть оператор  $F : V \rightarrow V$  имеет матрицу  $F_v$  в каком-либо базисе  $v$  пространства  $V$ . Её характеристический многочлен  $\det(tE - F_v)$  называется *характеристическим многочленом* оператора  $F$  и обозначается  $\chi_F(t)$ . Он не зависит от выбора базиса, в котором пишется матрица оператора, поскольку в любом другом базисе  $w = v C_{vw}$  матрица<sup>3</sup>  $F_w = C_{wv} F_v C_{vw} = C_{vw}^{-1} F_v C_{vw}$  имеет

$$\begin{aligned} \det(tE - F_w) &= \det(tC_{vw}^{-1} E C_{vw} - C_{vw}^{-1} F_v C_{vw}) = \det(C_{vw}^{-1} (tE - F_v) C_{vw}) = \\ &= \det C_{vw}^{-1} \cdot \det(tE - F_v) \cdot \det C_{vw} = \det(tE - F_v). \end{aligned}$$

Это же вычисление показывает, что подобные операторы имеют равные характеристические многочлены.

**УПРАЖНЕНИЕ 10.4.** Для любого многочлена  $f \in \mathbb{k}[t]$  со старшим коэффициентом 1 покажите, что характеристический многочлен оператора умножения на класс  $[t]$  в фактор кольце  $\mathbb{k}[t]/(f)$  равен  $f$ .

**ПРИМЕР 10.1 (ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКИЙ МНОГОЧЛЕН РАЗЛОЖИМОГО ОПЕРАТОРА)**

Пусть пространство с оператором  $(F, V)$  является прямой суммой пространств с операторами  $(G, U)$  и  $(H, W)$ . Тогда  $\chi_F(t) = \chi_G(t) \cdot \chi_H(t)$ , поскольку в любом согласованном с разложением  $V = U \oplus W$  базисе матрица оператора  $tE - F$  имеет блочный вид  $\begin{pmatrix} tE - G & 0 \\ 0 & tE - H \end{pmatrix}$  и заявленный результат вытекает из [упр. 9.4](#) на стр. 118.

**10.1.2. Аннулирующие многочлены.** Линейный оператор  $F : V \rightarrow V$ , действующий в векторном пространстве  $V$  над произвольным полем  $\mathbb{k}$ , можно подставить вместо переменной  $t$  в любой многочлен  $f(t) = a_0 + a_1 t + \dots + a_m t^m \in \mathbb{k}[t]$ . Результатом такой подстановки является линейный оператор  $f(F) \stackrel{\text{def}}{=} a_0 \text{Id}_V + a_1 F + \dots + a_m F^m \in \text{End}(V)$ . Подстановка фиксированного оператора  $F \in \text{End } V$  во всевозможные многочлены задаёт гомоморфизм  $\mathbb{k}$ -алгебр

$$\text{ev}_F : \mathbb{k}[t] \rightarrow \text{End}(V), \quad f \mapsto f(F),$$

который называется *гомоморфизмом вычисления* многочленов на операторе  $F$ . Многочлены, лежащие в ядре этого гомоморфизма, т. е. такие  $f \in \mathbb{k}[t]$ , что  $f(F) = 0$ , называются *аннулирующими* оператор  $F$ . Если  $\dim V < \infty$ , алгебра  $\text{End } V$  конечномерна как векторное пространство

<sup>1</sup>В сумме допускаются повторяющиеся слагаемые.

<sup>2</sup>См. например лекции <http://gorod.bogomolov-lab.ru/ps/stud/algebra-1/1314/lec-10.pdf> и <http://gorod.bogomolov-lab.ru/ps/stud/algebra-1/1314/lec-11.pdf> курса <http://gorod.bogomolov-lab.ru/ps/stud/algebra-1/1314/list.html>.

<sup>3</sup>См. формулу (5-10) на стр. 68.

над  $\mathbb{k}$ , а алгебра  $\mathbb{k}[t]$  бесконечномерна. Поэтому  $\ker \text{ev}_F \neq 0$ , т. е. любой оператор на конечномерном пространстве аннулируется некоторым ненулевым многочленом. В силу тождества Гамильтона – Кэли<sup>1</sup> примером такого многочлена является характеристический многочлен  $\chi_F(t)$ . Поскольку все идеалы<sup>2</sup> кольца  $\mathbb{k}[t]$  главные<sup>3</sup>, идеал  $\ker \text{ev}_F = (\mu_F)$  состоит из всех многочленов, делящихся на некоторый многочлен  $\mu_F$ , который однозначно задаётся как ненулевой многочлен минимальной степени со старшим коэффициентом 1, такой что  $\mu_F(F) = 0$  в  $\text{End}(V)$ .

УПРАЖНЕНИЕ 10.5 (ПО АЛГЕБРЕ). Убедитесь в этом.

Многочлен  $\mu_F(t)$  называется *минимальным многочленом* оператора  $F$ .

ТЕОРЕМА 10.1 (ТЕОРЕМА О РАЗЛОЖЕНИИ)

Пусть линейный оператор  $F : V \rightarrow V$  на произвольном<sup>4</sup> векторном пространстве  $V$  над любым полем  $\mathbb{k}$  аннулируется многочленом  $q \in \mathbb{k}[t]$ , который раскладывается в  $\mathbb{k}[t]$  в произведение  $q = q_1 \cdot q_2 \cdot \dots \cdot q_r$  попарно взаимно простых многочленов  $q_i \in \mathbb{k}[t]$ . Положим  $Q_j = q/q_j$ . Тогда  $\ker q_j(F) = \text{im } Q_j(F)$  для каждого  $j$ , все эти подпространства  $F$ -инвариантны, и пространство  $V$  является прямой суммой тех из них, что отличны от нуля.

Доказательство. Так как  $q(F) = q_i(F) \circ Q_j(F) = 0$ , имеем включение  $\text{im } Q_j(F) \subset \ker q_i(F)$ . Поэтому достаточно показать, что  $V$  линейно порождается образами операторов  $Q_i(F)$ , а сумма ядер  $\ker q_i(F)$  прямая<sup>5</sup>, т. е.  $\ker q_i(F) \cap \sum_{j \neq i} \ker q_j(F) = 0$  для всех  $i$ . Первое вытекает из того, что  $\text{НОД}(Q_1, \dots, Q_r) = 1$ , а значит, существуют такие  $h_1, \dots, h_r \in \mathbb{k}[t]$ , что  $1 = \sum Q_j(t)h_j(t)$ . Подставляя в это равенство  $t = F$  и применяя обе части к произвольному вектору  $v \in V$ , получаем разложение  $v = Ev = \sum Q_j(F)h_j(F)v \in \sum \text{im } Q_j(F)$ . Второе вытекает из взаимной простоты  $q_i$  и  $Q_i$ , в силу которой существуют такие  $g, h \in \mathbb{k}[t]$ , что  $1 = g(t) \cdot q_i(t) + h(t) \cdot Q_i(t)$ . Подставим сюда  $t = F$  и применим обе части полученного равенства  $E = g(F)q_i(F) + h(F) \circ Q_i(F)$  к произвольному вектору  $v \in \ker q_i(F) \cap \sum_{j \neq i} \ker q_j$ . Так как  $\ker q_j(F) \subset \ker Q_i(F)$  при всех  $j \neq i$ , получим  $v = Ev = g(F)q_i(F)v + h(F)Q_i(F)v = 0$ , что и требовалось.  $\square$

ПРИМЕР 10.2 (ПРОЕКТОРЫ)

Линейный оператор  $\pi : V \rightarrow V$  называется *идемпотентом* или *проектором*, если он аннулируется многочленом  $t^2 - t = t(t - 1)$ , т. е. удовлетворяет соотношению  $\pi^2 = \pi$ . По теор. 10.1 образ любого идемпотента  $\pi : V \rightarrow V$  совпадает с подпространством его неподвижных векторов:  $\text{im } \pi = \ker(\pi - \text{Id}_V) = \{v \mid \pi(v) = v\}$ , и всё пространство распадается в прямую сумму  $V = \ker \pi \oplus \text{im } \pi$ . Тем самым, оператор  $\pi$  проектирует  $V$  на  $\text{im } \pi$  вдоль  $\ker \pi$ . Отметим, что оператор  $\text{Id}_V - \pi$  тоже является идемпотентом и проектирует  $V$  на  $\ker \pi$  вдоль  $\text{im } \pi$ . Таким образом, задание прямого разложения  $V = U \oplus W$  равносильно заданию пары идемпотентных эндоморфизмов  $\pi_1 = \pi_1^2$  и  $\pi_2 = \pi_2^2$  пространства  $V$ , связанных соотношениями  $\pi_1 + \pi_2 = 1$  и  $\pi_1\pi_2 = \pi_2\pi_1 = 0$ .

УПРАЖНЕНИЕ 10.6. Выведите из этих соотношений, что  $\ker \pi_1 = \text{im } \pi_2$  и  $\text{im } \pi_1 = \ker \pi_2$ .

<sup>1</sup> См. п° 8.4.2 на стр. 109.

<sup>2</sup> См. начало лекции <http://gorod.bogomolov-lab.ru/ps/stud/algebra-1/1314/lec-05.pdf>.

<sup>3</sup> См. Предложение 5.1 на стр. 74 той же лекции.

<sup>4</sup> Возможно даже бесконечномерном.

<sup>5</sup> См. опр. 4.2 и предл. 4.2 на стр. 55.

Пример 10.3 (инволюции)

Линейный оператор  $\sigma : V \rightarrow V$  называется *инволюцией*, если он аннулируется многочленом  $t^2 - 1$ , т. е. удовлетворяет соотношению  $\sigma^2 = \text{Id}_V$ . Тожественная инволюция  $\sigma = \text{Id}_V$  называется *тривиальной*. Если  $\text{char } \mathbb{k} \neq 2$ , то  $t^2 - 1 = (t + 1)(t - 1) = 0$  является произведением различных линейных множителей. Поэтому над таким полем каждое пространство  $V$  с инволюцией  $\sigma$  распадается в прямую сумму  $V = V_+ \oplus V_-$  собственных подпространств  $V_+ = \ker(\sigma - E)$  и  $V_- = \ker(\sigma + E)$  с собственными значениями  $+1$  и  $-1$  соответственно. Произвольный вектор  $v = v_+ + v_-$  пространства  $V$  имеет в этом разложении компоненты

$$v_+ = \frac{v + \sigma v}{2} \in \text{im}(\sigma + \text{Id}_V) = V_+ \quad \text{и} \quad v_- = \frac{v - \sigma v}{2} \in \text{im}(\sigma - \text{Id}_V) = V_- .$$

**10.2. Собственные подпространства.** Ненулевой вектор  $v \in V$  называется *собственным вектором* линейного оператора  $F : V \rightarrow V$  если  $F(v) = \lambda v$  для некоторого числа  $\lambda \in \mathbb{k}$ . Это число называется *собственным значением* или *собственным числом* оператора  $F$  на собственном векторе  $v$ . Собственные векторы с заданным собственным числом  $\lambda$  образуют вместе с нулевым вектором  $F$ -инвариантное подпространство

$$V_\lambda \stackrel{\text{def}}{=} \{v \in V \mid F(v) = \lambda v\} = \ker(\lambda \text{Id}_V - F), \quad (10-1)$$

которое называется *собственным подпространством* оператора  $F$ . Поскольку  $\ker(\lambda \text{Id}_V - F) \neq 0$  если и только если  $\det(\lambda \text{Id}_V - F) = \chi_F(\lambda) = 0$ , подпространство (10-1) отлично от нуля тогда и только тогда, когда число  $\lambda$  является корнем характеристического многочлена оператора  $F$ . Таким образом, множество собственных чисел оператора  $F$  есть множество корней многочлена  $\chi_F$  в поле  $\mathbb{k}$ . Оно называется *спектром* оператора  $F$  в поле  $\mathbb{k}$  и обозначается  $\text{Spec}(F)$  или  $\text{Spec}_{\mathbb{k}}(F)$ , если важно явно указать поле. Так как  $\deg \chi_F = \dim V$ , количество различных собственных чисел не превышает размерности пространства:

$$|\text{Spec}(F)| \leq \dim V .$$

Над алгебраически замкнутым полем  $\mathbb{k}$  спектр всегда не пуст.

Предложение 10.1

Над алгебраически замкнутым полем  $\mathbb{k}$  каждый линейный оператор обладает хотя бы одним ненулевым собственным подпространством.  $\square$

Предложение 10.2

$\text{Spec } F$  содержится в множестве корней любого многочлена, аннулирующего  $F$ .

*Доказательство.* Ограничение оператора  $F$  на собственное подпространство  $V_\lambda$  является гомотетией с коэффициентом  $\lambda$ . Поэтому для любого многочлена  $g \in \mathbb{k}[t]$  оператор  $g(F)$  действует на  $V_\lambda$  как гомотетия с коэффициентом  $g(\lambda)$ . Если  $g(\lambda) \neq 0$ , то  $g(F)|_{V_\lambda} \neq 0$ .  $\square$

Предложение 10.3

Любой набор собственных векторов с попарно различными собственными числами линейно независим.

*Доказательство.* Пусть собственные векторы  $v_1, v_2, \dots, v_m$  имеют попарно разные собственные числа  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m$  и линейно зависимы. Рассмотрим зависимость, содержащую минимально возможное число векторов, и пусть это будут векторы  $e_1, e_2, \dots, e_k$ . Тогда  $k \geq 2$  и

$$e_k = x_1 e_1 + x_2 e_2 + \dots + x_{k-1} e_{k-1} ,$$

где все  $x_i \in \mathbb{k}$  отличны от нуля. При этом  $\lambda_k e_k = F(e_k) = \sum x_i F(e_i) = \sum x_i \lambda_i e_i$ . Вычитая из этого равенства предыдущее, умноженное на  $\lambda_k$ , получаем более короткую линейную зависимость  $0 = x_1(\lambda_1 - \lambda_k) \cdot e_1 + x_2(\lambda_2 - \lambda_k) \cdot e_2 + \dots + x_{k-1}(\lambda_{k-1} - \lambda_k) \cdot e_{k-1}$  с ненулевыми коэффициентами. Противоречие.  $\square$

Следствие 10.1

Сумма собственных подпространств с разными собственными числами является прямой.  $\square$

Следствие 10.2

$$\sum_{\lambda \in \text{Spec } F} \dim V_\lambda \leq \dim V.$$

УПРАЖНЕНИЕ 10.7. Приведите пример оператора, для которого это неравенство строгое.

**10.2.1. Диагонализуемые операторы.** Оператор  $F : V \rightarrow V$  называется *диагонализуемым*, если в  $V$  имеется базис, в котором  $F$  записывается диагональной матрицей. Такой базис состоит из собственных векторов оператора  $F$ , и элементы диагональной матрицы являются собственными значениями оператора  $F$ , причём каждое число  $\lambda \in \text{Spec } F$  встречается на диагонали ровно столько раз, какова кратность корня  $t = \lambda$  в характеристическом многочлене  $\chi_F(t)$  и какова размерность собственного подпространства  $V_\lambda$ . Таким образом, с точностью до перестановки диагональных элементов диагональная матрица диагонализуемого оператора  $F$  не зависит от выбора базиса, в котором оператор  $F$  имеет диагональную матрицу.

Предложение 10.4

Следующие свойства оператора  $F : V \rightarrow V$  эквивалентны:

- 1)  $F$  диагонализуем
- 2) пространство  $V$  линейно порождается собственными векторами оператора  $F$
- 3) характеристический многочлен  $\chi_F(t)$  полностью раскладывается на линейные множители в  $\mathbb{k}[t]$ , и кратность каждого корня  $\lambda$  многочлена  $\chi_F$  равна размерности собственного подпространства  $V_\lambda$
- 4) оператор  $F$  аннулируется многочленом, который полностью раскладывается в  $\mathbb{k}[t]$  на попарно различные линейные множители.

Доказательство. Эквивалентность свойств (1) и (2), а также импликация (1)  $\Rightarrow$  (3) очевидны. Из (3) вытекает, что  $\sum_{\lambda \in \text{Spec } F} \dim V_\lambda = \deg \chi_F = \dim V$ . Поэтому  $V = \bigoplus_{\lambda \in \text{Spec } F} V_\lambda$  в силу сл. 10.1. Так как каждое собственное подпространство  $V_\lambda$  аннулируется оператором  $(F - \lambda \text{Id}_V)$ , всё пространство  $V$  аннулируется композицией  $\prod_{\lambda \in \text{Spec } F} (F - \lambda \text{Id}_V)$ , т. е. оператор  $F$  аннулируется многочленом  $\prod_{\lambda \in \text{Spec } F} (t - \lambda)$ . Это даёт импликацию (3)  $\Rightarrow$  (4). Импликация (4)  $\Rightarrow$  (1) следует из теоремы разложения<sup>1</sup>: если оператор  $F$  аннулируется произведением  $\prod_{\mu} (t - \mu)$ , в котором  $\mu$  пробегает без повторений некоторое конечное подмножество в  $\mathbb{k}$ , то  $V$  является прямой суммой тех подпространств  $\ker(F - \mu \text{Id})$ , которые отличны от нуля, т. е. собственных подпространств оператора  $F$ .  $\square$

<sup>1</sup>См. теор. 10.1 на стр. 122.

## Следствие 10.3

Если оператор  $F : V \rightarrow V$  диагоналізуем, то его ограничение на любое инвариантное подпространство тоже диагоналізуемо на этом подпространстве.

Доказательство. Это вытекает из свойства (4) предл. 10.4.  $\square$

**10.2.2. Перестановочные операторы.** Если линейные операторы  $F, G : V \rightarrow V$  на векторном пространстве  $V$  над произвольным полем  $\mathbb{k}$  коммутируют друг с другом, то ядро и образ любого многочлена от оператора  $F$  переводятся оператором  $G$  в себя, поскольку

$$\begin{aligned} f(F)v = 0 &\Rightarrow f(F)Gv = Gf(F)v = 0 \\ v = f(F)w &\Rightarrow Gv = Gf(F)w = f(F)Gw. \end{aligned}$$

В частности, все собственные подпространства  $V_\lambda = \ker(F - \lambda E)$  инвариантны относительно любого перестановочного с  $F$  оператора  $G$ .

## Предложение 10.5

В конечномерном векторном пространстве  $V$  над алгебраически замкнутым полем  $\mathbb{k}$  любое множество коммутирующих друг с другом операторов обладает общим для всех операторов собственным вектором. Над произвольным полем  $\mathbb{k}$  любое множество коммутирующих друг с другом диагоналізуемых операторов на  $V$  можно одновременно диагоналізуовать в одном общем для всех операторов базисе.

Доказательство. Индукция по  $\dim V$ . Если все операторы скалярны (что так при  $\dim V = 1$ ), то доказывать нечего — подойдут, соответственно, любой ненулевой вектор и любой базис. Если среди операторов есть хоть один не скалярный оператор  $F$ , то над замкнутым полем у него есть собственное подпространство строго меньшей размерности, чем  $V$ , а в диагоналізуемом случае  $V$  является прямой суммой таких собственных подпространств. Каждое собственное подпространство оператора  $F$  инвариантно для всех операторов, причём если операторы диагоналізуемы на всём пространстве, то их ограничения на собственные подпространства оператора  $F$  останутся диагоналізуемы по сл. 10.3. Применяя к собственным подпространствам оператора  $F$  предположение индукции, получаем требуемое.  $\square$

## Пример 10.4 (конечные группы операторов)

Если  $m$  линейных операторов на конечномерном пространстве  $V$  над алгебраически замкнутым полем  $\mathbb{k}$  характеристики  $\text{char } \mathbb{k} > m$  образуют группу  $G$ , то каждый из этих операторов аннулируется многочленом  $t^m - 1$ , который раскладывается в произведение  $m$  попарно различных линейных множителей<sup>1</sup>. Поэтому каждый оператор в группе  $G$  диагоналізуем. Все операторы из группы  $G$  одновременно диагоналізууются в одном общем базисе если и только если группа  $G$  абелева.

**10.3. Нильпотентные операторы.** Оператор  $F : V \rightarrow V$  называется *нильпотентным*, если он аннулируется многочленом вида  $t^m$ , т. е. если  $F^m = 0$  для некоторого  $m \in \mathbb{N}$ . Поскольку минимальный многочлен оператора  $F$  является делителем  $t^m$  и имеет степень не больше степени

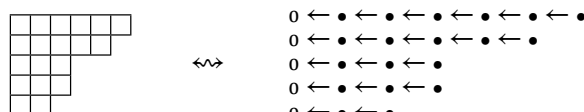
<sup>1</sup>Поскольку производная  $mt^{m-1}$  многочлена  $t^m - 1$  отлична от нуля и взаимно проста с этим многочленом, она не имеет с ним общих корней. Следовательно, у многочлена нет кратных корней.

характеристического многочлена, которая равна  $\dim V$ , в определении нильпотентного оператора можно без ограничения общности считать, что  $m \leq \dim V$ .

УПРАЖНЕНИЕ 10.8. Покажите, что над алгебраически замкнутым полем  $\mathbb{k}$  оператор  $F$  нильпотентен тогда и только тогда, когда  $\text{Spes } F = \{0\}$ .

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 10.1 (ЖОРДАНОВ БАЗИС НИЛЬПОТЕНТНОГО ОПЕРАТОРА)

Базис пространства  $V$  с нильпотентным оператором  $F : V \rightarrow V$  называется *циклическим* (или *жордановым*), если его векторы можно расставить в клетки некоторой диаграммы Юнга  $\nu$  так, чтобы  $F$  аннулировал все векторы самого левого столбца и переводил каждый из оставшихся векторов в соседний слева:



$$(10-2)$$

Диаграмма (10-2) называется *цикловым типом* жорданова базиса. Цепочки базисных векторов, расположенные в её строках, называются *жордановыми цепочками*. Таким образом, матрица нильпотентного оператора в жордановом базисе состоит из расположенных вдоль главной диагонали квадратных блоков вида

$$J_m(0) \stackrel{\text{def}}{=} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \text{где } m \in \mathbb{N} \text{ — размер блока,} \quad (10-3)$$

которые биективно соответствуют строкам диаграммы (10-2) и имеют размеры, равные длинам соответствующих строк. Все остальные элементы матрицы нулевые.

ТЕОРЕМА 10.2

Каждый нильпотентный оператор  $F$  на конечномерном векторном пространстве  $V \neq 0$  обладает жордановым базисом. Все жордановы базисы оператора  $F$  имеют одинаковый цикловой тип<sup>1</sup>, причём  $j$ -й слева столбец диаграммы (10-2) состоит из  $\dim \ker F^j - \dim \ker F^{j-1}$  клеток.

Доказательство. Индукция по  $\dim V$ . Если  $F = 0$  (что так при  $\dim V = 1$ ), то любой базис в  $V$  является жордановым, и диаграмма Юнга (10-2) представляет собою один столбец высоты  $\dim V$ . Если  $\dim V > 1$  и  $F \neq 0$ , то подпространство  $\ker F \subset V$  отлично и от нуля, и от  $V$ . Поэтому фактор  $W = V/\ker F$  является ненулевым векторным пространством размерности строго меньшей, чем  $V$ . Оператор  $F$  корректно факторизуется до нильпотентного оператора

$$F_W : W \rightarrow W, \quad [v] \mapsto [Fv].$$

УПРАЖНЕНИЕ 10.9. Убедитесь в этом.

По предположению индукции, в пространстве  $V$  существуют векторы  $w_1, \dots, w_m$ , классы которых  $[w_1], \dots, [w_m]$  по модулю  $\ker F$  образуют жорданов базис оператора  $F_W$ . Образы этих векторов  $F(w_1), \dots, F(w_m)$  линейно независимы в  $V$ , поскольку равенство

$$0 = \lambda_1 F(w_1) + \cdots + \lambda_m F(w_m) = F(\lambda_1 w_1 + \cdots + \lambda_m w_m)$$

<sup>1</sup>Он называется *цикловым типом* оператора  $F$  и обозначается  $\nu(F)$ .

означает, что  $\lambda_1 w_1 + \dots + \lambda_m w_m \in \ker F$ , т. е.  $\lambda_1 [w_1] + \dots + \lambda_m [w_m] = [0]$  в  $W = V/\ker F$ , что возможно лишь если все  $\lambda_i = 0$ . Пусть классы  $[w_1], \dots, [w_s]$  составляют первый столбец диаграммы (10-2) для оператора  $F_W$ . Дополняя линейно независимые векторы  $F(w_1), \dots, F(w_s) \in \ker F$  до базиса в  $\ker F$  какими-нибудь векторами  $u_1, \dots, u_r \in \ker F$ , получаем жорданов базис оператора  $F : V \rightarrow V$ , состоящий из векторов  $u_1, \dots, u_r, F(w_1), \dots, F(w_s), w_1, \dots, w_m$ .

УПРАЖНЕНИЕ 10.10. Убедитесь, что эти векторы действительно образуют базис пространства  $V$ . Последнее утверждение теоремы вытекает из того, что жордановы базисные векторы, стоящие в первых  $j$  столбцах диаграммы (10-2) для оператора  $F$ , составляют базис в  $\ker F^j$ .  $\square$

**10.4. Корневое разложение и функции от операторов.** Для заданных числа  $\lambda \in \mathbb{k}$  и линейного оператора  $F : V \rightarrow V$  множество

$$K_\lambda \stackrel{\text{def}}{=} \{v \in V \mid \exists m \in \mathbb{N} : (\lambda \text{Id} - F)^m v = 0\} = \bigcup_{m \geq 1} \ker(\lambda \text{Id} - F)^m \quad (10-4)$$

называется *корневым подпространством* оператора  $F$ .

УПРАЖНЕНИЕ 10.11. Убедитесь, что  $K_\lambda \subset V$  действительно является векторным подпространством и отлично от нуля если и только если  $\lambda \in \text{Spec } F$ .

Для каждого  $\lambda \in \text{Spec } F$  имеется включение  $V_\lambda \subseteq K_\lambda$ , которое может быть как строгим, так и равенством. Из тождества Гамильтона – Кэли<sup>1</sup> и теоремы разложения<sup>2</sup> вытекает

СЛЕДСТВИЕ 10.4 (ТЕОРЕМА О КОРНЕВОМ РАЗЛОЖЕНИИ)

Пусть характеристический многочлен  $\chi_F(t)$  линейного оператора  $F : V \rightarrow V$  на конечномерном векторном пространстве  $V$  над полем  $\mathbb{k}$  полностью разлагается в  $\mathbb{k}[t]$  на линейные множители:  $\chi_F(t) = \prod_{\lambda \in \text{Spec } F} (t - \lambda)^{m_\lambda}$ . Тогда  $V = \bigoplus_{\lambda \in \text{Spec } F} K_\lambda$ , причём  $K_\lambda = \ker(\lambda \text{Id} - F)^{m_\lambda}$  для всех  $\lambda \in \text{Spec } F$ .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Разложение  $\chi_F(t) = \prod_{\lambda \in \text{Spec } F} (t - \lambda)^{m_\lambda}$  удовлетворяет условиям теор. 10.1 на стр. 122 для  $q_i = (t - \lambda)^{m_\lambda}$ , откуда  $V = \bigoplus_{\lambda \in \text{Spec } F} \ker(\lambda \text{Id} - F)^{m_\lambda}$ .  $\square$

**10.4.1. Функции от операторов.** Пусть линейный оператор  $F$  действует на конечномерном векторном пространстве  $V$  над полем  $\mathbb{R}$  или  $\mathbb{C}$ , которое мы обозначим через  $\mathbb{K}$ . Всюду далее мы предполагаем, что  $F$  аннулируется многочленом  $\alpha(t) \in \mathbb{K}[t]$ , который полностью разлагается над  $\mathbb{K}$  на линейные множители, т. е.

$$\alpha(t) = (t - \lambda_1)^{m_1} (t - \lambda_2)^{m_2} \dots (t - \lambda_s)^{m_s}, \quad (10-5)$$

где  $\lambda_i \neq \lambda_j$  при  $i \neq j$  и все  $m_i \in \mathbb{N}$ . Мы полагаем  $m = \deg \alpha = m_1 + \dots + m_s$ . Алгебра  $\mathcal{A}$ , состоящая из функций  $U \rightarrow \mathbb{K}$ , заданных на каком-нибудь подмножестве  $U \subset \mathbb{K}$ , содержащем все корни многочлена (10-5), называется *алгебраически вычислимой* на операторе  $F$ , если  $\mathbb{K}[t] \subset \mathcal{A}$  и для каждого корня  $\lambda$  кратности  $k$  многочлена (10-5) все функции  $f \in \mathcal{A}$  определены в точке  $\lambda \in \mathbb{K}$  вместе с первыми  $k - 1$  производными  $f^{(v)} = \frac{d^v f}{dt^v}$  и допускают разложение вида

$$f(t) = f(\lambda) + \frac{f'(\lambda)}{1!} (t - \lambda) + \dots + \frac{f^{(k-1)}(\lambda)}{(k-1)!} (t - \lambda)^{k-1} + g_\lambda(t) \cdot (t - \lambda)^k, \quad (10-6)$$

<sup>1</sup>См. н° 8.4.2 на стр. 109.

<sup>2</sup>См. теор. 10.1 на стр. 122.

где функция  $g_\lambda(t)$  тоже лежит в алгебре  $\mathcal{A}$ .

Если характеристический многочлен  $\chi_F(t)$  полностью разлагается в  $\mathbb{K}[t]$  на линейные множители, можно положить  $\alpha(t) = \chi_F(t)$ . Алгебра  $\mathcal{A}$  всех функций, определённых в  $\varepsilon$ -окрестности каждого собственного числа  $\lambda \in \text{Spec } F$  и представимых в ней суммой абсолютно сходящегося степенного ряда от  $(t - \lambda)$ , алгебраически вычислима на операторе  $F$ . Подалгебра в  $\mathcal{A}$ , состоящая из всех аналитических функций<sup>1</sup>  $\mathbb{K} \rightarrow \mathbb{K}$ , алгебраически вычислима на всех линейных операторах  $F \in \text{End}(V)$ , характеристические многочлены которых полностью разлагаются на линейные множители в  $\mathbb{K}[t]$ .

#### ТЕОРЕМА 10.3

В сделанных выше предположениях каждая алгебраически вычислимая на операторе  $F : V \rightarrow V$  алгебра функций  $\mathcal{A}$  допускает единственный такой гомоморфизм  $\mathbb{K}$ -алгебр  $\text{ev}_F : \mathcal{A} \rightarrow \text{End } V$ , что  $\text{ev}_F(p) = p(F)$  для всех многочленов  $p \in \mathbb{K}[t] \subset \mathcal{A}$ .

#### ОПРЕДЕЛЕНИЕ 10.2 (ГОМОМОРФИЗМ ВЫЧИСЛЕНИЯ)

Гомоморфизм  $\text{ev}_F : \mathcal{A} \rightarrow \text{End } V$  из [теор. 10.3](#) называется *вычислением* функций  $f \in \mathcal{A}$  на операторе  $F$ . Линейный оператор  $\text{ev}_F(f) : V \rightarrow V$ , в который переходит функция  $f \in \mathcal{A}$  при гомоморфизме вычисления, обозначается  $f(F)$  и называется *функцией  $f$  от оператора  $F$* .

**ЗАМЕЧАНИЕ 10.2.** (КАК ОТНОСИТЬСЯ К ФУНКЦИЯМ ОТ ОПЕРАТОРОВ) Из [теор. 10.3](#) вытекает, что для любого оператора  $F \in \text{End}(V)$ , характеристический многочлен которого полностью разлагается на линейные множители в  $\mathbb{K}[t]$ , определены такие аналитические функции, как  $e^F$  или  $\sin F$ , а если  $F \in \text{GL}(V)$ , то и такие аналитические вне нуля функции, как  $\ln F$  или  $\sqrt{F}$ , причём алгебраические свойства соответствующих операторов  $f(F)$  в алгебре  $\text{End } V$  будут точно такими же, как у числовых функций  $e^t$ ,  $\sin t$ ,  $\ln t$  и  $\sqrt{t}$ . В частности, все эти функции от оператора  $F$  коммутируют друг с другом и с  $F$ , а также удовлетворяют соотношениям вроде  $\ln F^2 = 2 \ln F$  и  $\sqrt{F} \sqrt{F} = F$ . Таким образом, функции от операторов можно использовать для отыскания операторов с предписанными свойствами, например, для извлечения корней из невырожденных операторов.

**Доказательство [теор. 10.3](#).** Пусть оператор  $F$  аннулируется многочленом  $\alpha(t) = \prod_\lambda (t - \lambda)^{m_\lambda}$ , где  $\lambda = \lambda_1, \dots, \lambda_r$  пробегает все различные корни этого многочлена, и пусть искомым гомоморфизм  $\text{ev}_F : \mathcal{A} \rightarrow \mathbb{K}$  существует. По теореме о разложении<sup>2</sup> пространство  $V$  является прямой суммой  $F$ -инвариантных подпространств  $K_\lambda = \ker(F - \lambda \text{Id})^{m_\lambda}$ , и согласно формуле (10-6) оператор

$$f(F) = f(\lambda) \cdot E + f'(\lambda) \cdot (F - \lambda E) + \dots + \frac{f^{(m_\lambda-1)}(\lambda)}{(m_\lambda - 1)!} (F - \lambda E)^{m_\lambda-1} + g_\lambda(F) (F - \lambda E)^{m_\lambda} \quad (10-7)$$

действует на каждом подпространстве  $K_\lambda$  точно так же, как результат подстановки оператора  $F$  в многочлен

$$j_\lambda^{m_\lambda-1} f(t) \stackrel{\text{def}}{=} f(\lambda) + f'(\lambda) \cdot (t - \lambda) + \dots + f^{(m_\lambda-1)}(\lambda) \cdot (t - \lambda)^{m_\lambda-1} / (m_\lambda - 1)!,$$

класс которого в фактор кольце  $\mathbb{K}[t] / ((t - \lambda)^{m_\lambda})$  называется  $(m_\lambda - 1)$ -*струёй* функции  $f \in \mathcal{A}$  в точке  $\lambda \in \mathbb{K}$ . По китайской теореме об остатках существует единственный такой многочлен

<sup>1</sup>Т. е. функций, задаваемых сходящимися всюду в  $\mathbb{K}$  степенными рядами.

<sup>2</sup>См. [теор. 10.1](#) на стр. 122.



$p_{f(F)}(t) \in \mathbb{K}[t]$  степени меньшей  $\deg \alpha(t)$ , что

$$p_{f(F)}(t) \equiv j_\lambda^{m_\lambda-1} f(t) \pmod{\alpha(t)}$$

для всех корней  $\lambda$  многочлена  $\alpha$ . Поскольку операторы  $p_{f(F)}(F)$  и  $f(F)$  одинаково действуют на каждом подпространстве  $K_\lambda$ , мы имеем равенство  $f(F) = p_{f(F)}(F)$ . Таким образом гомоморфизм вычисления единствен. Остаётся убедиться, что отображение  $f \mapsto p_{f(F)}(F)$  действительно является гомоморфизмом  $\mathbb{K}$ -алгебр. Проверим сначала, что отображение

$$J: \mathcal{A} \rightarrow \frac{\mathbb{K}[t]}{(t-\lambda_1)^{m_1}} \times \cdots \times \frac{\mathbb{K}[t]}{(t-\lambda_r)^{m_r}} \simeq \frac{\mathbb{K}[t]}{(\alpha)} \quad (10-8)$$

$$f \mapsto \left( j_{\lambda_1}^{m_1-1} f, \dots, j_{\lambda_s}^{m_s-1} f \right),$$

сопоставляющее функции  $f \in \mathcal{A}$  набор её струй<sup>1</sup> во всех корнях многочлена  $\alpha$ , является гомоморфизмом  $\mathbb{K}$ -алгебр, т. е.  $\mathbb{K}$ -линейно и удовлетворяет равенству  $J(fg) = J(f)J(g)$ . Первое очевидно, второе достаточно установить для каждой струи  $j_\lambda^{m_\lambda-1}$  отдельно. Используя правило Лейбница:  $(fg)^{(k)} = \sum_{v=0}^k \binom{k}{v} f^{(v)} g^{(k-v)}$ , получаем следующие равенства по модулю  $(t-\lambda)^m$ :

$$j_\lambda^{m-1}(fg) = \sum_{k=0}^{m-1} \frac{(t-\lambda)^k}{k!} \sum_{v+\mu=k} \frac{k!}{v! \mu!} f^{(v)}(\lambda) g^{(\mu)}(\lambda) =$$

$$= \sum_{k=0}^{m-1} \sum_{v+\mu=k} \frac{f^{(v)}(\lambda)}{v!} (t-\lambda)^v \cdot \frac{g^{(\mu)}(\lambda)}{\mu!} (t-\lambda)^\mu \equiv j_\lambda^{m-1}(f) j_\lambda^{m-1}(g).$$

Отображение  $f \mapsto P_{f(F)}(F)$  является композицией гомоморфизма (10-8) с гомоморфизмом вычисления многочленов  $ev_F: \mathbb{K}[t] \rightarrow \text{End } V$ ,  $p \mapsto p(F)$ , который корректно пропускается через фактор  $\mathbb{K}[t]/(\alpha)$ , так как  $\alpha(F) = 0$ .  $\square$

#### ОПРЕДЕЛЕНИЕ 10.3 (ИНТЕРПОЛЯЦИОННЫЙ МНОГОЧЛЕН)

Многочлен  $p_{f(F)}(t) \in \mathbb{K}[t]$ , принимающий на операторе  $F$  то же самое значение, что и функция  $f \in \mathcal{A}$ , называется *интерполяционным многочленом* для вычисления  $f(F)$ . Он однозначно определяется тем, что в каждом корне  $\lambda$  кратности  $m$  аннулирующего оператора  $f$  многочлена  $\alpha$  многочлен  $p_{f(F)}(t)$  и первые его  $m-1$  производные принимают те же значения, что и функция  $f$  и её  $m-1$  производные, т. е. многочлен  $p_{f(F)}(t)$  решает интерполяционную задачу с кратными узлами из прим. 4.7 на стр. 58. Если  $\deg \alpha = n$ , отыскание коэффициентов интерполяционного многочлена  $p_{f(F)}$  сводится к решению системы из  $n$  линейных уравнений на  $n$  неизвестных.

#### ПРИМЕР 10.5 (СТЕПЕННАЯ ФУНКЦИЯ И РЕКУРРЕНТНЫЕ УРАВНЕНИЯ)

Задача отыскания  $n$ -го члена  $a_n$  числовой последовательности  $z: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{K}$ ,  $n \mapsto z_n$ , решающей рекуррентное уравнение  $z_n = \alpha_1 z_{n-1} + \alpha_2 z_{n-2} + \cdots + \alpha_m z_{n-m}$  с начальным условием  $(z_0, \dots, z_{n-1}) = (a_0, \dots, a_{n-1}) \in \mathbb{K}^n$ , сводится вычислению  $n$ -той степени *матрицы сдвига*

$$S = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & \alpha_m \\ 1 & 0 & \ddots & \vdots & \alpha_{m-1} \\ 0 & 1 & \ddots & 0 & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & \alpha_2 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & \alpha_1 \end{pmatrix}$$

<sup>1</sup>Мы рассматриваем этот набор как элемент прямого произведения соответствующих колец вычетов, которое по китайской теореме об остатках изоморфно фактору кольца  $\mathbb{K}[t]/(\alpha)$ .

смещающей каждый фрагмент из  $m$  последовательных элементов на один шаг вправо:

$$(z_{k+1}, z_{k+2}, \dots, z_{k+m}) \cdot S = (z_{k+2}, z_{k+3}, \dots, z_{k+m+1}),$$

так что член  $a_n$  оказывается равным первой координате вектора

$$(a_n, a_{n+1}, \dots, a_{n+m-1}) = (a_0, a_1, \dots, a_{m-1}) \cdot S^n.$$

Матрица  $S^n = p_{S^n}(S)$  является результатом подстановки матрицы  $S$  в интерполяционный многочлен  $p_{S^n}(t) \in \mathbb{K}[t]$  для вычисления на матрице  $S$  *степенной функции*  $f(t) = t^n$ . Обратите внимание, что  $\deg p_{S^n} < m$ , и коэффициенты многочлена  $p_{S^n}$  находятся решением системы из  $m$  линейных уравнений на  $m$  неизвестных.

Например, для уравнения Фибоначчи  $a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$  матрица сдвига

$$S = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Интерполяционный многочлен для вычисления степенной функции  $t^n$  на этой матрице линеен. Записывая его в виде  $p_{S^n}(t) = at + b$  с неопределёнными коэффициентами  $a$  и  $b$ , получаем

$$S^n = aS + bE = \begin{pmatrix} b & a \\ a & a+b \end{pmatrix}.$$

В частности,  $n$ -тое число Фибоначчи, решающее уравнение Фибоначчи с начальным условием  $(a_0, a_1) = (0, 1)$ , равно первой координате вектора  $(a_n, a_{n+1}) = (0, 1) \cdot S^n = (a, a+b)$ . Матрица  $S$  аннулируется своим характеристическим многочленом

$$\chi_S(t) = t^2 - t \operatorname{tr} S + \det S = t^2 - t - 1 = (t - \lambda_+)(t - \lambda_-)$$

с однократными корнями  $\lambda_{\pm} = (1 \pm \sqrt{5})/2$ . Функция  $t^n$  принимает на них значения  $\lambda_{\pm}^n$ . Коэффициенты  $a$  и  $b$  находятся из системы

$$\begin{cases} a \lambda_+ + b = \lambda_+^n \\ a \lambda_- + b = \lambda_-^n, \end{cases}$$

и первый из них  $a = (\lambda_+^n - \lambda_-^n) / (\lambda_+ - \lambda_-)$ . Тем самым,

$$a_n = a = \frac{\left( (1 + \sqrt{5})/2 \right)^n - \left( (1 - \sqrt{5})/2 \right)^n}{\sqrt{5}}.$$

**10.5. Разложение Жордана.** Всюду в этом разделе речь идёт об операторах на конечномерном векторном пространстве  $V$  над алгебраически замкнутым полем  $\mathbb{k}$ .

**ТЕОРЕМА 10.4 (РАЗЛОЖЕНИЕ ЖОРДАНА)**

Для каждого оператора  $F$  на конечномерном векторном пространстве  $V$  над алгебраически замкнутым полем  $\mathbb{k}$  существует единственная пара таких операторов  $F_d$  и  $F_n$ , что  $F_n$  нильпотентен,  $F_d$  диагонализуем,  $F_d F_n = F_n F_d$  и  $F = F_d + F_n$ . Кроме того, операторы  $F_d$  и  $F_n$  являются многочленами от оператора  $F$  с нулевым свободными членами.

Доказательство. Пусть  $\text{Spec } F = \{\lambda_1, \dots, \lambda_r\}$ . В силу алгебраической замкнутости поля  $\mathbb{k}$ , характеристический многочлен оператора  $F$  полностью разлагается на линейные множители:  $\chi_F(t) = \prod_i (t - \lambda_i)^{m_i}$ , а пространство  $V$  является прямой суммой корневых подпространств:  $V = \bigoplus_i K_i$ , где  $K_i = \ker(F - \lambda_i \text{Id})^{m_i}$ . Так как многочлены  $(t - \lambda_i)^{m_i}$  попарно взаимно просты, по китайской теореме об остатках существуют такие многочлены  $f_1, \dots, f_r \in \mathbb{k}[t]$ , что

$$f_i(t) \equiv \begin{cases} 1 \pmod{(t - \lambda_i)^{m_i}} \\ 0 \pmod{(t - \lambda_j)^{m_j}} \text{ при } j \neq i. \end{cases}$$

Если  $\lambda_i \neq 0$ , то многочлен  $t$  обратим по модулю  $(t - \lambda_i)^{m_i}$ . Поэтому найдётся такой многочлен  $g_i(t)$ , что  $t \cdot g_i(t) \equiv \lambda_i \pmod{(t - \lambda_i)^{m_i}}$ . Если  $\lambda_i = 0$ , то положим  $g_i(t) = 0$ . Тогда при каждом  $i$  многочлен  $p_s(t) \stackrel{\text{def}}{=} t \sum_{j=1}^r g_j(t) f_j(t) \equiv \lambda_i \pmod{(t - \lambda_i)^{m_i}}$  и не имеет свободного члена. Из этих сравнений вытекает, что оператор  $F_d \stackrel{\text{def}}{=} p_s(F)$  действует на каждом корневом подпространстве  $K_i = \ker(F - \lambda_i \text{Id})^{m_i}$  как умножение на  $\lambda_i$  и, стало быть, диагонализуем. Оператор  $F_n \stackrel{\text{def}}{=} F - F_d$  действует на  $K_i$  как  $F - \lambda_i \text{Id}$  и, тем самым, нильпотентен. Будучи многочленами от  $F$ , операторы  $F_d$  и  $F_n$  перестановочны между собою и с  $F$ . Это доказывает существование операторов  $F_d$  и  $F_n$  с требуемыми свойствами, включая последнее утверждение предложения.

Докажем единственность. Пусть есть ещё одно разложение  $F = F'_s + F'_n$ , в котором  $F'_d$  диагонализуем,  $F'_n$  нильпотентен и  $F'_d F'_n = F'_n F'_d$ . Из последнего равенства вытекает, что  $F'_d$  и  $F'_n$  перестановочны с любым многочленом от  $F = F'_s + F'_n$  и, в частности, с построенными выше  $F_d$  и  $F_n$ . Поэтому каждое собственное подпространство  $V_\lambda$  оператора  $F_d$  переводится оператором  $F'_d$  в себя<sup>1</sup>, причём  $F'_d$  диагонализуем<sup>2</sup> на каждом  $V_\lambda$ . Если бы оператор  $F'_d$  имел на  $V_\lambda$  собственный вектор с собственным значением  $\mu \neq \lambda$ , то этот вектор был бы собственным для оператора  $F_n - F'_n = F_d - F'_d$  с собственным значением  $\lambda - \mu \neq 0$ , что невозможно, так как оператор  $F_n - F'_n$  нильпотентен.

Упражнение 10.12. Докажите, что разность двух перестановочных нильпотентных операторов нильпотентна.

Следовательно, оператор  $F'_s$  действует на каждом собственном подпространстве  $V_\lambda$  оператора  $F_d$  как умножение на  $\lambda$ , откуда  $F'_d = F_d$ . Тогда и  $F'_n = F - F'_s = F - F_d = F_n$ .  $\square$

#### ОПРЕДЕЛЕНИЕ 10.4

Операторы  $F_d$  и  $F_n$  из теор. 10.4 называются, соответственно, *диагонализуемой* и *нильпотентной* составляющими оператора  $F$ .

Замечание 10.3. Поскольку операторы  $F_d$  и  $F_n$  являются многочленами от  $F$ , каждое  $F$ -инвариантное подпространство  $U \subset V$  является инвариантным для  $F_d$  и  $F_n$ .

#### СЛЕДСТВИЕ 10.5 (ЖОРДАНОВА НОРМАЛЬНАЯ ФОРМА)

Для каждого оператора  $F$  на конечномерном векторном пространстве  $V$  над алгебраически замкнутым полем  $\mathbb{k}$  существует такой базис, в котором матрица оператора  $F$  состоит из распо-

<sup>1</sup>См. н° 10.2.2 на стр. 125.

<sup>2</sup>См. сл. 10.3 на стр. 125.

женных на главной диагонали квадратных блоков вида<sup>1</sup>

$$J_m(\lambda) \stackrel{\text{def}}{=} \lambda E + J_m(0) = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & & & \\ & \lambda & 1 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & \lambda & 1 \\ & & & & \lambda \end{pmatrix}, \quad (10-9)$$

где  $\lambda \in \text{Spec } F$ , а  $m \in \mathbb{N}$  — размер блока, а все остальные её элементы нулевые. С точностью до перестановки блоков, эта матрица не зависит от выбора базиса с таким свойством, и суммарный размер блоков с заданным  $\lambda \in \text{Spec } F$  на диагонали равен кратности корня  $\lambda$  характеристического многочлена оператора  $F$ . Два оператора подобны если и только если их матрицы указанного вида отличаются друг от друга перестановкой блоков.

Доказательство. Ограничение оператора  $F = F_d + F_n$  на корневое подпространство  $K_\lambda$  имеет вид  $\lambda \text{Id} + F_n|_{K_\lambda}$ . В н° 10.3 на стр. 125 мы видели, в пространстве  $K_\lambda$  имеется жорданов базис, в котором матрица нильпотентного оператора  $F_n|_{K_\lambda} : K_\lambda \rightarrow K_\lambda$  состоит из блоков вида (10-9) с  $\lambda = 0$ , причём набор блоков не зависит от выбора жорданова базиса. Объединяя жордановы базисы корневых подпространств друг с другом, мы получаем требуемый базис в  $V$ . Единственность и последнее утверждение следствия вытекают из того, что в любом базисе, где матрица оператора  $F$  имеет указанный вид, операторы  $F_d$  и  $F_n$  имеют матрицы, получающиеся из матрицы  $F$  обнулением всех, соответственно, наддиагональных и диагональных элементов, а линейная оболочка базисных векторов, задействованных во всех клетках (10-9) с заданным  $\lambda \in \text{Spec } F$ , совпадает с корневым подпространством  $K_\lambda$ , и тем самым, эти векторы образуют жорданов базис ограничения  $F_n|_{K_\lambda}$ .  $\square$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 10.5 (ЖОРДАНОВ БАЗИС)

Базисы пространства  $V$ , удовлетворяющие условиям сл. 10.5, называются *жордановыми*, а матрица оператора  $F$ , о которой идёт речь в сл. 10.5, называется *жордановой нормальной формой* этого оператора.

ПРИМЕР 10.6

Рассмотрим оператор  $F$  умножения на класс  $[t]$  в кольце вычетов  $\mathbb{k}[t]/((t - \lambda)^m)$ . Поскольку  $t = \lambda + (t - \lambda)$ , нильпотентная составляющая  $F_n$  этого оператора представляет собою оператор умножения на класс  $[t - \lambda]$ , а диагонализующая составляющая  $F_d = \lambda \text{Id}$ . Классы

$$[(t - \lambda)^{m-1}], [(t - \lambda)^{m-2}], \dots, [t - \lambda], [1] \in \mathbb{k}[t]/((t - \lambda)^m) \quad (10-10)$$

образуют жорданову цепочку нильпотентного оператора<sup>2</sup>  $F_n$ , и в базисе из этих классов оператор  $F = \lambda \text{Id} + F_n$  записывается матрицей (10-9) размера  $n \times n$ . Из сл. 10.5 вытекает, что над алгебраически замкнутым полем  $\mathbb{k}$  каждый линейный оператор на конечномерном векторном пространстве подобен оператору умножения на класс  $[t]$  в прямой сумме конечного числа фактор колец вида  $\mathbb{k}[t]/((t - \lambda)^m)$ , где слагаемые могут повторяться, и жорданов базис для такого оператора является объединением классов (10-10), приходящих из каждого слагаемого этой прямой суммы. Это частный случай общей классификации пространств с операторами, упомянутой в зам. 10.1. на стр. 120.

<sup>1</sup>Ср. с форм. (10-3) на стр. 126.

<sup>2</sup>См. опр. 10.1 на стр. 126.

## §11. Евклидова геометрия

Всюду в этом параграфе речь идёт про конечномерные евклидовы векторные пространства на поле  $\mathbb{R}$ , см. §3 на стр. 35. Евклидово скалярное произведение<sup>1</sup> векторов  $u$  и  $w$  обозначается через  $(u, w)$  или через  $u \cdot w$ . Напомню, что оно билинейно, симметрично и положительно.

**11.1. Ортонормальные базисы.** Набор векторов  $v_1, \dots, v_k$  в евклидовом пространстве называется *ортонормальным*, если все векторы в нём попарно перпендикулярны, т. е.  $(v_i, v_j) = 0$  при  $i \neq j$ . Ортогональный набор ненулевых векторов автоматически линейно независим, так как скалярно умножая на вектор  $v_i$  равенство

$$\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \dots + \lambda_k v_k = 0,$$

получаем  $\lambda_i(v_i, v_i) = 0$ , откуда все  $\lambda_i = 0$ .

Ортогональный набор векторов  $e_1, \dots, e_k$  называется *ортонормальным*, если все его векторы имеют длину 1, т. е.  $(e_i, e_i) = 1$  при всех  $i$ . Такой набор автоматически образует базис в своей линейной оболочке, и разложение  $v = \sum x_i e_i$  произвольного вектора  $v \in \text{span}(e_1, \dots, e_k)$  по этому базису имеет коэффициенты  $x_i = (e_i, v)$ , а скалярное произведение векторов  $u = \sum x_i e_i$  и  $w = \sum y_i e_i$  равно  $(u, w) = x_1 y_1 + x_2 y_2 + \dots + x_k y_k$ .

УПРАЖНЕНИЕ 11.1. Проверьте оба эти факта.

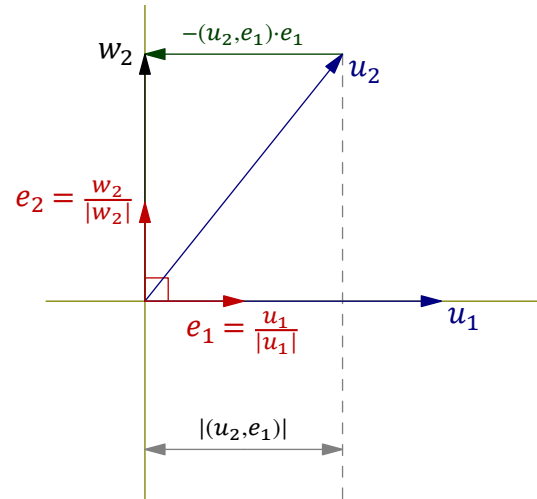


Рис. 11◊1. Второй шаг ортогонализации.

Предложение 11.1

Пусть не все векторы  $u_1, \dots, u_m$  ненулевые. Тогда в их линейной оболочке существует такой ортонормальный базис  $e_1, \dots, e_n$ , что при каждом  $k$  линейная оболочка векторов  $u_1, \dots, u_k$  лежит в линейной оболочке векторов  $e_1, \dots, e_k$ .

**Доказательство.** Выбрасывая из набора нулевые векторы, будем считать, что все  $u_i \neq 0$ . В качестве первого вектора искомого базиса возьмём  $e_1 = u_1 / |u_1|$ . По построению  $|e_1| = 1$  и  $u_1$  лежит в одномерном пространстве, натянутом на  $e_1$ . Допустим по индукции, что для векторов  $u_1, \dots, u_k$  уже построены такие ортонормальные векторы  $e_1, \dots, e_i$ , что  $i \leq k$  и

$$\text{span}(e_1, \dots, e_i) = \text{span}(u_1, \dots, u_k). \quad (11-1)$$

Положим  $w_{i+1} = u_{k+1} - \sum_{v=1}^i (u_{k+1}, e_v) \cdot e_v$ , см. рис. 11◊1. Для каждого из уже построенных векторов  $e_j$  выполняется равенство  $(w_{i+1}, e_j) = (u_{k+1}, e_j) - (u_{k+1}, e_j)(e_j, e_j) = 0$ , т. е. вектор  $w_{i+1}$  ортогонален подпространству (11-1). Если  $w_{i+1} = 0$ , то вектор  $u_{k+1}$  лежит в подпространстве (11-1) и индуктивное предположение выполняется для наборов  $u_1, \dots, u_{k+1}$  и  $e_1, \dots, e_i$ . Если  $w_{i+1} \neq 0$ , полагаем  $e_{i+1} = w_{i+1} / |w_{i+1}|$  и заключаем, что индуктивное предположение выполняется для наборов  $u_1, \dots, u_{k+1}$  и  $e_1, \dots, e_{i+1}$ .  $\square$

<sup>1</sup>См. опр. 3.1 на стр. 35.

## СЛЕДСТВИЕ 11.1

В каждом конечномерном евклидовом пространстве имеется ортонормальный базис.  $\square$

## ОПРЕДЕЛЕНИЕ 11.1

Описанный в доказательстве [предл. 11.1](#) способ построения ортонормального базиса в линейной оболочке заданных векторов называется *ортогонализацией Грама – Шмидта*.

## ПРИМЕР 11.1 (УРАВНЕНИЕ ГИПЕРПЛОСКОСТИ)

Линейное неоднородное уравнение  $a_1x_1 + a_2x_2 + \dots + a_nx_n = d$  на координаты  $x_1, \dots, x_n$  относительно ортонормального базиса  $n$ -мерного евклидова пространства  $V$  можно переписать как уравнение на неизвестный вектор  $x \in V$

$$(a, x) = d, \quad (11-2)$$

в котором вектор  $a \in V$  и число  $d \in \mathbb{R}$  заданы. На геометрическом языке это уравнение гласит, что ортогональная проекция вектора  $x$  на вектор<sup>1</sup>  $a$  равна

$$x_a = a \cdot \frac{(a, x)}{(a, a)} = a \cdot \frac{d}{|a|^2} = \frac{d}{|a|} \cdot \frac{a}{|a|}.$$

Концы векторов  $x$  с таким свойством замечают в аффинном пространстве  $A(V)$  гиперплоскость, перпендикулярную вектору  $a$  и удалённую от нуля на расстояние  $|d|/|a|$  вдоль вектора  $a$ , если  $d > 0$ , и в противоположную сторону, если  $d < 0$  (см. [рис. 11◊2](#)).

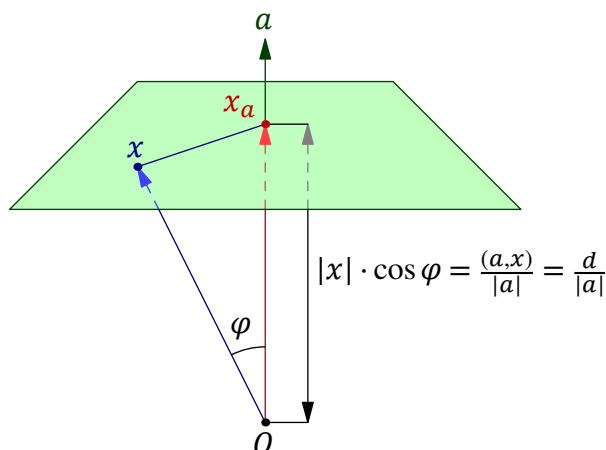


Рис. 11◊2. ГМТ  $x : (a, x) = d$ .

## ПРИМЕР 11.2 (СРЕДИННЫЙ ПЕРПЕНДИКУЛЯР)

Покажем, что в евклидовом аффинном пространстве  $A^n$  ГМТ  $x$ , равноудалённых от двух заданных точек  $p_0 \neq p_1$ , представляет собою гиперплоскость, перпендикулярную вектору  $\overline{p_0p_1}$  и проходящую через середину  $(p_0 + p_1)/2$  отрезка  $[p_0, p_1]$ . Эта гиперплоскость называется *срединным перпендикуляром* к отрезку  $[p_0, p_1]$ . Равенство длин  $|x, p_0| = |x, p_1|$  равносильно равенству скалярных произведений  $(\overline{xp_0}, \overline{xp_0}) = (\overline{xp_1}, \overline{xp_1})$ , т. е. равенству

$$(p_0 - x, p_0 - x) = (p_1 - x, p_1 - x),$$

где буквы  $p_0, p_1, x$  обозначают радиус-векторы соответствующих точек, выпущенные из произвольно выбранной начальной точки  $O \in A^n$ . После раскрытия скобок и сокращений, получаем  $(p_0, p_0) - 2(p_0, x) = (p_1, p_1) - 2(p_1, x)$  или, что то же самое,

$$2(p_1 - p_0, x) = (p_1, p_1) - (p_0, p_0). \quad (11-3)$$

Это уравнение задаёт гиперплоскость, перпендикулярную вектору  $\overline{p_0p_1} = p_1 - p_0$  и проходящую через точку  $(p_0 + p_1)/2$ , ибо последняя, очевидно, равноудалена от  $p_0$  и  $p_1$ .

УПРАЖНЕНИЕ 11.2. Убедитесь прямым вычислением, что  $x = (p_0 + p_1)/2$  удовлетворяет уравнению (23-3).

<sup>1</sup>См. [предл. 3.1](#) и [опр. 3.2](#) на стр. 36.

**11.2. Матрицы Грама.** С любыми двумя наборами векторов евклидова пространства  $V$

$$\mathbf{u} = (u_1, u_2, \dots, u_m) \quad \text{и} \quad \mathbf{w} = (w_1, w_2, \dots, w_k) \quad (11-4)$$

можно связать таблицу их попарных скалярных произведений — матрицу

$$G_{\mathbf{u}\mathbf{w}} \stackrel{\text{def}}{=} ((u_i, w_j)) \in \text{Mat}_{m \times k}(\mathbb{R}), \quad (11-5)$$

в  $i$ -й строке и  $j$ -м столбце которой находится скалярное произведение  $(u_i, w_j)$ . Матрица (11-5) называется *матрицей Грама* наборов векторов (11-4). Если воспринимать эти наборы векторов как матрицы с элементами из  $V$ , а под произведением векторов  $a, b \in V$  понимать их скалярное произведение  $ab \stackrel{\text{def}}{=} (a, b) \in \mathbb{R}$ , то матрица Грама будет описываться равенством

$$G_{\mathbf{u}\mathbf{w}} = \mathbf{u}^t \mathbf{w},$$

где  $\mathbf{w} = (w_1, w_2, \dots, w_k)$  это строка из векторов, а  $\mathbf{u}^t$  — столбец, транспонированный к строке  $\mathbf{u} = (u_1, u_2, \dots, u_m)$ . Если наборы векторов  $\mathbf{u}$  и  $\mathbf{w}$  линейно выражаются через какие-то другие наборы векторов  $\mathbf{e} = (e_1, e_2, \dots, e_r)$  и  $\mathbf{f} = (f_1, f_2, \dots, f_s)$  по формулам  $\mathbf{u} = \mathbf{e} \cdot C_{\mathbf{e}\mathbf{u}}$  и  $\mathbf{w} = \mathbf{f} \cdot C_{\mathbf{f}\mathbf{w}}$ , где  $C_{\mathbf{e}\mathbf{u}} \in \text{Mat}_{r \times m}(\mathbb{R})$  и  $C_{\mathbf{f}\mathbf{w}} \in \text{Mat}_{s \times k}(\mathbb{R})$  некие матрицы, то матрица Грама  $G_{\mathbf{u}\mathbf{w}}$  пересчитывается через матрицу Грама  $G_{\mathbf{e}\mathbf{f}}$  по формуле

$$G_{\mathbf{u}\mathbf{w}} = \mathbf{u}^t \mathbf{w} = (\mathbf{e} C_{\mathbf{e}\mathbf{u}})^t \mathbf{f} C_{\mathbf{f}\mathbf{w}} = C_{\mathbf{e}\mathbf{u}}^t \mathbf{e}^t \mathbf{f} C_{\mathbf{f}\mathbf{w}} = C_{\mathbf{e}\mathbf{u}}^t G_{\mathbf{e}\mathbf{f}} C_{\mathbf{f}\mathbf{w}}. \quad (11-6)$$

При  $\mathbf{w} = \mathbf{u}$  мы получаем таблицу умножения векторов из одного набора  $u_1, \dots, u_m$ . В этом случае обозначение  $G_{\mathbf{u}\mathbf{u}}$  сокращается до  $G_{\mathbf{u}} \stackrel{\text{def}}{=} ((u_i, u_j)) \in \text{Mat}_{m \times m}(\mathbb{R})$ , а правило преобразования (11-7) приобретает вид

$$G_{\mathbf{u}} = C_{\mathbf{e}\mathbf{u}}^t G_{\mathbf{e}} C_{\mathbf{e}\mathbf{u}}. \quad (11-7)$$

Определитель  $\Gamma_{\mathbf{u}} \stackrel{\text{def}}{=} \det G_{\mathbf{u}}$  называется *определителем Грама* набора векторов  $\mathbf{u}$ . Ортонормальность набора векторов  $\mathbf{e} = (e_1, \dots, e_k)$  означает, что его матрица Грама  $G_{\mathbf{e}} = E$ , и в этом случае определитель Грама  $\Gamma_{\mathbf{e}} = \det E = 1$ .

#### Предложение 11.2

Для любого набора векторов  $\mathbf{u} = (u_1, \dots, u_m)$  выполняется неравенство  $\Gamma_{\mathbf{u}} \geq 0$ , которое обращается в равенство если и только если этот набор линейно зависим. Если набор  $\mathbf{u}$  линейно независим, а набор векторов  $\mathbf{e} = (e_1, \dots, e_m)$  составляет ортонормальный базис в линейной оболочке  $\text{span}(u_1, \dots, u_m)$ , то  $\Gamma_{\mathbf{u}} = \det^2 C_{\mathbf{e}\mathbf{u}}$ , где матрица  $C_{\mathbf{e}\mathbf{u}}$  составлена из столбцов координат векторов  $u_j$  в ортонормальном базисе  $\mathbf{e}$ .

*Доказательство.* Если  $\lambda_1 u_1 + \dots + \lambda_m u_m = 0$  для некоторого ненулевого набора констант  $\lambda_i$ , то скалярно умножая это равенство на вектор  $u_\nu$ , мы получаем при каждом  $\nu$  равенство

$$\lambda_1(u_\nu, u_1) + \lambda_2(u_\nu, u_2) + \dots + \lambda_m(u_\nu, u_m) = 0,$$

означающее, что столбцы матрицы Грама  $G_{\mathbf{u}} = ((u_i, u_j))$  линейно зависимы с коэффициентами  $\lambda_1, \dots, \lambda_m$ , откуда  $\Gamma_{\mathbf{u}} = \det G_{\mathbf{u}} = 0$ . Если же векторы  $u_1, \dots, u_m$  линейно независимы, то их линейная оболочка  $m$ -мерна, и по [предл. 11.1](#) на стр. 133 в ней имеется ортонормальный базис  $\mathbf{e} = (e_1, \dots, e_m)$ . Тогда  $G_{\mathbf{u}} = C_{\mathbf{e}\mathbf{u}}^t C_{\mathbf{e}} C_{\mathbf{e}\mathbf{u}} = C_{\mathbf{e}\mathbf{u}}^t C_{\mathbf{e}\mathbf{u}}$  согласно формуле (11-7), и  $\Gamma_{\mathbf{u}} = \det^2 C_{\mathbf{e}\mathbf{u}} > 0$ , т. к. матрица перехода  $C_{\mathbf{e}\mathbf{u}}$  обратима<sup>1</sup> и её определитель ненулевой<sup>2</sup>.  $\square$

<sup>1</sup>См. [предл. 5.1](#) на стр. 67.

<sup>2</sup>См. [сл. 8.4](#) на стр. 105.

**11.2.1. Евклидов объём и ориентация.** Зафиксируем в евклидовом пространстве  $V$  какой-нибудь ортонормальный базис  $e = (e_1, \dots, e_n)$  и рассмотрим форму объёма  $\omega_e$ , принимающую на этом базисе значение 1. Тогда квадрат объёма любого другого базиса  $u = eC_{eu}$  по предл. 11.2 равен определителю Грама этого базиса:

$$\omega_e^2(u) = \det^2 C_{eu} = \Gamma_u. \quad (11-8)$$

В частности, квадрат объёма любого ортонормального базиса  $u$  равен 1. Мы заключаем, что матрица перехода  $C_{eu}$  между любыми двумя ортонормальными базисами  $e$  и  $u$  евклидова пространства  $V$  имеет определитель  $\det C_{eu} = \pm 1$ . Ортонормальные базисы  $e$  и  $u$  называются *одинаково ориентированными*, если  $\det C_{eu} = +1$ , и *противоположно ориентированными*, если  $\det C_{eu} = -1$ . Обратите внимание, что любая нечётная перестановка базисных векторов меняет ориентацию базиса, а любая чётная — не меняет.

Из сказанного вытекает, что все ортонормальные базисы евклидова пространства  $V$  имеют одинаковый по абсолютной величине объём при любом выборе формы объёма на  $V$ , и что на пространстве  $V$  имеются ровно две формы объёма, принимающие на всех ортонормальных базисах значения  $\pm 1$ . Эти две формы объёма отличаются друг от друга знаком, и выбор одной из них в качестве стандартной формы объёма на  $V$  называется *выбором ориентации* евклидова пространства  $V$ . Ориентация координатного пространства  $\mathbb{R}^n$ , принимающая на стандартном базисе значение  $+1$ , называется *стандартной*.

Абсолютная величина объёма параллелепипеда, натянутого на произвольно заданные векторы  $v_1, \dots, v_n$ , вычисленная относительно одной из двух ориентирующих форм, не зависит от выбора ориентации и называется *евклидовым объёмом* неориентированного параллелепипеда. Согласно формуле (11-8), квадрат евклидова объёма равен определителю Грама. Мы будем обозначать евклидов объём через

$$\text{Vol}(v_1, \dots, v_n) = \sqrt{\Gamma_{(v_1, \dots, v_n)}} = \sqrt{\det(v_i, v_j)}. \quad (11-9)$$

**11.3. Евклидова двойственность.** С каждым вектором  $v$  евклидова пространства  $V$  связан линейный функционал  $g_v : V \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $u \mapsto (u, v)$ , скалярного умножения на этот вектор. Сопоставление вектору  $v \in V$  линейного функционала  $g_v$  задаёт линейное отображение

$$G_V : V \rightarrow V^*, \quad v \mapsto g_v, \quad (11-10)$$

которое называется *евклидовой корреляцией*.

УПРАЖНЕНИЕ 11.3. Убедитесь в линейности функционала  $g_v$  и отображения  $G_V$ .

Так как  $G_V(v) = (v, v) \neq 0$  для любого  $v \neq 0$ , ковектор  $g_v \neq 0$  при  $v \neq 0$ . Поэтому отображение (11-10) инъективно, а значит, является изоморфизмом векторных пространств. Таким образом, любой линейный функционал на евклидовом векторном пространстве однозначно представляется в виде скалярного произведения с некоторым вектором.

УПРАЖНЕНИЕ 11.4. Убедитесь, что матрица отображения  $G_V$  в произвольном базисе  $v$  пространства  $V$  и двойственном ему базисе  $v^*$  пространства  $V^*$  совпадает с матрицей Грама  $G_v$  базиса  $v$ .



**11.3.1. Евклидово двойственный базис.** Для любого базиса  $\mathbf{u} = (u_1, \dots, u_n)$  в евклидовом пространстве  $V$ , прообразы  $u_1^\times, \dots, u_n^\times \in V$  координатных функционалов  $u_1^*, \dots, u_n^* \in V^*$  при изоморфизме (11-10) образуют в пространстве  $V$  базис, именуемый *евклидово двойственным* к базису  $\mathbf{u}$  и обозначаемый  $\mathbf{u}^\times = (u_1^\times, \dots, u_n^\times)$ . По определению, векторы этого базиса однозначно характеризуются соотношениями

$$(u_i, u_j^\times) = \begin{cases} 0 & \text{при } i \neq j \\ 1 & \text{при } i = j. \end{cases} \quad (11-11)$$

На матричном языке эти соотношения означают, что матрица Грамаформ (11-5) на стр. 135  $G_{\mathbf{u}\mathbf{u}^\times} = \mathbf{u}^t \mathbf{u}^\times = E$ . Согласно форм. (11-7) на стр. 135 матрица  $C_{\mathbf{u}\mathbf{u}^\times}$ , линейно выражающая базис  $\mathbf{u}^\times$  через базис  $\mathbf{u}$  по формуле  $\mathbf{u}^\times = \mathbf{u} C_{\mathbf{u}\mathbf{u}^\times}$ , удовлетворяет равенству  $E = G_{\mathbf{u}\mathbf{u}^\times} = G_{\mathbf{u}} C_{\mathbf{u}\mathbf{u}^\times}$ , т. е. обратна к матрице Грама базиса  $\mathbf{u}$ . Тем самым,

$$(u_1^\times, \dots, u_n^\times) = (u_1, \dots, u_n) \cdot G_{\mathbf{u}}^{-1}. \quad (11-12)$$

Ортонормальность базиса равносильна тому, что он совпадает со своим евклидово двойственным.

УПРАЖНЕНИЕ 11.5. Убедитесь, что  $u_i^{\times\times} = u_i$ .

По определению двойственного базиса<sup>1</sup>, каждый вектор  $v \in V$  раскладывается по любому базису  $u_1, \dots, u_n$  с коэффициентами, равными скалярным произведениям этого вектора с соответствующими векторами двойственного базиса:

$$v = \sum_i e_i \cdot (v, e_i^\times), \quad (11-13)$$

в чём легко удостовериться и непосредственно, скалярно умножив обе части этого равенства на  $u_i^\times$  для каждого  $i$ .

**11.3.2. Ортогоналы.** Прообраз аннулятора  $\text{Ann}(U) \subset V^*$  данного подпространства  $U \subset V$  при изоморфизме (11-10) обозначается через

$$U^\perp = \{w \in V \mid \forall u \in U (u, w) = 0\}$$

и называется *ортогоналом* или *ортогональным дополнением* к  $U$ . По сл. 7.1 на стр. 91

$$\dim U^\perp = \dim \text{Ann } U = \dim V - \dim U \quad (11-14)$$

Из сл. 7.2 на стр. 91 и теор. 7.1 на стр. 91 вытекает, что соответствие  $U \leftrightarrow U^\perp$  задаёт оборачивающую включения биекцию между подпространствами дополнительных размерностей в  $V$ , и эта биекция переводит суммы подпространств в пересечения, а пересечения — в суммы, т. е. для любых подпространств  $U, W \subset V$  выполняются равенства

$$U^{\perp\perp} = U, \quad (U + W)^\perp = U^\perp \cap W^\perp, \quad (U \cap W)^\perp = U^\perp + W^\perp. \quad (11-15)$$

<sup>1</sup>См. н° 7.1.1 на стр. 87.

**11.4. Ортогональное проектирование, расстояния и углы.** Так как  $(u, u) = 0$  только для  $u = 0$ , подпространства  $U$  и  $U^\perp$  трансверсальны и, следовательно, дополняют друг друга в силу соотношения (11-14). Таким образом,  $V = U \oplus U^\perp$ , т. е. каждый вектор  $v \in V$  допускает единственное разложение

$$v = v_U + v_{U^\perp}, \quad \text{где } v_U \in U, v_{U^\perp} \in U^\perp. \quad (11-16)$$

Компоненты  $v_U \in U$  и  $v_{U^\perp} \in U^\perp$  этого разложения называются, соответственно *ортогональной проекцией* вектора  $v$  на  $U$  и его *нормальной составляющей* относительно  $U$ . Сопоставление каждому вектору  $v \in V$  его ортогональной проекции на  $U$  задаёт линейное отображение

$$\pi_U : V = U \oplus U^\perp \rightarrow U, \quad v = v_U + v_{U^\perp} \mapsto v_U,$$

которое называется *ортогональным проектированием*  $V$  на  $U$ .

**Предложение 11.3**

Ортогональная проекция  $v_U \in U$  произвольного вектора  $v \in V$  на подпространство  $U \subset V$  однозначно характеризуется любым из следующих эквивалентных друг другу свойств:

$$1) v - v_U \in U^\perp \quad 2) \forall u \in U \quad (u, v) = (u, v_U) \quad 3) \forall u \in U \quad u \neq v_U \Rightarrow |v - u| > |v - v_U|$$

и может найдена по формуле

$$v_U = \sum_i u_i \cdot (v, u_i^\times), \quad (11-17)$$

где  $u_1, \dots, u_m$  и  $u_1^\times, \dots, u_m^\times$  — произвольные евклидово двойственные базисы в  $U$ .

**Доказательство.** Свойства (1) и (2) очевидным образом равносильны и утверждают, что векторы  $v_U$  и  $v - v_U$  являются компонентами вектора  $v$  в прямом разложении  $V = U \oplus U^\perp$ . Поскольку для любого вектора  $u = v_U + w \in U$ , где  $w \in U$  отличен от нуля, выполняется строгое неравенство  $(v - u, v - u) = (v_{U^\perp} - w, v_{U^\perp} - w) = (v_{U^\perp}, v_{U^\perp}) + (w, w) > (v_{U^\perp}, v_{U^\perp})$ , ортогональная проекция  $v_U$  вектора  $v$  на подпространство  $U$  обладает свойством (3). А так как вектор, обладающий свойством (3), очевидным образом единствен, это свойство равносильно свойствам (1) и (2). Остаётся проверить, что вектор  $v_U$ , определённый по формуле (11-17), обладает свойством (2). Поскольку свойство (2) линейно по  $u \in U$ , достаточно убедиться, что оно выполняется для базисных векторов  $u = u_i^\times, \dots, u_m^\times$ , что очевидно:  $(v_U, u_i^\times) = \sum_j (u_j, u_i^\times) \cdot (v, u_j^\times) = (v, u_i^\times)$  для каждого  $v$ .  $\square$

**Следствие 11.2**

В евклидовом аффинном пространстве  $\mathbb{A}(V)$  для любого непустого аффинного подпространства  $\Pi \subsetneq \mathbb{A}(V)$  и любой точки  $a \notin \Pi$  существует единственная точка  $a_\Pi \in \Pi$ , удовлетворяющая двум эквивалентным друг другу условиям:

- 1) вектор  $\overline{aa_\Pi}$  перпендикулярен любому вектору  $\overline{pq}$  с  $p, q \in \Pi$
- 2)  $|aq| > |aa_\Pi|$  для любой точки  $q \in \Pi$ , отличной от  $a_\Pi$ .

**Доказательство.** Поместим начало отсчёта в какую-нибудь точку  $o \in \Pi$  и отождествим точки  $a \in \mathbb{A}(V)$  с радиус-векторами  $\overline{oa} \in V$ . При этом аффинное подпространство  $\Pi$  превратится в векторное подпространство  $U \subset V$ , а точке  $a \in \mathbb{A}$  сопоставится её радиус вектор  $v = \overline{oa} \in V$ . Остаётся применить к ним **предл. 11.3**.  $\square$

**11.4.1. Расстояние до подпространства.** Точка  $a_{\Pi} \in \Pi$  из сл. 11.2 называется *ортогональной проекцией* точки  $a$  на аффинное подпространство  $\Pi \subset \mathbb{A}(V)$ . Длина  $|a - a_{\Pi}|$  называется *расстоянием* от точки  $a$  до подпространства  $\Pi$ . По свойству (1) из предл. 11.3 это расстояние равно длине  $|\overrightarrow{qp}_{U^{\perp}}|$  ортогональной проекции вектора  $\overrightarrow{qp}$ , где  $q \in \Pi$  — любая точка, на ортогональное дополнение  $U^{\perp}$  к направляющему векторному пространству  $U \subset V$  аффинного подпространства  $\Pi$ .

Пример 11.3 (расстояние от точки до гиперплоскости)

Направляющим векторным пространством гиперплоскости  $\Pi$  с уравнением<sup>1</sup>  $(a, x) = d$  является ортогонал  $a^{\perp}$  к вектору  $a$ . Расстояние от произвольно заданной точки  $p$  до гиперплоскости  $\Pi$  равно расстоянию между их ортогональными проекциями на одномерное подпространство, порождённое вектором  $a$ . Точка  $p$  проектируется в вектор  $a \cdot (a, p)/(a, a)$ , гиперплоскость  $\Pi$  — в вектор  $a \cdot (x, p)/(a, a) = a \cdot d/(a, a)$ . Разность между ими имеет длину

$$|(a, p) - d| \cdot |a|/(a, a) = |(a, p) - d|/|a|.$$

Пример 11.4 (евклидов объём через площадь основания и высоту)

Рассмотрим в евклидовом пространстве линейно независимый набор  $\mathbf{w} = (v, u_1, \dots, u_n)$  из  $n + 1$  векторов и обозначим через  $U$  линейную оболочку его поднабора  $\mathbf{u} = (u_1, \dots, u_n)$ , состоящего из последних  $n$  векторов. Вектор  $v$  единственным образом представляется в виде суммы  $v = v_U + v_{U^{\perp}}$ , где  $v_U \in U$ , а вектор  $v_{U^{\perp}}$  лежит в одномерном ортогональном дополнении  $U^{\perp}$  к подпространству  $U$  в линейной оболочке  $W$  набора векторов  $\mathbf{w}$ . Вектор  $v_{U^{\perp}}$  называется *высотой* параллелепипеда  $(v, u_1, \dots, u_n)$ , опущенной из вершины  $v$  на основание  $\mathbf{u}$ . Длина этой высоты равна расстоянию от вершины  $v$  до подпространства  $U$  или, что то же самое, длине ортогональной проекции  $v_{U^{\perp}}$  вектора  $v$  на  $U^{\perp}$ . Так как вектор  $v_U$  является линейной комбинацией векторов  $u_i$ , в координатах относительно любого ортонормального базиса в  $W$  ориентированный объём натянутого на векторы  $\mathbf{w}$  параллелепипеда равен

$$\det(v, u_1, \dots, u_n) = \det(v - v_U, u_1, \dots, u_n) = \det(v_{U^{\perp}}, u_1, \dots, u_n) = \sqrt{\Gamma_{(v_{U^{\perp}}, u_1, \dots, u_n)}}.$$

Единственным ненулевым элементом первой строки и первого столбца определителя Грама векторов  $v_{U^{\perp}}, u_1, \dots, u_n$  является стоящий в левом верхнем углу квадрат  $|v_{U^{\perp}}|^2$ . Поэтому

$$\text{Vol}^2(v, u_1, \dots, u_n) = \Gamma_{(v_{U^{\perp}}, u_1, \dots, u_n)} = |v_{U^{\perp}}|^2 \cdot \Gamma_{(u_1, \dots, u_n)} = |v_{U^{\perp}}|^2 \cdot \text{Vol}^2(u_1, \dots, u_n).$$

Иначе говоря,  $(n + 1)$ -мерный евклидов объём параллелепипеда  $\mathbf{w}$  равен произведению  $n$ -мерного евклидова объёма  $\text{vol}_n$  основания  $\mathbf{u}$  на длину опущенной на него высоты:

$$\text{Vol}_{n+1}(v, u_1, \dots, u_n) = |v_{U^{\perp}}| \cdot \text{Vol}_n(u_1, \dots, u_n). \quad (11-18)$$

Пример 11.5 (расстояние между аффинными подпространствами)

Рассмотрим в аффинном пространстве  $\mathbb{A}(V)$ , ассоциированном с евклидовым векторным пространством  $V$ , аффинные подпространства  $K = p + U$  и  $L = q + W$ , с направляющими векторными пространствами  $U, W \subset V$ . Пусть эти пространства не пересекаются, то есть<sup>2</sup>  $\overrightarrow{pq} \notin U + W$ . Для любых двух векторов  $x = p + u \in K$  и  $y = q + w \in L$  расстояние  $|y - x| = |\overrightarrow{pq} - (w - u)|$

<sup>1</sup>См. прим. 11.1 на стр. 134.

<sup>2</sup>См. предл. 4.4 на стр. 56.

достигает своего минимума по  $u \in U, w \in W$  тогда и только тогда, когда вектор  $w - u = \overline{pq}_{U+W}$  является ортогональной проекцией вектора  $\overline{pq}$  на подпространство  $U + W$  и этот минимум равен расстоянию между вектором  $\overline{pq}$  и подпространством  $U + W$ , т. е. длине ортогональной проекции  $\overline{pq}_{(U+W)^\perp}$  на подпространство  $(U + W)^\perp$ . Он называется *расстоянием* между аффинными подпространствами  $K, L$  и обозначается

$$|K, L| = \left| \overline{pq}_{(U+W)^\perp} \right| \quad (11-19)$$

Если  $K \cap L \neq \emptyset$ , т. е.  $\overline{pq} \in U + W$ , мы полагаем  $|K, L| = 0$ , что согласуется с равенством (11-19), так как  $\overline{pq}_{(U+W)^\perp} = 0$  в этом случае. Если векторы  $v_1, \dots, v_k$  составляют базис подпространства  $U + W$ , то вектор  $\overline{pq}_{(U+W)^\perp}$  является опущенной из вершины  $q$  высотой параллелепипеда, натянутого на векторы  $\overline{pq}, v_1, \dots, v_k$ , и длину этой высоты можно вычислять при помощи формулы (11-18):

$$|K, L| = \frac{\text{Vol}_{k+1}(\overline{pq}, v_1, \dots, v_k)}{\text{Vol}_k(v_1, \dots, v_k)} = \sqrt{\frac{\Gamma(\overline{pq}, v_1, \dots, v_k)}{\Gamma(v_1, \dots, v_k)}}, \quad (11-20)$$

где  $\text{Vol}_m$  означает  $m$ -мерный евклидов объём.

**11.4.2. Угол между вектором и подпространством.** Рассмотрим в евклидовом векторном пространстве  $V$  векторное подпространство  $U \subset V$  и вектор  $v \in V$ , не лежащий ни в  $U$ , ни в  $U^\perp$ . Тогда абсолютная величина ориентированного угла<sup>1</sup>  $0 < |\angle(v, u)| < \pi/2$  между этим вектором и ненулевыми векторами  $u \in U$  достигает своего минимума на единственном с точностью до умножения на положительную константу векторе  $u$ , равном ортогональной проекции  $v_U$  вектора  $v$  на подпространство  $U$ . В самом деле, наименьшему значению угла отвечает наибольшее значение его косинуса

$$\cos(\angle(v, u)) = \frac{(v, u)}{|v| \cdot |u|} = \frac{(v_U, u)}{|v| \cdot |u|} = (v_U / |v_U|, u / |u|) \cdot \frac{|v_U|}{|v|}$$

(второе равенство выполняется в силу свойства (2) из предл. 11.3 на стр. 138). Второй сомножитель не зависит от  $u$ , а первый в силу неравенства Коши – Буняковского – Шварца<sup>2</sup> не превосходит произведения длин  $|v_U / |v_U|| \cdot |u / |u|| = 1$  и в точности равен этому произведению если и только если векторы  $v_U$  и  $u$  сонаправлены. Угол  $\varphi \in [0, \pi/2]$ , однозначно определяемый из равенства

$$\cos \varphi = |v_U| / |v|$$

называется *евклидовым углом* между ненулевым вектором  $v$  и подпространством  $U$ . При  $v \in U$  и  $v \in U^\perp$  эта формула даёт  $\varphi = 0$  и  $\varphi = \pi/2$  соответственно, так как  $v_U = v$  и  $v_U = 0$  в этих случаях. Обратите внимание, что возникающие в этих двух крайних случаях углы по-прежнему являются минимальными среди углов между вектором  $v$  и ненулевыми векторами  $u \in U$ .

Так как  $|v_{U^\perp}| = |v| \cdot \sin \varphi$ , евклидов угол  $\varphi$  между вектором  $v$  и подпространством  $U$  также можно вычислять при помощи форм. (11-18) на стр. 139:

$$\sin \varphi = \frac{|v_{U^\perp}|}{|v|} = \frac{\sqrt{\Gamma(v, u_1, \dots, u_k)}}{|v| \sqrt{\Gamma(u_1, \dots, u_k)}}, \quad (11-21)$$

где  $u_1, \dots, u_k$  — произвольный базис подпространства  $U$ .

<sup>1</sup>См. 3-9 на стр. 40.

<sup>2</sup>См. формулу (3-4) на стр. 36.

**11.5. Векторные произведения.** Зафиксируем в  $n$ -мерном евклидовом векторном пространстве  $V$  какой-нибудь ортонормальный базис  $\mathbf{e} = (e_1, \dots, e_n)$  и условимся записывать векторы  $\mathbf{v} \in V$  строками их координат в этом базисе. Сопоставим каждому набору из  $n - 1$  векторов  $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_{n-1} \in V$  матрицу  $A$  размера  $(n - 1) \times n$ , по строкам которой записаны координаты этих векторов в базисе  $\mathbf{e}$ , и назовём *векторным произведением* векторов  $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_{n-1}$  вектор

$$[\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_{n-1}] \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{i=1}^n A_i e_i = (A_1, \dots, A_n), \quad (11-22)$$

$i$ -я координата  $A_i$  которого равна взятому со знаком  $(-1)^{i-1}$  определителю дополнительной к  $i$ -тому столбцу  $(n - 1) \times (n - 1)$ -подматрицы в  $A$ , точно так же, как это было во втором правиле Крамера из н° 8.4.3 на стр. 110. Векторное произведение замечательно тем, что для любого вектора  $\mathbf{u} \in V$  выполняется равенство

$$\omega_{\mathbf{e}}(\mathbf{u}, \mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_{n-1}) = (\mathbf{u}, [\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_{n-1}]), \quad (11-23)$$

где  $\omega_{\mathbf{e}}$  — единственная форма ориентированного объёма на  $V$ , принимающая на ортонормальном базисе  $\mathbf{e}$  значение 1.

УПРАЖНЕНИЕ 11.6. Докажите соотношение (11-23).

Иначе говоря, вектор  $[\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_{n-1}]$  является прообразом линейного функционала

$$V \rightarrow \mathbb{R}, \quad \mathbf{u} \mapsto \omega_{\mathbf{e}}(\mathbf{u}, \mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_{n-1}),$$

при изоморфизме  $V \simeq V^*$  из форм. (11-10) на стр. 136, сопоставляющем вектору  $\mathbf{v} \in V$  ковектор  $g_{\mathbf{v}}: V \rightarrow \mathbb{R}, \mathbf{u} \mapsto (\mathbf{u}, \mathbf{v})$ . В частности, векторное произведение не меняется при замене ортонормального базиса  $\mathbf{e}$  на любой другой ортонормальный базис той же ориентации<sup>1</sup> и меняет знак при выборе вместо  $\mathbf{e}$  ортонормального базиса противоположной ориентации. Геометрически, векторное произведение однозначно определяется следующими своими свойствами.

Предложение 11.4

Вектор  $[\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_{n-1}]$  перпендикулярен векторам  $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_{n-1}$ , и его длина равна евклидову объёму  $(n - 1)$ -мерного параллелепипеда, натянутого на векторы  $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_{n-1}$ . Если эта длина ненулевая, то направление вектора  $[\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_{n-1}]$  таково, что матрица перехода от базиса

$$[\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_{n-1}], \mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_{n-1}$$

к базису  $\mathbf{e}$  имеет положительный определитель.

Доказательство. Подставляя в формулу (11-23) вектор  $\mathbf{u} = \mathbf{v}_i$ , получаем

$$(\mathbf{v}_i, [\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_{n-1}]) = \omega_{\mathbf{e}}(\mathbf{v}_i, \mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_{n-1}) = 0,$$

что доказывает первое утверждение. Подставляя  $\mathbf{u} = [\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_{n-1}]$ , получаем

$$\omega_{\mathbf{e}}([\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_{n-1}], \mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_{n-1}) = |[\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_{n-1}]|^2 \geq 0.$$

В силу первого утверждения вектор  $[\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_{n-1}]$  является высотой параллелепипеда, объём которого стоит в левой части последней формулы. Согласно прим. 11.4 этот объём равен произведению длины  $|[\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_{n-1}]|$  на евклидов объём  $(n - 1)$ -мерного параллелепипеда, натянутого на векторы  $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_{n-1}$ . Отсюда вытекают второе и третье утверждения.  $\square$

<sup>1</sup>См. н° 11.2.1 на стр. 136.

Следствие II.3

Векторы  $v_1, \dots, v_{n-1} \in \mathbb{R}^n$  линейно зависимы если и только если  $[v_1, \dots, v_{n-1}] = 0$ .  $\square$

Пример II.6 (РАССТОЯНИЕ МЕДУ ПОДПРОСТРАНСТВАМИ, ПРОДОЛЖЕНИЕ ПРИМ. II.5)

Формулу из прим. 11.5 для минимального расстояния между непересекающимися аффинными подпространствами  $p+U$  и  $q+W$  в евклидовом аффинном пространстве  $A(V)$  можно переписать как

$$\frac{\text{Vol}_{k+1}(\overline{qp}, e_1, \dots, e_k)}{\text{Vol}_k(e_1, \dots, e_k)} = \frac{|\det(\overline{qp}, e_1, \dots, e_k)|}{|[e_1, \dots, e_k]|},$$

где  $e_1, \dots, e_k$  — любой базис пространства  $U+W$ , а определитель в правой части — это определитель матрицы координат указанных в нём векторов в каком-нибудь ортонормальном базисе пространства  $V$ .

Пример II.7 (ВЕКТОРНОЕ ПРОИЗВЕДЕНИЕ В  $\mathbb{R}^3$ )

Векторное произведение в  $\mathbb{R}^3$ , заданное с помощью стандартного ортонормального базиса  $e = (e_1, e_2, e_3)$ , представляет собою бинарную операцию  $\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ ,  $(u, w) \mapsto [u, w]$ , и часто обозначается<sup>1</sup>  $u \times w$ . Формула (11-23) в этом случае утверждает, что ориентированный объём параллелепипеда, натянутого на векторы

$$(a, b, c) = (e_1, e_2, e_3) \cdot \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{pmatrix},$$

равен скалярному произведению вектора  $a = (a_1, a_2, a_3)$  с вектором

$$\begin{aligned} [b, c] &\stackrel{\text{def}}{=} (b_2c_3 - b_3c_2, -b_1c_3 + b_3c_1, b_1c_2 - b_2c_1) = \\ &= \left( \det \begin{pmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{pmatrix} - \det \begin{pmatrix} b_1 & c_1 \\ b_3 & c_3 \end{pmatrix}, \det \begin{pmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{pmatrix} \right), \end{aligned} \quad (11-24)$$

в чём несложно убедиться, раскладывая по первому столбцу определитель

$$\det \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{pmatrix} = a_1 \cdot (b_2c_3 - b_3c_2) + a_2 \cdot (-b_1c_3 + b_3c_1) + a_3 \cdot (b_1c_2 - b_2c_1) = (a, [b, c]).$$

Так как  $(b, [b, c]) = \det(b, b, c) = 0$  и  $(c, [b, c]) = \det(c, b, c) = 0$ , вектор  $[b, c]$  перпендикулярен векторам  $b$  и  $c$ , а квадрат его длины  $([b, c], [b, c]) = \text{Vol}_3([b, c], b, c) = |[b, c]| \cdot \text{Vol}_2(b, c)$ , откуда  $|[b, c]| = \text{Vol}_2(b, c)$ .

УПРАЖНЕНИЕ II.7. Убедитесь, что векторное произведение  $\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  кососимметрично, т. е.  $v \times v = 0$  для всех  $v$ , и не ассоциативно, но удовлетворяет правилу Лейбница<sup>2</sup>

$$u \times (v \times w) = (u \times v) \times w + v \times (u \times w).$$

УПРАЖНЕНИЕ II.8. Докажите для векторных произведений в  $\mathbb{R}^3$  равенства

$$\text{а) } [a, [b, c]] = b \cdot (a, c) - c \cdot (a, b) \quad \text{б) } [[a, b], [a, c]] = a \cdot \det(a, b, c)$$

$$\text{в) } ([a, b], [c, d]) = \det \begin{pmatrix} (a, c) & (a, d) \\ (b, c) & (b, d) \end{pmatrix}$$

<sup>1</sup>В английской литературе векторное произведение даже и называется *cross-product*.

<sup>2</sup>Которое часто записывают в виде  $[u, [v, w]] + [v, [w, u]] + [w, [u, v]] = 0$  и называют *тождеством Якоби*.

## §12. Линейные отображения евклидовых пространств

Всюду в этом параграфе речь по-прежнему идёт про конечномерные евклидовы векторные пространства над полем  $\mathbb{R}$ .

**12.1. Ортогональные операторы.** Линейный оператор  $F : V \rightarrow V$  на евклидовом векторном пространстве  $V$  называется *ортогональным* или *изометрией*, если он сохраняет длины векторов, т. е.  $|Fv| = |v|$  для каждого  $v \in V$ . Поскольку скалярное произведение однозначно выражается через длины векторов по формуле

$$(u, w) = \frac{1}{2}(|u + w|^2 - |u|^2 - |w|^2),$$

каждый ортогональный оператор  $F$  автоматически сохраняет скалярные произведения, т. е.

$$\forall u, w \in V (Fu, Fw) = (u, w).$$

Сохранение скалярных произведений влечёт за собою сохранение углов между векторами и любых других величин, выражающихся через скалярные произведения. Например, каждый ортогональный оператор сохраняет евклидов объём параллелепипеда, равный корню из определителя Грама<sup>1</sup>. Поэтому определитель любого ортогонального оператора равен  $\pm 1$ . В частности, все ортогональные операторы обратимы и составляют в полной линейной группе пространства  $V$  подгруппу, которая обозначается  $O(V) \subset GL(V)$  и называется *ортогональной группой* евклидова пространства  $V$ . Сохраняющие ориентацию ортогональные операторы называются *собственными*. Они образуют в ортогональной группе подгруппу, которая обозначается

$$SO(V) \stackrel{\text{def}}{=} O(V) \cap SL(V) = \{F \in O(V) \mid \det F = 1\}$$

и называется *специальной* или *собственной* ортогональной группой. Ортогональные операторы определителя  $-1$ , меняющие ориентацию пространства на противоположную, называются *несобственными*.

**ПРИМЕР 12.1 (ЦЕНТРАЛЬНАЯ СИММЕТРИЯ)**

Оператор  $-\text{Id} : v \mapsto -v$  является ортогональным на любом евклидовом векторном пространстве  $V$ . Он собственный, если  $\dim V$  чётна, и несобственный, если  $\dim V$  нечётна.

**УПРАЖНЕНИЕ 12.1.** Покажите, что ортогональная группа одномерного пространства исчерпывается операторами  $\pm \text{Id}$ .

**ПРИМЕР 12.2 (СИММЕТРИИ)**

Как мы видели в н° 11.3.2 на стр. 137, с каждым векторным подпространством  $U \subset V$  связано разложение в ортогональную прямую сумму  $V = U \oplus U^\perp$ . Обозначим через  $s_U : V \rightarrow V$  линейное отображение, тождественно действующее на  $U$  и умножающее все векторы из  $U^\perp$  на  $-1$ , т. е. переводящее произвольный вектор  $v = v_U + v_{U^\perp} \in U \oplus U^\perp = V$  в вектор

$$s_U(v) = v_U - v_{U^\perp} = v - 2v_{U^\perp}. \quad (12-1)$$

Так как  $|s_U(v)|^2 = |u_v - u_v^\perp|^2 = |u_v|^2 + |u_v^\perp|^2 = |u_v + u_v^\perp|^2 = |v|^2$ , оператор  $s_U$  ортогонален. Он называется *симметрией* относительно подпространства  $U$ . При  $U = 0$  получается центральная

<sup>1</sup>См. н° 11.2.1 на стр. 136.

симметрия из предыдущего [прим. 12.1](#). В общем случае оператор  $S_U$  собственный если и только если коразмерность подпространства  $U$  в  $V$  чётна. Все операторы  $\sigma_U$  инволютивны, т. е.

$$\sigma_U^2 = \text{Id}_V.$$

**12.1.1. Отражения в гиперплоскостях.** Важнейшим специальным случаем симметрии является *отражение в гиперплоскости*  $U = u^\perp$ , перпендикулярной какому-либо ненулевому вектору  $u \in V$ . Оно обозначается через  $\sigma_u$  и действует по формуле

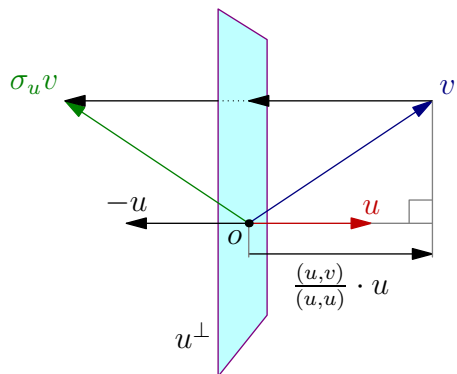


Рис. 12.1. Отражение в гиперплоскости  $u^\perp$ .

$$\sigma_u(v) = v - 2 \frac{(u, v)}{(u, u)} \cdot u. \quad (12-2)$$

в которую превращается предыдущая формула (12-1) при  $U^\perp = \mathbb{R} \cdot u$ . Два отражения  $\sigma_u$  и  $\sigma_w$  совпадают тогда и только тогда, когда задающие их ненулевые векторы  $u$  и  $w$  пропорциональны. Отражения в гиперплоскостях являются несобственными изометриями. Любые два различных ненулевых вектора  $a \neq b$  одинаковой длины  $|a| = |b|$  переводятся друг в друга отражением  $\sigma_{a-b}$  относительно срединного перпендикуляра<sup>1</sup> к отрезку  $[a, b]$  в  $\mathbb{A}(V)$ .

УПРАЖНЕНИЕ 12.2. Убедитесь в этом.

#### ТЕОРЕМА 12.1

Каждый нетождественный ортогональный оператор на  $n$ -мерном евклидовом векторном пространстве  $V$  является композицией не более  $n$  отражений в гиперплоскостях.

*Доказательство.* Индукция по  $n = \dim V$ . Случай  $n = 1$  покрывается [упр. 12.1](#). Пусть  $n > 1$  и  $F(v) \neq v$  для некоторого ненулевого вектора  $v$ . Обозначим через  $\sigma$  отражение, переводящее  $F(v)$  в  $v$ . Ортогональный оператор  $G = \sigma \circ F$  оставляет вектор  $v$  на месте и, тем самым, переводит в себя гиперплоскость  $v^\perp$ . По индукции, ограничение  $G|_{v^\perp} = \bar{\sigma}_k \circ \dots \circ \bar{\sigma}_1$  является композицией  $k \leq (n-1)$  отражений  $\bar{\sigma}_i : v^\perp \rightarrow v^\perp$  в  $(n-2)$ -мерных гиперплоскостях, лежащих в  $v^\perp$ . Каждое отражение  $\bar{\sigma}_i$  является ограничением на подпространство  $v^\perp$  отражения  $\sigma_i : V \rightarrow V$  в  $(n-1)$ -й гиперплоскости, порождённой вектором  $v$  и  $(n-2)$ -мерным зеркалом отражения  $\bar{\sigma}_i$ . Так как вектор  $v$  неподвижен при всех отражениях  $\sigma_i$ , оператор  $G = \sigma_k \circ \dots \circ \sigma_1 : V \rightarrow V$  является композицией отражений  $\sigma_i$ . Следовательно,  $F = \sigma \circ G$  является композицией  $k+1 \leq n$  отражений.  $\square$

#### Следствие 12.1

Всякий собственный ортогональный оператор является композицией чётного, а всякий несобственный — нечётного числа отражений в гиперплоскостях.  $\square$

#### ПРИМЕР 12.3 (СОБСТВЕННЫЕ ИЗОМЕТРИИ ТРЁХМЕРНОГО ПРОСТРАНСТВА)

Каждый нетождественный собственный ортогональный оператор  $F$  в трёхмерном евклидовом векторном пространстве  $V$  является композицией  $F = \sigma_{u_2} \circ \sigma_{u_1}$  отражений в двух различных

<sup>1</sup>См. [прим. 11.2](#) на стр. 134.



плоскостях  $u_2^\perp$  и  $u_1^\perp$ , перпендикулярных неким непропорциональным векторам  $u_2$  и  $u_1$ . Обозначим порождённую этими векторами плоскость через  $U$ . Оператор  $F$  тождественно действует на прямой

$$U^\perp = u_1^\perp \cap u_2^\perp = \mathbb{R} \cdot [u_1, u_2]$$

с вектором скорости<sup>1</sup>  $[u_1, u_2]$ . Ортогональная этой прямой гиперплоскость  $U$  переводится оператором  $F$  в себя, и ограничение  $F|_U$  является собственным ортогональным преобразованием этой плоскости, поскольку  $\det F = \det F|_U$ . В силу предл. 3.5 на стр. 44 каждое собственное ортогональное линейное преобразование плоскости является поворотом.

УПРАЖНЕНИЕ 12.3. Убедитесь, что это поворот на угол  $2\angle(u_1, u_2)$  по часовой стрелке, если глядеть вдоль вектора  $[u_1, u_2]$ .

Мы заключаем, что собственная ортогональная группа трёхмерного евклидова пространства исчерпывается поворотами вокруг прямых. Этот факт известен как теорема Эйлера.

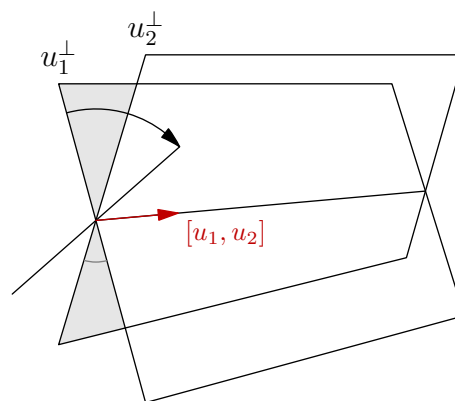


Рис. 12.2. Поворот.

**12.1.2. Ортогональные суммы поворотов.** В этом разделе мы построим для любого ортогонального оператора  $F : V \rightarrow V$  разложение пространства  $V$  в прямую сумму двумерных и одномерных  $F$ -инвариантных подпространств  $V = U_1 \oplus U_2 \oplus \dots \oplus U_m$ , в котором все подпространства попарно ортогональны друг другу и  $F$  действует на каждом двумерном подпространстве  $U_i$  как поворот на некоторый угол  $\varphi_i \in (0, \pi)$ , а на каждом одномерном — как  $\text{Id}$  или  $-\text{Id}$ . Отметим, что любые два одномерных собственных подпространства с собственным числом 1 можно объединить в двумерную плоскость, на которой  $F$  действует поворотом на нулевой угол, а любые два одномерных собственных подпространства с собственным числом  $-1$  — в двумерную плоскость, на которой  $F$  действует как поворот на угол  $\pi$ . Поэтому можно считать, что разложение, о котором идёт речь, состоит из двумерных подпространств  $U_i$ , на которых  $F$  действует поворотами на углы  $\varphi_i \in [0, \pi]$ , и ещё самое большее двух одномерных слагаемых, причём когда их два, то на одном из них  $F$  действует тождественно, а на другом — умножением на  $-1$ . Оператор  $F$  собственный если и только если таких одномерных слагаемых либо нет вовсе, либо оно ровно одно, и  $F$  действует на нём тождественно.

ЛЕММА 12.1

Каждый линейный оператор  $F : V \rightarrow V$  на конечномерном вещественном векторном пространстве обладает одномерным или двумерным инвариантным подпространством.

Доказательство. Рассмотрим произвольный ненулевой вектор  $v \in V$  и образуем из него  $n + 1$  векторов  $v, Fv, F^2v, \dots, F^nv$ , где  $n = \dim V$  и  $F^k v$  обозначает результат  $k$ -кратного последовательного применения оператора  $F$  к вектору  $v$ . Поскольку эти векторы линейно зависимы, найдутся такие  $a_1, a_2, \dots, a_k \in \mathbb{R}$ , что  $(F^k + a_1 F^{k-1} + \dots + a_{k-1} F + a_k)v = 0$ . Заключённый в скобки линейный оператор является результатом подстановки  $t = F$  в многочлен  $f(t) = t^k + a_1 t^{k-1} + \dots + a_{k-1} t + a_k \in \mathbb{R}[t]$ . Такой многочлен представляет собою произведение  $f(t) = g_1(t) \cdot g_2(t) \cdot \dots \cdot g_m(t)$  линейных двучленов вида  $t - \alpha$  и квадратных трёхчленов вида

<sup>1</sup>См. прим. 11.7 на стр. 142.

$t^2 - \alpha t - \beta$  с вещественными коэффициентами. Подставляя в это разложение  $F$  и применяя полученный оператор к вектору  $v$ , мы заключаем, что  $g_1(F) \circ g_2(F) \circ \dots \circ g_m(F)v = 0$ . Рассмотрим наименьшее  $k$ , для которого вектор  $w = g_{k+1}(F) \circ \dots \circ g_m(F)v$  всё ещё отличен от нуля. Тогда  $g_k(F)w = 0$ . Для  $g_k(F) = F - \alpha$  это значит, что  $F(w) = \alpha w$ , т. е. одномерное подпространство  $\mathbb{R} \cdot w$  переводится оператором  $F$  в себя. Для  $g_k(F) = F^2 - \alpha F - \beta$  имеем  $F(F(w)) = \alpha F(w) + \beta w$ , т. е. линейная оболочка векторов  $w$  и  $F(w)$  переводится оператором  $F$  в себя.  $\square$

#### ТЕОРЕМА 12.2

Каждый ортогональный линейный оператор  $F$  на конечномерном евклидовом пространстве записывается в подходящем ортонормальном базисе матрицей, на главной диагонали которой стоят числа  $\pm 1$  и  $2 \times 2$  блоки вида

$$\begin{pmatrix} \cos \varphi_i & -\sin \varphi_i \\ \sin \varphi_i & \cos \varphi_i \end{pmatrix}, \quad \text{где } 0 < \varphi_i < \pi, \quad (12-3)$$

а все остальные элементы равны нулю. С точностью до перестановки блоков и диагональных элементов эта матрица не зависит от выбора ортонормального базиса, в котором оператор имеет матрицу такого вида.

**Доказательство теор. 12.2.** Разложение пространства  $V$  в ортогональную прямую сумму  $F$ -инвариантных одномерных и двумерных подпространств  $U_i$  строится индукцией по  $\dim V$ . Случаи  $\dim V = 1, 2$  уже были разобраны в [упр. 12.1](#) на стр. 143 и [предл. 3.5](#) на стр. 44 соответственно. Пусть  $\dim V \geq 3$ . Согласно [лем. 12.1](#) оператор  $F : V \rightarrow V$  переводит в себя некоторое одномерное или двумерное подпространство  $U \subset V$ . Поскольку  $F$  сохраняет скалярное произведение, ортогонал  $U^\perp$  к подпространству  $U$  тоже переводится оператором  $F$  в себя. По индукции, ограничения  $F$  на  $U$  и на  $U^\perp$  обладают нужными разложениями. Складывая эти разложения вместе, получаем требуемое разложение для  $V = U \oplus U^\perp$ . Если выбрать в каждом подпространстве  $U_i$  ортонормальный базис и соединить эти базисы в один ортонормальный базис  $e$  пространства  $V$ , то оператор  $F$  запишется в этом базисе матрицей  $F_e$ , состоящей из расположенных на главной диагонали блоков вида (12-3) и, может быть, ещё нескольких диагональных элементов вида  $\pm 1$ . Поэтому характеристический многочлен оператора  $F$  раскладывается в произведение характеристических многочленов этих блоков:

$$\det \begin{pmatrix} t - \cos \varphi_i & \sin \varphi_i \\ -\sin \varphi_i & t - \cos \varphi_i \end{pmatrix} = t^2 - 2t \cos \varphi_i + 1$$

и, возможно, ещё нескольких линейных множителей вида  $t \pm 1$ . Каждому блоку (12-3) при этом отвечает пара комплексно-сопряжённых корней  $\cos \varphi_i \pm i \sin \varphi_i$  многочлена  $\chi_F(t)$  в поле  $\mathbb{C}$ , а диагональным элементам  $\pm 1$  — корни  $\pm 1$ , причём таким образом получаются все комплексные корни многочлена  $\chi_F(t)$  с учётом их кратностей. Поскольку характеристический многочлен не зависит от выбора базиса, набор отличных от нуля и  $\pi$  углов поворотов и количества стоящих на диагонали чисел  $+1$  и  $-1$  не зависят от способа разложения.  $\square$

#### ПРИМЕР 12.4 (несобственные ортогональные операторы в трёхмерном пространстве)

Согласно [теор. 12.2](#) каждый несобственный ортогональный оператор на трёхмерном евклидовом пространстве записывается в подходящем ортонормальном базисе матрицей

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \varphi_i & -\sin \varphi_i \\ 0 & \sin \varphi_i & \cos \varphi_i \end{pmatrix}, \quad \text{где } 0 \leq \varphi_i \leq \pi,$$

и является композицией поворота вокруг прямой с направляющим вектором  $e_1$  и отражения в перпендикулярной оси поворота плоскости  $e_1^\perp$ .

ПРИМЕР 12.5 (движения трёхмерного евклидова аффинного пространства)

Напомню<sup>1</sup>, что эндоморфизм  $F : \mathbb{A}(V) \rightarrow \mathbb{A}(V)$  аффинного пространства  $\mathbb{A}(V)$ , ассоциированного с евклидовым векторным пространством  $V$ , называется *движением*, если он сохраняет расстояния между точками. Каждое движение автоматически биективно и переводит прямые в прямые, а значит, является аффинным преобразованием<sup>2</sup>, т. е. композицией  $F = \tau_v \circ G_p$  параллельного переноса  $\tau_v$  на некоторый вектор  $v \in V$  и линейного ортогонального преобразования  $G_p : V \rightarrow V$ , оставляющего на месте некоторую точку  $p \in \mathbb{A}(V)$ . Пусть теперь  $\dim V = 3$ .

Если движение  $F$  собственное<sup>3</sup>, то ортогональный оператор  $G_p$  тоже собственный и является поворотом  $\varrho_{\ell, \varphi}$  на угол  $\varphi$  (возможно, нулевой) вокруг некоторой проходящей через точку  $p$  прямой  $\ell$ . Разложим вектор сдвига в сумму  $v = u + w$  вектора  $u$ , параллельного прямой  $\ell$ , и вектора  $w$  перпендикулярного прямой  $\ell$ . Композиция  $\tau_w \circ \varrho_{\ell, \varphi}$  переводит в себя каждую перпендикулярную прямой  $\ell$  плоскость  $\Pi$  и действует в ней как композиция поворота со сдвигом, т. е. как поворот на тот же угол  $\varphi$ , но с другим центром<sup>4</sup>, зависящим только от вектора  $w$ . Таким образом, композиция  $\tau_w \circ \varrho_{\ell, \varphi} = \varrho_{\ell', \varphi}$  является поворотом пространства на тот же угол  $\varphi$ , но относительно прямой  $\ell'$ , которая параллельна оси  $\ell$  поворота  $G_p$ . Такой поворот перестановочен со сдвигом  $\tau_u$  вдоль оси поворота и композиция

$$F = \tau_v \circ G_p = \tau_u \circ \tau_w \circ \varrho_{\ell, \varphi} = \tau_u \circ \varrho_{\ell', \varphi} = \varrho_{\ell', \varphi} \circ \tau_u$$

представляет собою *винтовое движение* — композицию перестановочных друг с другом поворота вокруг прямой и сдвига вдоль этой прямой. Ось винтового движения с ненулевым углом закрутки однозначно характеризуется как единственная прямая в пространстве, переводимая этим движением в себя. Итак, каждое собственное движение пространства есть винтовое движение — возможно, с нулевым вектором сдвига и/или нулевым углом закрутки.

Если движение  $F$  несобственное<sup>5</sup>, то ортогональный оператор  $G_p$  тоже несобственный и является либо отражением  $\sigma_\Pi$  в проходящей через точку  $p$  плоскости  $\Pi$ , либо композицией такого отражения с поворотом  $\varrho_{\ell, \varphi}$  вокруг проходящей через  $p$  перпендикулярно плоскости  $\Pi$  прямой  $\ell$ . Раскладывая, как и выше, сдвиг  $\tau_v$  в композицию сдвигов на перпендикулярный к плоскости  $\Pi$  вектор  $u$  и параллельный  $\Pi$  вектор  $w$ , мы видим, что в первом случае композиция  $\tau_u \sigma_\Pi = \sigma_{\Pi'}$  является отражением в плоскости  $\Pi' = \Pi + u / 2$ , полученной из  $\Pi$  сдвигом на вектор<sup>6</sup>  $u / 2$ , и движение  $F = \tau_v \circ G_p = \tau_w \circ \tau_u \circ \sigma_\Pi = \tau_w \circ \sigma_{\Pi'} = \sigma_{\Pi'} \circ \tau_w$  представляет собою *скользящую симметрию* — композицию отражения в плоскости с параллельным этой плоскости сдвигом. Во втором случае, в силу уже сказанного,

$$F = \tau_v \circ G_p = \tau_w \circ \tau_u \circ \sigma_\Pi \circ \varrho_{\ell, \varphi} = \tau_w \circ \sigma_{\Pi'} \circ \varrho_{\ell, \varphi} = \sigma_{\Pi'} \circ \tau_w \circ \varrho_{\ell, \varphi} = \sigma_{\Pi'} \circ \varrho_{\ell', \varphi}$$

представляет собою композицию перестановочных друг с другом поворота вокруг прямой и отражения в плоскости, перпендикулярной оси поворота. В обоих случаях зеркало отражения

<sup>1</sup>См. н° 3.4 на стр. 42.

<sup>2</sup>См. н° 2.4 на стр. 32.

<sup>3</sup>Т. е. сохраняет ориентацию.

<sup>4</sup>См. н° 3.4.2 на стр. 44.

<sup>5</sup>Т. е. меняет ориентацию на противоположную.

<sup>6</sup>Ибо  $\sigma_{\Pi'} \circ \sigma_\Pi = \tau_u$ , см. н° 3.4.2 на стр. 44.

однозначно описывается как геометрическое место середин отрезков, соединяющих точки пространства с их образами при движении  $F$ .

**12.2. Евклидово сопряжение линейных отображений.** С каждым линейным отображением  $F : U \rightarrow W$  между евклидовыми пространствами  $U, W$  связано *евклидово сопряжённое* отображение  $F^\times : W \rightarrow U$ , которое однозначно характеризуется тем, что для всех  $u \in U, w \in W$

$$(Fu, w) = (u, F^\times w). \quad (12-4)$$

Предложение 12.1

Для любого линейного отображения евклидовых пространств  $F : U \rightarrow W$  удовлетворяющее равенству (12-4) линейное отображение  $F^\times : W \rightarrow U$  существует и единственно. Матрицы  $F_{uw}$  и  $F_{uw}^\times$  отображений  $F$  и  $F^\times$  в произвольных базисах  $\mathbf{u} = (u_1, \dots, u_n)$  и  $\mathbf{w} = (w_1, \dots, w_m)$  пространств  $U$  и  $W$  связаны соотношением

$$F_{wu}^t G_w = G_u F_{uw}^\times, \quad (12-5)$$

где  $G_u = \mathbf{u}^t \cdot \mathbf{u}$  и  $G_w = \mathbf{w}^t \cdot \mathbf{w}$  — матрицы Грама базисов  $\mathbf{u}$  и  $\mathbf{w}$ .

Доказательство. Левая часть (12-4) является результатом применения к вектору  $Fu \in W$  линейного функционала  $g_w : W \rightarrow \mathbb{R}, v \mapsto (v, w)$ , в который переходит вектор  $w \in W$  при задаваемом евклидовой структурой на пространстве  $W$  изоморфизме  $G_W : W \simeq W^*, w \mapsto g_w$ , из форм. (11-10) на стр. 136. Композиция  $g_w \circ F$  линейного функционала  $g_w : W \rightarrow \mathbb{R}$  с линейным отображением  $F : U \rightarrow W$  является результатом применения к ковектору  $g_w \in W^*$  двойственного к  $F$  линейного отображения<sup>1</sup>  $F^* : W^* \rightarrow U^*, \xi \mapsto \xi \circ F$ . Таким образом, в левой части (12-4) стоит значение ковектора  $F^*(g_w) = F^* G_W(w)$  на векторе  $u$ . В правой части (12-4) написан результат применения к вектору  $u$  ковектора  $g_{F^\times w} = G_U F^\times(w)$ , в который переходит вектор  $F^\times(w) \in U$  при изоморфизме  $G_U : U \simeq U^*, u \mapsto g_u$ , задаваемом евклидовой структурой на пространстве  $U$ . Таким образом, равенство (12-4) равносильно соотношению  $F^* G_W = G_U F^\times$ , в котором  $G_U : U \simeq U^*$  и  $G_W : W \simeq W^*$  суть евклидовы корреляции из п° 11.3 на стр. 136, а линейное отображение  $F^* : W^* \rightarrow U^*$  двойственно к  $F$ . Этому соотношению удовлетворяет ровно одно линейное отображение  $F^\times = G_U^{-1} F^* G_W : W \rightarrow U$ .

В терминах базисов  $\mathbf{u}$  и  $\mathbf{w}$  равенство (12-4) равносильно  $mn$  соотношениям

$$(Fu_i, w_j) = (u_i, F^\times w_j)$$

на скалярные произведения базисных векторов. Они собираются в матричное равенство

$$G_{F(\mathbf{u}), \mathbf{w}} = G_{\mathbf{u}, F^\times(\mathbf{w})},$$

где  $G_{F(\mathbf{u}), \mathbf{w}} = F(\mathbf{u})^t \cdot \mathbf{w}$  — матрица Грама наборов  $F(\mathbf{u}) = (Fu_1, \dots, Fu_n)$  и  $\mathbf{w} = (w_1, \dots, w_m)$ , а  $G_{\mathbf{u}, F^\times(\mathbf{w})} = \mathbf{u}^t \cdot F^\times(\mathbf{w})$  — матрица Грама наборов  $\mathbf{u} = (u_1, \dots, u_n)$  и  $F^\times(\mathbf{w}) = (F^\times w_1, \dots, F^\times w_m)$ . Поскольку  $F(\mathbf{u}) = \mathbf{w} F_{wu}$ , а  $F^\times(\mathbf{w}) = \mathbf{u} F_{uw}^\times$ , эти матрицы Грама имеют вид

$$G_{F(\mathbf{u}), \mathbf{w}} = F_{wu}^t \mathbf{w}^t \cdot \mathbf{w} = F_{wu}^t G_w \quad \text{и} \quad G_{\mathbf{u}, F^\times(\mathbf{w})} = \mathbf{u}^t \cdot \mathbf{u} F_{uw}^\times = G_u F_{uw}^\times.$$

Таким образом, соотношение (12-4) равносильно матричному равенству (12-5).  $\square$

<sup>1</sup>См. п° 7.3 на стр. 92.

ЗАМЕЧАНИЕ 12.1. Обратите внимание, что матричное равенство  $F_{\mathbf{u}\mathbf{w}}^\times = G_{\mathbf{u}}^{-1}F_{\mathbf{w}\mathbf{u}}^t G_{\mathbf{w}}$  согласуется с операторным равенством  $F^\times = G_U^{-1}F^*G_W$ : матрицы Грама  $G_{\mathbf{u}}$  и  $G_{\mathbf{w}}$  суть матрицы евклидовых корреляций<sup>1</sup>  $G_U: U \xrightarrow{\sim} U^*$  и  $G_W: W \xrightarrow{\sim} W^*$ , записанные в парах двойственных базисов  $\mathbf{u}, \mathbf{u}^*$  и  $\mathbf{w}, \mathbf{w}^*$  пространств  $U, U^*$  и  $W, W^*$ , а  $F_{\mathbf{w}\mathbf{u}}^t = F_{\mathbf{w}^*\mathbf{u}^*}^*$  есть матрица двойственного к  $F$  оператора<sup>2</sup>  $F^*: W^* \rightarrow U^*$ , записанная в базисах  $\mathbf{w}^*, \mathbf{u}^*$ .

СЛЕДСТВИЕ 12.2

В ортонормальных базисах  $\mathbf{u}, \mathbf{w}$  пространств  $U, W$  матрицы евклидово сопряжённых операторов  $F$  и  $F^\times$  транспонированы друг другу:  $F_{\mathbf{u}\mathbf{w}}^\times = F_{\mathbf{w}\mathbf{u}}^t$ .

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 12.2

Для любого линейного отображения  $F: U \rightarrow W$  выполняются равенства

$$F^{\times\times} = F, \quad \ker F^\times = (\operatorname{im} F)^\perp, \quad \operatorname{im} F^\times = (\ker F)^\perp,$$

а для любой пары линейных отображений  $F: U \rightarrow V, G: V \rightarrow W$  — равенство  $(GF)^\times = F^\times G^\times$ .

Доказательство. Равенство  $F^{\times\times} = F$  вытекает из соотношения (12-4) и симметричности скалярного произведения. Вектор  $w \in \ker F^\times$  если и только если для всех  $u \in U$  выполняется равенство  $(u, F^\times w) = 0$ , которое в силу соотношения (12-4) равносильно равенству  $(Fu, w) = 0$ , т. е. ортогональности подпространства  $\operatorname{im} F$  вектору  $w$ . Поэтому  $\ker F^\times = (\operatorname{im} F)^\perp$ . Написав это равенство для оператора  $F^\times$  в роли  $F$  и беря ортогонал к обеим частям, получаем равенство  $(\ker F)^\perp = \operatorname{im} F^\times$ . Последнее утверждение вытекает из равенств  $(GFu, w) = (Fu, G^\times w) = (u, F^\times G^\times w)$ , выполненных для всех  $u \in U, w \in W$ .  $\square$

**12.3. Сопряжённые и антисамосопряжённые операторы.** В прим. 10.3 на стр. 123 мы видели, что каждое пространство с линейной инволюцией является прямой суммой собственных подпространств с собственными значениями  $\pm 1$ . Таким образом,  $\operatorname{End}(V) = \operatorname{End}^+(V) \oplus \operatorname{End}^-(V)$ , где

$$\operatorname{End}^+(V) \stackrel{\text{def}}{=} \{F: V \rightarrow V \mid F^\times = F\} \quad \text{и} \quad \operatorname{End}^-(V) \stackrel{\text{def}}{=} \{F: V \rightarrow V \mid F^\times = -F\}. \quad (12-6)$$

Операторы из  $\operatorname{End}^+(V)$  называются *самосопряжёнными* и характеризуются тем, что для любых векторов  $u, w \in V$  выполняется равенство  $(Fu, w) = (u, Fw)$ . Матрица такого оператора в ортонормальном базисе симметрична относительно главной диагонали, т. е. не меняется при транспонировании. Операторы из  $\operatorname{End}^-(V)$  называются *антисамосопряжёнными* и характеризуются тем, что для любых векторов  $u, w \in V$  выполняется равенство  $(Fu, w) = -(u, Fw)$ . Матрица такого оператора в ортонормальном базисе кососимметрична, т. е. меняет при транспонировании знак. Разложение произвольного оператора  $F$  в сумму самосопряжённого и антисамосопряжённого задаётся формулой  $F = (F + F^\times)/2 + (F - F^\times)/2$ .

ЛЕММА 12.2

Если (анти)самосопряжённый линейный оператор  $F: V \rightarrow V$  переводит в себя некоторое подпространство  $U \subset V$ , то он переводит в себя и его ортогонал  $U^\perp$ .

Доказательство. Пусть  $w \in U^\perp$ , т. е.  $(u, w) = 0$  для всех  $u \in U$ . Тогда  $(u, Fw) = \pm(Fu, w) = 0$  для всех  $u \in U$ , ибо  $Fu \in U$ . Тем самым,  $Fw \in U^\perp$ .  $\square$

<sup>1</sup>См. упр. 11.4 на стр. 136.

<sup>2</sup>См. предл. 7.3 на стр. 94.

## ЛЕММА 12.3

Собственные векторы с разными собственными значениями у самосопряжённого оператора ортогональны друг другу.

Доказательство. Если  $Fu = \lambda u$  и  $Fw = \mu w$ , то из равенства  $(Fu, w) = (u, Fw)$  вытекает равенство  $(\lambda - \mu) \cdot (u, w) = 0$ .  $\square$

УПРАЖНЕНИЕ 12.4. Покажите, что все одномерные инвариантные подпространства антисамосопряжённого оператора содержатся в его ядре (в частности, у антисамосопряжённого оператора нет ненулевых вещественных собственных чисел).

## ТЕОРЕМА 12.3 (ТЕОРЕМА О НОРМАЛЬНОМ БАЗИСЕ)

Каждый самосопряжённый оператор  $F$  на конечномерном евклидовом пространстве можно диагонализировать в некотором ортонормальном базисе.

Доказательство. Индукция по  $\dim V$ . Если  $\dim V = 1$ , доказывать нечего. Если  $\dim V = 2$ , оператор  $F$  задаётся в произвольно взятом ортонормальном базисе  $e$  симметричной матрицей

$$F_e = F_e^t = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}.$$

Её характеристический многочлен  $\det(tE - F_e) = t^2 - (a + c) \cdot t + (ac - b^2)$  имеет неотрицательный дискриминант  $(a + c)^2 - 4(ac - b^2) = (a - c)^2 + 4b^2$  и вещественные корни. Следовательно, у  $F$  есть одномерное инвариантное подпространство  $U \subset V$ , порождённое ненулевым собственным вектором. По лем. 12.2 ортогональное дополнение  $U^\perp$  также является одномерным  $F$ -инвариантным подпространством. Выбирая в  $U$  и  $U^\perp$  базисные векторы единичной длины, получаем ортонормальный базис, в котором матрица оператора  $F$  диагональна. При  $\dim V \geq 3$  у оператора  $F$  имеется одномерное или двумерное инвариантное подпространство  $U \subset V$ , и его ортогональное дополнение  $U^\perp$  тоже  $F$ -инвариантно по лем. 12.2. По индукции, в  $U$  и  $U^\perp$  есть ортонормальные базисы из собственных векторов оператора  $F$ . Объединение этих базисов даёт искомый базис в  $V$ .  $\square$

## ТЕОРЕМА 12.4 (КАНОНИЧЕСКИЙ ВИД АНТИСАМОСOPЯЖЁННОГО ОПЕРАТОРА)

Каждый антисамосопряжённый оператор  $F$  на конечномерном евклидовом пространстве имеет в подходящем ортонормальном базисе матрицу, ненулевые элементы которой исчерпываются расположенными на главной диагонали  $2 \times 2$  блоками вида

$$\begin{pmatrix} 0 & a_i \\ -a_i & 0 \end{pmatrix}, \quad \text{где } a_i > 0,$$

причём набор этих блоков с точностью до перестановки не зависит от выбора такого базиса.

Доказательство. Индукция по  $\dim V$ . Если  $F = 0$ , что так при  $\dim V = 1$ , то доказывать нечего. Если  $\dim V = 2$  и  $F \neq 0$ , то в любом ортонормальном базисе  $e$  оператор  $F$  имеет антисимметричную матрицу

$$F_e = -F_e^t = \begin{pmatrix} 0 & a \\ -a & 0 \end{pmatrix}.$$

Меняя при необходимости знак у первого базисного вектора, можно считать, что  $a > 0$ . При  $\dim V \geq 3$  у оператора  $F$  имеется одномерное или двумерное инвариантное подпространство

$U \subset V$ , и его ортогональное дополнение  $U^\perp$  тоже  $F$ -инвариантно по лем. 12.2. По индукции, в  $U$  и  $U^\perp$  есть ортонормальные базисы, в которых матрицы ограничений  $F|_U$  и  $F|_{U^\perp}$  имеют требуемый вид. Объединение этих базисов даёт искомый базис в  $V$ . Поскольку характеристический многочлен оператора  $F$  является произведением монома  $t^m$ , где  $m = \dim \ker F = \dim V - \operatorname{rk} F$ , и неприводимых двучленов  $(t^2 + \alpha_i^2)$  по всем диагональным  $2 \times 2$  блокам матрицы  $F_e$ , набор блоков не зависит от выбора базиса в силу единственности разложения на неприводимые множители в  $\mathbb{R}[t]$ .  $\square$

**12.4. Сингулярные числа и сингулярные направления.** В этом разделе мы покажем, что каждое линейное отображение  $F : U \rightarrow W$  однозначно раскладывается в композицию  $F = GSP$  ортогональной проекции  $P : U \rightarrow V$  на ортогональное дополнение  $V = (\ker F)^\perp \subset U$  к ядру оператора  $F$ , невырожденного самосопряжённого оператора  $S : V \rightarrow V$ , представляющего собою композицию коммутирующих друг с другом растяжений с положительными коэффициентами во взаимно перпендикулярных направлениях, и ортогонального вложения  $G : V \hookrightarrow W$ . Ортогональные направления, вдоль которых растягивает подпространство  $V \subset U$  оператор  $S$ , и коэффициенты этих растяжений называются, соответственно, *сингулярными направлениями* и *сингулярными числами* линейного отображения  $F$ .

ЛЕММА 12.4

Для любого линейного отображения  $F : U \rightarrow W$  между евклидовыми пространствами  $U, W$  обе композиции  $FF^\times \in \operatorname{End}(W)$ ,  $F^\times F \in \operatorname{End}(U)$  являются самосопряжёнными линейными операторами с неотрицательными собственными числами. Отображение  $F$  сюръективно (соотв. инъективно) если и только если все собственные числа оператора  $FF^\times$  (соотв.  $F^\times F$ ) строго положительны.

Доказательство. Каждый из операторов  $FF^\times$  и  $F^\times F$  очевидно самосопряжён и следовательно диагонализуем по теор. 15.7 на стр. 188. Если для некоторого ненулевого вектора  $w \in W$  выполняется равенство  $FF^\times w = \lambda w$ , то  $(F^\times w, F^\times w) = (FF^\times w, w) = \lambda \cdot (w, w)$  и либо  $w \in \ker F^\times$  и  $\lambda = 0$ , либо  $\lambda = (F^\times w, F^\times w) / (w, w) > 0$ . Аналогично, если  $F^\times F u = \mu u$  для ненулевого  $u \in U$ , то либо  $\mu = 0$  и  $u \in \ker F$ , либо  $\mu = (Fu, Fu) / (u, u) > 0$ . Поэтому все ненулевые собственные числа каждого из операторов положительны. Если  $\operatorname{im} F = W$ , то  $\ker F^\times = (\operatorname{im} F)^\perp = 0$ , откуда все собственные числа оператора  $FF^\times$  положительны. Наоборот, если  $\operatorname{im} F \neq W$ , то  $\ker FF^\times \supset \ker F^\times = (\operatorname{im} F)^\perp \neq 0$ . Аналогично, если  $\ker F = 0$ , то все собственные числа оператора  $F^\times F$  строго положительны, и наоборот, если  $\ker F \neq 0$ , то и  $\ker F^\times F \supset \ker F \neq 0$ .  $\square$

ТЕОРЕМА 12.5

Каждое линейное отображение  $F : U \rightarrow W$  между евклидовыми пространствами  $U, W$  единственным образом раскладывается в композицию  $F = G_F \circ S_F \circ P_F$  ортогональной проекции  $P_F : U \rightarrow V$  на ортогональное дополнение  $V \stackrel{\text{def}}{=} \ker^\perp F$  к ядру  $\ker F \subset U$ , невырожденного самосопряжённого оператора  $S_F : V \rightarrow V$  с положительными собственными значениями  $\alpha_1, \dots, \alpha_r$ , где  $r = \operatorname{rk} F = \dim \operatorname{im} F$ , и изометрического вложения  $G_F : V \hookrightarrow W$ . При этом набор  $\alpha_1^2, \dots, \alpha_r^2$  квадратов собственных чисел оператора  $S_F$  является набором всех (с учётом кратностей) ненулевых собственных чисел оператора  $F^\times F : U \rightarrow U$ .

Доказательство. Согласно теор. 15.7 на стр. 188 в евклидовом пространстве  $U$  имеется ортонормальный базис, состоящий из собственных векторов  $u_1, \dots, u_n$  самосопряжённого линейного

<sup>1</sup>См. предл. 12.2 на стр. 149.

оператора  $F^\times F : U \rightarrow U$ , причём все собственные значения этого оператора неотрицательны по лем. 12.4, т. е.  $F^\times F u_i = \alpha_i^2 u_i$  для некоторых вещественных  $\alpha_i \geq 0$ . Перенумеруем базис так, чтобы  $\alpha_i \neq 0$  при  $1 \leq i \leq r$  и  $\alpha_i = 0$  при  $i > r$ . Тогда, как мы видели в доказательстве лем. 12.4, все векторы  $u_i$  с  $i > r$  лежат в ядре отображения  $F$ . Напротив, при  $1 \leq i, j \leq r$  равенства

$$(F u_i, F u_j) = (F^\times F u_i, u_j) = \alpha_i^2 (u_i, u_j) = \begin{cases} \alpha_i^2 > 0 & \text{при } i = j \\ 0 & \text{при } i \neq j \end{cases}$$

показывают, что векторы  $w_i = F u_i / \alpha_i$  образуют в пространстве  $W$  ортонормальную систему. В частности, они линейно независимы. Так как  $F(u_j) = 0$  при  $j > r$ , для любого  $u = \sum x_i u_i \in U$  выполняется равенство  $F(u) = \alpha_1 x_1 w_1 + \dots + \alpha_r x_r w_r$ , т. е. векторы  $w_i$  с  $1 \leq i \leq r$  составляют ортонормальный базис в  $\text{im } F$ , а векторы  $u_i$  с  $1 \leq i \leq r$  — ортонормальный базис в ортогональном дополнении  $V$  к ядру  $\ker F$ . Оператор  $F$  является композицией изометрического изоморфизма  $G_F : V \xrightarrow{\sim} \text{im } F$ ,  $u_i \mapsto w_i$ , диагонального оператора  $S_F : V \rightarrow V$ ,  $u_i \mapsto \alpha_i u_i$ , и ортогональной проекции  $P_F : U \rightarrow V$  вдоль  $\ker F$ .

Если имеется какое-либо ещё разложение  $F = G S P_F$ , где  $P_F : U \rightarrow V$  — ортогональная проекция вдоль  $\ker F$ , то из предыдущего рассуждения вытекает, что пространство  $V = (\ker F)^\perp$  является прямой ортогональной суммой всех собственных подпространств  $V_i$  оператора  $F^\times F$ , отвечающих ненулевым собственным значениям  $\alpha_i^2$  этого оператора, а композиция  $G S : V \xrightarrow{\sim} \text{im } F$  совпадает с ограничением  $F|_V$ . Поскольку  $S^\times = S$  как операторы  $V \rightarrow V$ , а  $G^\times = G^{-1}$  как изометрические операторы  $\text{im } F \xrightarrow{\sim} V$ , мы заключаем, что  $F^\times F|_V = S^2$ . Так как оператор  $S^2$  диагонализует в том же самом базисе, что и  $S$ , мы заключаем, что самосопряжённый оператор  $S$  действует на каждом подпространстве  $V_i$  умножением на  $\alpha_i$  и, тем самым, определяется по  $F$  однозначно. А тогда и  $G = S^{-1} \circ F|_V : V \rightarrow W$  определяется однозначно.  $\square$

**Упражнение 12.5.** Убедитесь, что оператор  $F^\times : W \rightarrow V$  действует на построенные в доказательстве теор. 12.5 векторы  $w_1, \dots, w_r \in W$  по правилу  $w_i \mapsto \alpha_i u_i$  и аннулирует ортогональное дополнение к их линейной оболочке. Выведите отсюда, что множества всех (с учётом кратностей) ненулевых собственных чисел у операторов  $F^\times F$  и  $F F^\times$  одинаковы.

**Определение 12.1** (сингулярные числа и сингулярные направления)

В условиях теор. 12.5 набор из  $\dim U$  неотрицательных квадратных корней  $\alpha_i$  из собственных значений самосопряжённого оператора  $F^\times F : U \rightarrow U$  называется *набором сингулярных чисел* линейного отображения  $F : U \rightarrow W$  между евклидовыми пространствами  $U, W$ . Ровно  $\text{rk } F$  из них строго положительны. Одномерные инвариантные подпространства<sup>1</sup> оператора  $F^\times F$  называются *сингулярными направлениями* отображения  $F$ .

**Пример 12.6** (этимология эпитета «сингулярный»)

Свяжем с отображением  $F : U \rightarrow W$  функцию  $\varphi : U \setminus 0 \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $u \mapsto (F u, F u) / (u, u)$ . Покажем, что её производная зануляется ровно на собственных направлениях оператора  $F^\times F$ .

**Упражнение 12.6.** Покажите, что  $(u, u)'(v) = 2(u, v)$  и  $(F u, F u)'(v) = 2(F u, F v) = 2(F^\times F u, v)$ .

Согласно правилу дифференцирования дробей, условие  $\varphi'(u) = 0$  равносильно тому, что для любого  $v \in V$  выполняется равенство  $2(F^\times F u, v)(u, u) - 2(F u, F u)(u, v) = 0$ , означающее, что  $F^\times F u = u \cdot (F u, F u) / (u, u)$ , т. е. что вектор  $u$  является собственным для оператора  $F^\times F$  с собственным значением  $(F u, F u) / (u, u) = (F^\times F u, u) / (u, u)$ .

<sup>1</sup>Т. е. одномерные подпространства, порождённые ненулевыми собственными векторами.



Следствие 12.3 (полярное разложение)

Каждое биективное линейное преобразование  $F \in \text{GL}(V)$  евклидова пространства  $V$  допускает единственное разложение  $F = G_F S_F$ , в котором оператор  $G_F \in \text{O}(V)$  ортогонален, а  $S_F \in \text{GL}(V)$  самосопряжён и имеет положительные собственные значения. Квадраты этих собственных значений являются собственными числами оператора  $F^\times F$ .

Доказательство. Поскольку оператор  $F$  биективен, правый член его канонического разложения  $F = G_F \circ S_F \circ P_F$  из теор. 12.5 является тождественным отображением, а самосопряжённый оператор  $S_F$  не имеет ядра. Следовательно все собственные числа оператора  $S_F$  строго положительны.  $\square$

Замечание 12.2. (явные формулы для  $G_F$  и  $S_F$ ) Компоненты  $G_F \in \text{O}(V)$  и  $S_F$  полярного разложения  $F = G_F \circ S_F$  однозначно находятся из условий  $G_F^\times G_F = \text{Id}_V$  и  $S_F^\times = S_F$ . А именно,

$$F^\times F = S_F^\times G_F^\times G_F S_F = S_F^2,$$

откуда  $S_F = \sqrt{F^\times F}$  и  $G_F = F S_F^{-1}$ . Отметим, что так как нуль не является собственным числом оператора  $F^\times F$ , аналитическая вне нуля функция  $\sqrt{t}$  алгебраически вычислима на операторе  $F^\times F$  при помощи стандартной интерполяционной процедуры из н° 10.4.1 на стр. 127.

Упражнение 12.7. Покажите, что каждый невырожденный линейный оператор  $F \in \text{GL}(V)$  на евклидовом пространстве  $V$  также допускает единственное разложение  $F = SR$ , в котором  $R \in \text{O}(V)$ , а  $S$  самосопряжён и имеет положительные собственные значения, квадраты которых равны собственным числам оператора  $F F^\times$ .

Пример 12.7

Найдём полярное разложение  $F = GS$  для оператора  $F: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  с матрицей

$$F = \begin{pmatrix} 22/15 & -4/3 & 4/15 \\ 4/15 & 2/3 & 28/15 \\ 2/3 & 2/3 & -1/3 \end{pmatrix}$$

в стандартном базисе. Поскольку  $\det F = -4$ , оператор  $F$  невырожден. Самосопряжённый оператор  $F^\times F$  имеет матрицу

$$C = F^t F = \begin{pmatrix} 22/15 & 4/15 & 2/3 \\ -4/3 & 2/3 & 2/3 \\ 4/15 & 28/15 & -1/3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 22/15 & -4/3 & 4/15 \\ 4/15 & 2/3 & 28/15 \\ 2/3 & 2/3 & -1/3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8/3 & -4/3 & 2/3 \\ -4/3 & 8/3 & 2/3 \\ 2/3 & 2/3 & 11/3 \end{pmatrix}$$

у которой след  $\text{tr}(C) = 9$ , сумма главных  $2 \times 2$ -миноров

$$\det \begin{pmatrix} 8/3 & -4/3 \\ -4/3 & 8/3 \end{pmatrix} = 16/3, \quad \det \begin{pmatrix} 8/3 & 2/3 \\ 2/3 & 11/3 \end{pmatrix} = 28/3, \quad \det \begin{pmatrix} 8/3 & 2/3 \\ 2/3 & 11/3 \end{pmatrix} = 28/3$$

равна 24, определитель  $\det(C) = \det^2 F = 16$  и характеристический многочлен

$$\det(tE - C) = t^3 - 9t^2 + 24t - 16 = (t - 1)(t - 4)^2.$$

Так как оператор  $F^{\times}F$  диагонализуем, он аннулируется многочленом<sup>1</sup>  $(t-1)(t-4)$ . Следовательно, матрица  $H = \sqrt{C}$  самосопряжённого сомножителя  $h$  полярного разложения  $F = gh$  имеет вид<sup>2</sup>  $aE + bC$ , где интерполяционный многочлен  $p(t) = a + bt$  для вычисления функции  $\sqrt{t}$  на матрице  $C$  однозначно определяется тем, что  $p(1) = \sqrt{1} = 1$  и  $p(4) = \sqrt{4} = 2$ , т. е.  $a + b = 1$  и  $a + 4b = 2$ , откуда  $a = 2/3$ ,  $b = 1/3$ . Таким образом, полярное разложение имеет вид  $F = GH$ , где самосопряжённая матрица  $H = \sqrt{C}$  равна

$$\begin{pmatrix} 2/3 & 0 & 0 \\ 0 & 2/3 & 0 \\ 0 & 0 & 2/3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 8/9 & -4/9 & 2/9 \\ -4/9 & 8/9 & 2/9 \\ 2/9 & 2/9 & 11/9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 14/9 & -4/9 & 2/9 \\ -4/9 & 14/9 & 2/9 \\ 2/9 & 2/9 & 17/9 \end{pmatrix}$$

а ортогональная матрица  $G = FH^{-1}$  равна

$$\begin{pmatrix} 22/15 & -4/3 & 4/15 \\ 4/15 & 2/3 & 28/15 \\ 2/3 & 2/3 & -1/3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 13/18 & 2/9 & -1/9 \\ 2/9 & 13/18 & -1/9 \\ -1/9 & -1/9 & 5/9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11/15 & -2/3 & 2/15 \\ 2/15 & 1/3 & 14/15 \\ 2/3 & 2/3 & -1/3 \end{pmatrix}$$

УПРАЖНЕНИЕ 12.8. Убедитесь, что  $G^t G = E$ .

Следствие 12.4 (SVD-разложение<sup>3</sup>)

Каждая вещественная прямоугольная матрица  $F \in \text{Mat}_{m \times n}(\mathbb{R})$  раскладывается в произведение  $F = T_m D T_n$ , в котором матрицы  $T_m \in O_m$  и  $T_n \in O_n$  ортогональны, а  $m \times n$ -матрица  $D = (d_{ij})$  диагональна и неотрицательна в том смысле, что  $d_{ij} = 0$  при  $i \neq j$ , а все  $d_{ii} \geq 0$ . При этом ровно  $\text{rk } F$  диагональных элементов матрицы  $D$  отлично от нуля, и они с точностью до перестановки диагональных элементов не зависят от выбора указанного разложения.

Доказательство. Будем воспринимать  $F = F_{mn}$  как записанную в стандартных базисах  $\mathbf{n}$  и  $\mathbf{m}$  пространств  $U = \mathbb{R}^n$  и  $W = \mathbb{R}^m$  матрицу линейного оператора  $F: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ . Обозначим через  $\mathbf{u} = (u_1, \dots, u_n)$  ортонормальный базис пространства  $U$ , построенный в доказательстве теор. 12.5, а через  $\mathbf{w} = (w_1, \dots, w_m)$  — любой ортонормальный базис пространства  $W$ , содержащий ортонормальный набор векторов  $w_i = F(u_i) / \alpha_i$ ,  $1 \leq i \leq r$ , из доказательства теор. 12.5. Оператор  $F: u_i \mapsto \alpha_i w_i$  задаётся в базисах  $\mathbf{u}$  и  $\mathbf{w}$  диагональной матрицей  $D = F_{wu}$ , ненулевые диагональные элементы которой суть сингулярные числа  $\alpha_1, \dots, \alpha_n$  оператора  $F$ . Поэтому  $F = F_{mn} = C_{mw} F_{wu} C_{un}$ , где  $C_{mw}$  — ортогональная матрица перехода от базиса  $\mathbf{w}$  к стандартному базису  $\mathbf{m}$  в  $\mathbb{R}^m$ , а  $C_{un} = C_{nu}^{-1} = C_{nu}^t$  — ортогональная матрица перехода от стандартного базиса  $\mathbf{n}$  в  $\mathbb{R}^n$  к базису  $\mathbf{u}$ . Для любого другого разложения  $F = T_m A T_n$  с ортогональными  $T_n, T_m$  и диагональной матрицей  $A$  имеем  $F^t F = T_n^{-1} A^t A T_n$ . Поскольку подобные матрицы имеют одинаковые с точностью до перестановки собственные числа, стоящие на диагонали диагональной матрицы  $A^t A$  квадраты диагональных элементов матрицы  $A$  суть собственные числа матрицы  $F^t F$ .  $\square$

<sup>1</sup>См. предл. 10.4 на стр. 124.

<sup>2</sup>См. п. 10.4.1 на стр. 127.

<sup>3</sup>«SVD» является аббревиатурой от английского *singular values decomposition*.

### §13. Выпуклая геометрия

Всюду в этом параграфе речь идёт про конечномерные векторные и аффинные пространства над полем  $\mathbb{R}$ .

**13.1. Выпуклые фигуры.** Барицентрическая комбинация<sup>1</sup>  $x_1 p_1 + x_2 p_2 + \dots + x_m p_m$  точек  $p_i$  вещественного аффинного пространства  $\mathbb{A}^n$  называется *выпуклой*, если все её коэффициенты  $x_i \geq 0$ . Фигура  $\Phi \subset \mathbb{A}^n$  называется *выпуклой*, если она содержит все выпуклые барицентрические комбинации любых своих точек. Из теоремы о группировании масс<sup>2</sup> вытекает, что для выпуклости фигуры необходимо и достаточно, чтобы вместе с любыми двумя своими точками  $a, b$  она содержала и соединяющий их *отрезок*

$$[a, b] \stackrel{\text{def}}{=} \{ \lambda a + \mu b \mid \lambda + \mu = 1, \lambda, \mu > 0 \}.$$

Очевидно, что пересечение выпуклых фигур выпукло. Пересечение всех выпуклых фигур, содержащих данную фигуру  $\Phi$ , называется *выпуклой оболочкой* фигуры  $\Phi$  и обозначается  $\text{conv } \Phi$ . Иначе  $\text{conv } \Phi$  можно описать как множество всех выпуклых барицентрических комбинаций всевозможных конечных наборов точек фигуры  $\Phi$ : это множество выпукло по [упр. 1.8](#) и содержится в любом выпуклом множестве, содержащем фигуру  $\Phi$ .

**13.1.1. Топологическое отступление.** Для произвольного вещественного  $\varepsilon > 0$  мы называем  $\varepsilon$ -окрестностью точки  $p = (p_1, p_2, \dots, p_n) \in \mathbb{R}^n$  правильный куб с центром в  $p$  и направленными вдоль стандартных координатных осей рёбрами длины  $2\varepsilon$ :

$$B_\varepsilon(p) \stackrel{\text{def}}{=} \{ x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n : \forall i |x_i - p_i| \leq \varepsilon \}. \quad (13-1)$$

Подмножество  $U \subset \mathbb{R}^n$  *открыто*<sup>3</sup>, если вместе с каждой точкой  $p \in U$  в  $U$  лежит и какая-нибудь её  $\varepsilon$ -окрестность  $B_\varepsilon(p)$ . Кубы (13-1) являются шарами радиуса  $\varepsilon$  относительно *sup-нормы*

$$\|(x_1, x_2, \dots, x_n)\|_{\text{sup}} = \max_i |x_i|.$$

Рассматриваемая нами топология является *метрической топологией*, определяемой при помощи этой нормы. Поскольку все нормы на векторном пространстве  $\mathbb{R}^n$  задают одну и ту же топологию, данное выше определение открытого множества не зависит от выбора системы координат, использованной для определения  $\varepsilon$ -окрестностей.

Упражнение 13.1. Докажите это непосредственно, без ссылок на курс топологии.

Напомню, что точка  $p$  называется *внутренней* точкой фигуры  $\Phi$ , если она лежит в  $\Phi$  вместе с некоторой своей  $\varepsilon$ -окрестностью. Множество внутренних точек фигуры  $\Phi$  обозначается  $\text{int } \Phi$ . Внутренние точки дополнения  $\mathbb{A}^n \setminus \Phi$  называются *внешними* точками фигуры  $\Phi \subset \mathbb{A}^n$ . Точки, не являющиеся ни внешними, ни внутренними, называются *границными*. Множество граничных точек фигуры  $\Phi$  обозначается  $\partial \Phi$ . Объединение  $\bar{\Phi} = \Phi \cup \partial \Phi$  называется *замыканием* фигуры  $\Phi$ .

Упражнение 13.2. Покажите, что  $p \in \partial \Phi$  если и только если в любой  $\varepsilon$ -окрестности точки  $p$  имеются как точки фигуры  $\Phi$ , так и точки не лежащие в  $\Phi$ , и докажите, что замыкание  $\bar{\Phi}$  является наименьшим по включению замкнутым множеством, содержащим  $\Phi$ .

<sup>1</sup>См. н° 1.4.2 на стр. 17.

<sup>2</sup>См. [упр. 1.8](#) на стр. 18.

<sup>3</sup>Все необходимые нам сведения из курса топологии имеются в лекции:

[http://gorod.bogomolov-lab.ru/ps/stud/geom\\_ru/1617/lec\\_08.pdf](http://gorod.bogomolov-lab.ru/ps/stud/geom_ru/1617/lec_08.pdf).

## Предложение 13.1

Внутренность и замыкание любой выпуклой фигуры выпуклы.

Доказательство. Первое вытекает из того, что если точки  $a$  и  $b$  содержатся в выпуклом множестве  $\Phi$  вместе с некоторыми  $\varepsilon$ -кубами  $B_\varepsilon(a), B_\varepsilon(b) \subset \Phi$ , то все точки отрезка  $[ab]$  содержатся в  $\Phi$  вместе с такими же  $\varepsilon$ -кубами, см. рис. 13◊1. Второе — из того, что если  $a = \lim_{k \rightarrow \infty} a_k$  и  $b = \lim_{k \rightarrow \infty} b_k$ , то при любых фиксированных  $\lambda$  и  $\mu$  предел  $\lim_{k \rightarrow \infty} (\lambda a_k + \mu b_k) = \lambda \lim_{k \rightarrow \infty} a_k + \mu \lim_{k \rightarrow \infty} b_k = \lambda a + \mu b$ . Таким образом, каждая точка отрезка  $[a, b]$  является пределом последовательности точек фигуры  $\Phi$ , если таковыми являются концы  $a, b$  этого отрезка.  $\square$

Упражнение 13.3. Докажите, что замкнутое выпуклое множество с непустой внутренностью является замыканием множества своих внутренних точек, и приведите пример невыпуклого замкнутого множества с непустой внутренностью, которое не является замыканием множества своих внутренних точек.

## Пример 13.1 (симплексы)

Выпуклая оболочка  $n+1$  точек  $p_0, p_1, \dots, p_n$ , не лежащих в  $(n-1)$ -мерной плоскости, называется  $n$ -мерным симплексом с вершинами в этих точках и обозначается

$$[p_0, p_1, \dots, p_n] = \left\{ \sum_{i=0}^n x_i p_i \mid \sum_{i=0}^n x_i = 1, x_i \geq 0 \right\}. \quad (13-2)$$

Одномерные, двумерные и трёхмерные симплексы суть отрезки, треугольники и тетраэдры соответственно. В порождённом вершинами симплекса пространстве  $\mathbb{A}^n$ , в аффинных координатах  $(x_1, x_2, \dots, x_n)$  относительно репера с началом в  $p_0$  и базисными векторами  $e_i = \overrightarrow{p_0 p_i}$ , где  $1 \leq i \leq n$ , симплекс (13-2) задаётся системой из  $(n+1)$  линейных неоднородных неравенств

$$x_1 \geq 0, \dots, x_n \geq 0, x_1 + x_2 + \dots + x_n \leq 1. \quad (13-3)$$

Поскольку в точке с координатами  $(\frac{1}{2n}, \frac{1}{2n}, \dots, \frac{1}{2n})$  все эти неравенства выполнены строго, она принадлежит симплексу вместе с некоторым  $\varepsilon$ -кубом, т. е. каждый симплекс имеет непустую внутренность. В частности, выпуклая оболочка любых  $(n+1)$  не лежащих в одной гиперплоскости точек пространства  $\mathbb{R}^n$  имеет непустую внутренность.

Упражнение 13.4. Проверьте, что граница симплекса  $[p_0, p_1, \dots, p_n]$  является объединением всевозможных симплексов вида  $[p_{v_1}, p_{v_2}, \dots, p_{v_m}]$ , где  $m < n$  и  $v_i \in \{0, 1, \dots, n\}$ .

**13.2. Опорные полупространства.** Мы называем аффинными функционалами на пространстве  $\mathbb{A}^n = \mathbb{A}(V)$  аффинные отображения<sup>1</sup>  $a: \mathbb{A}^n \rightarrow \mathbb{R}$ . Если произвольно фиксировать начальную точку  $c \in \mathbb{A}^n$ , то действие такого функционала на точку  $p \in \mathbb{A}^n$  задаётся формулой

$$a(p) = a(c) + \alpha(\overrightarrow{c p}),$$

которую мы будем коротко записывать в виде  $a = a_c + \alpha$ , где  $a_c = a(c) \in \mathbb{R}$ , а дифференциал  $\alpha = D_a \in V^*$  не зависит от  $c$ . Ограничение аффинного функционала  $a: \mathbb{A}^n \rightarrow \mathbb{R}$  на любой

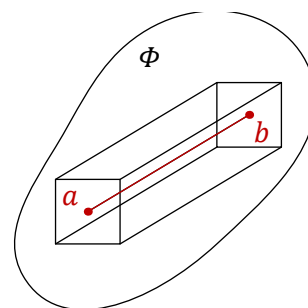


Рис. 13◊1. Выпуклость внутренности.

<sup>1</sup>См. п.° 2.1 на стр. 24.

отрезок  $[p, q] \subset \mathbb{A}^n$  представляет собою «школьную линейную функцию»  $a(x) = \alpha x + \beta$  на этом отрезке, и для неё имеются следующие исключаяющие друг друга возможности: она либо тождественно нулевая, либо нигде не обращается в нуль и имеет на всём отрезке постоянный знак, либо зануляется ровно в одной точке  $z \in [p, q]$ . В последнем случае имеется дальнейшая альтернатива: либо точка  $z$  является одним из концов отрезка, и функционал  $a$  имеет постоянный знак на полуинтервале  $[p, q] \setminus z$ , либо  $z \in (a, b)$ , а  $a$  имеет постоянные и противоположные друг другу знаки на полуинтервалах  $[p, z)$  и  $(z, b]$ . Таким образом, каждый непостоянный аффинный функционал  $a : \mathbb{A}^n \rightarrow \mathbb{R}$  задаёт разбиение аффинного пространства  $\mathbb{A}^n$  в дизъюнктное объединение аффинной гиперплоскости  $H_a = \{p \in \mathbb{A}^n \mid a(p) = 0\}$  и двух выпуклых открытых полупространств  $\text{int } H_a^+ = \{p \in \mathbb{R}^n \mid a(p) > 0\}$  и  $\text{int } H_a^- = \{p \in \mathbb{R}^n \mid a(p) < 0\}$ , которые являются внутренностями двух замкнутых полупространств  $H_a^+ = \{p \in \mathbb{R}^n \mid a(p) \geq 0\}$  и  $H_a^- = \{p \in \mathbb{R}^n \mid a(p) \leq 0\}$  с общей границей  $\partial H_a^+ = \partial H_a^- = H_a$ . Каждый отрезок  $[p, q]$  с  $p \in \text{int } H^+$  и  $q \in \text{int } H_a^-$  пересекает гиперплоскость  $H_a$  в единственной точке, и она является внутренней точкой отрезка  $[p, q]$ .

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ 13.1 (ОПОРНЫЕ ГИПЕРПЛОСКОСТИ И ПОЛУПРОСТРАНСТВА)**

Гиперплоскость  $H_a \subset \mathbb{A}^n$  называется *опорной гиперплоскостью* фигуры  $\Phi \subset \mathbb{A}^n$ , если  $H_a \cap \partial\Phi \neq \emptyset$  и  $\Phi \subset H_a^+$ . В этой ситуации замкнутое полупространство  $H_a^+$  называется *опорным полупространством*, а аффинный функционал  $a$  — *опорным функционалом* фигуры  $\Phi$ .

**ЛЕММА 13.1**

Для любого открытого выпуклого множества  $U$  в аффинном пространстве размерности  $n \geq 2$  через каждую точку  $p \notin U$  можно провести не пересекающую  $U$  прямую.

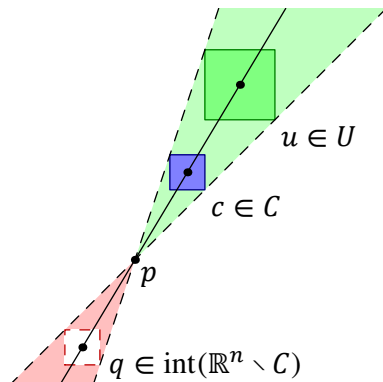


Рис. 13◊2. Открытость  $C$  и непустота  $\text{int}(\mathbb{A}^n \setminus C)$ .

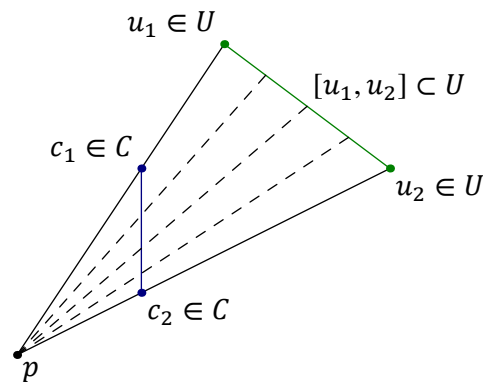


Рис. 13◊3. Выпуклость  $C$ .

**Доказательство.** Обозначим через  $C$  объединение всех открытых лучей

$$]p, u) \stackrel{\text{def}}{=} \{p + t \cdot \overline{pu} \mid u \in U, t > 0\},$$

начинающихся в  $p$  и проходящих через всевозможные точки  $u \in U$ . Из рис. 13◊2 и рис. 13◊3 очевидно, что  $C$  является открытой выпуклой фигурой, и  $p \in \partial C$ . Так как  $U \subset C$ , достаточно провести через  $p$  прямую, не пересекающую  $C$ . Из выпуклости  $C$  следует, что любая проходящая через  $p$  прямая  $\ell$  либо не пересекает  $C$ , либо пересекает  $C$  по одному из лучей  $]p, u)$ , все точки которого являются внутренними точками  $C$ , а все остальные отличные от  $p$  точки прямой  $\ell$  являются для  $C$  внешними, см. рис. 13◊2. В частности, внешние для  $C$  точки существуют.

Пусть  $q$  — одна из них. Поскольку объемлющее аффинное пространство по крайней мере двумерно, через  $q$  можно провести пересекающую  $C$  прямую, отличную от прямой  $(qp)$ . На ней имеется отличная от  $p$  граничная точка  $r$  конуса  $C$ . Тем самым, прямая  $(pr)$  не пересекает  $C$ .  $\square$

#### ТЕОРЕМА 13.1

Для любых открытого выпуклого множества  $U$  и не пересекающегося с ним аффинного подпространства  $\Pi$  в аффинном пространстве  $\mathbb{A}(V)$  существует аффинная гиперплоскость, содержащая  $\Pi$  и не пересекающая  $U$ .

Доказательство. Поместим начало координат внутрь  $\Pi$  и отождествим  $\Pi$  с векторным подпространством  $W \subset V$  (возможно нулевым). Обозначим через  $H \subset V$  какое-нибудь максимальное по включению векторное подпространство, содержащее  $W$  и не пересекающее  $U$ , а через  $H' \subset V$  — любое дополнительное к  $H$  векторное подпространство. Проекция пространства  $V = H \oplus H'$  на  $H'$  вдоль  $H$  переводит отрезки из  $\mathbb{A}(V)$  в отрезки или точки из  $\mathbb{A}(H')$ , а кубы из  $\mathbb{A}(V)$  со сторонами, направленными вдоль базисных векторов любого базиса в  $V$ , согласованного с разбиением  $V = H \oplus H'$ , — в аналогичные кубы в  $\mathbb{A}(H')$ . Поэтому множество  $U$  спроектируется в открытое выпуклое множество  $U' \subset \mathbb{A}(H')$ , не содержащее нуля, поскольку ядро проекции  $H$  не пересекается с  $U$ . Если  $\dim H' > 1$ , то по лем. 13.1 в  $H'$  найдётся одномерное подпространство  $L$ , не пересекающее  $U'$ . Но тогда подпространство  $H \oplus L \subset V$  не пересекает  $U$  и строго больше, чем  $H$ , вопреки выбору  $H$ . Поэтому  $\dim H' = 1$  и  $H$  является искомой гиперплоскостью.  $\square$

#### ТЕОРЕМА 13.2

Через каждую граничную точку  $p$  любой выпуклой фигуры  $\Phi$  можно провести опорную гиперплоскость (возможно, не единственную).

Доказательство. Если фигура  $\Phi \subset \mathbb{A}^n$  целиком лежит в какой-нибудь гиперплоскости, то эта гиперплоскость и будет опорной. Если же в  $\Phi$  есть  $n + 1$  точек, не лежащих в одной гиперплоскости, то  $\text{int } \Phi \neq \emptyset$  согласно прим. 13.1 на стр. 156. Проведём через  $p$  гиперплоскость  $H_a$ , не пересекающую  $\text{int } \Phi$ . Функционал  $a$  имеет на  $\text{int } \Phi$  постоянный знак, так как в противном случае, соединив точки разного знака отрезком, мы получим на этом отрезке нуль функционала, т. е. точку из  $H_a \cap \text{int } \Phi$ . Меняя, если нужно, знак у  $a$ , мы можем считать, что  $\text{int } \Phi \subset \text{int } H_a^+$ . Поскольку  $\Phi$  лежит в замыкании своей внутренней  $\text{int } \Phi$ , которое в свою очередь содержится в замкнутом полупространстве  $H_a^+$ , мы заключаем, что  $\Phi \subset H_a^+$ .  $\square$

#### ТЕОРЕМА 13.3

Всякое замкнутое выпуклое множество  $Z \subset \mathbb{R}^n$  является пересечением своих опорных полупространств.

Доказательство. Применяя индукцию по размерности наименьшего аффинного подпространства, содержащего  $Z$ , мы можем считать, что  $Z$  не содержится в гиперплоскости, а значит, имеет непустую внутренность. Покажем, что в этом случае каждая внешняя точка  $q \notin Z$  не лежит хотя бы в одном из опорных полупространств множества  $Z$ . Для этого соединим  $q$  отрезком  $[q, p]$  с какой-нибудь внутренней точкой  $p \in \text{int } Z$  и проведём опорное полупространство  $H_a^+$  к  $Z$  в граничной точке  $r \in [q, p] \cap \partial Z$ . Поскольку  $r$  лежит строго внутри  $[q, p]$ , из  $a(p) > 0$  и  $a(r) = 0$  следует, что  $a(q) < 0$ , т. е.  $q \notin H_a^+$ .  $\square$

**13.3. Грани и крайние точки.** Пересечение замкнутой выпуклой фигуры  $\Phi$  с любой её опорной гиперплоскостью называется *гранью* фигуры  $\Phi$ . Каждая грань фигуры  $\Phi$  тоже является замкнутым выпуклым множеством. Размерностью грани называется размерность наименьшего аффинного подпространства, содержащего эту грань. Отметим, что размерность любой грани фигуры  $\Phi \subset \mathbb{R}^n$  строго меньше  $n$ . Нульмерные грани (т. е. грани-точки) называются *вершинами*. Под внутренними, внешними и граничными точками грани понимаются таковые точки в топологии наименьшего аффинного подпространства, содержащего эту грань.

Интуитивное содержание термина «грань», основанное на опыте работы с многогранниками, не всегда адекватно при работе с произвольными выпуклыми замкнутыми множествами. Например, у шара имеется континуальное множество граней и все они нульмерны, а у фигуры на рис. 13◊4, где пара отрезков гладко сопрягается с овалами, есть две одномерных грани, нульмерные грани которых не являются гранями самой фигуры. Таким образом, грань грани замкнутой выпуклой фигуры  $\Phi$  может не быть гранью самой фигуры  $\Phi$ .

Точка  $p \in \Phi$  называется *крайней точкой* замкнутой выпуклой фигуры  $\Phi$ , если она не является внутренней точкой никакого отрезка  $[a, b] \subset \Phi$ . Крайняя точка не может быть внутренней точкой никакой замкнутой выпуклой фигуры, отличной от точки. Если же точка  $q$  является внутренней точкой какого-либо отрезка  $[a, b] \subset \Phi$ , то она может оказаться в грани фигуры  $\Phi$  только если весь отрезок  $[a, b]$  лежит в этой грани, поскольку в противном случае высекающий грань функционал менял бы на концах отрезка знак и не был бы опорным. Таким образом, крайние точки суть последние, нульмерные элементы всевозможных цепочек вида: фигура  $\Phi$ , грань фигуры  $\Phi$ , грань грани фигуры  $\Phi$ , грань грани грани фигуры  $\Phi$  и т. д., при условии, что такая цепочка действительно заканчивается нульмерной фигурой. В частности, все вершины фигуры  $\Phi$  являются её крайними точками. Обратите внимание, что крайние точки всех граней замкнутой выпуклой фигуры  $\Phi$  являются крайними и для  $\Phi$ , хотя при этом они могут не быть вершинами фигуры  $\Phi$ .

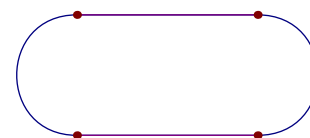


Рис. 13◊4.

#### ТЕОРЕМА 13.4

Каждая ограниченная замкнутая выпуклая фигура является выпуклой оболочкой своих крайних точек.

**Доказательство.** Индукция по размерности фигуры. Любая внутренняя точка фигуры является выпуклой комбинацией концов отрезка, высекаемого из фигуры произвольной проходящей через точку прямой. Эти концы лежат на гранях фигуры и по индукции являются выпуклыми комбинациями крайних точек этих граней. Последние являются крайними точками и для самой фигуры.  $\square$

#### ОПРЕДЕЛЕНИЕ 13.2 (цилиндры)

Замкнутая выпуклая фигура вида  $\Phi = \mathbb{A}(U) \times B \subset \mathbb{A}(U) \times \mathbb{A}(W)$ , где  $\dim U > 0$ , а  $B \subset \mathbb{A}(W)$  — непустая замкнутая выпуклая фигура, не содержащая аффинных подпространств положительной размерности, называется *цилиндром с основанием  $B$  и образующей  $\mathbb{A}(U)$* . Если основание  $B$  состоит из одной точки, цилиндр совпадает со своей образующей  $\mathbb{A}(U)$  и является аффинным пространством.

#### ПРЕДЛОЖЕНИЕ 13.2

Через каждую точку  $p$  любой замкнутой выпуклой фигуры  $\Phi \subset \mathbb{A}(V)$  проходит единственное максимальное по включению аффинное подпространство, целиком содержащееся в  $\Phi$ . Все та-

кие подпространства имеют одно и то же направляющее векторное пространство  $U \subset V$ . Если  $U \neq 0$ , то для любого дополнительного<sup>1</sup> векторного подпространства  $U' \subset V$  замкнутая выпуклая фигура  $\Phi' = \Phi \cap (p + U')$  не содержит аффинных пространств положительной размерности, и  $\Phi = \mathbb{A}(U) \times \Phi'$  является цилиндром с основанием  $\Phi'$  с образующей  $\mathbb{A}(U)$ .

Доказательство. Если аффинные подпространства  $p + W_1$  и  $p + W_2$  содержатся в  $\Phi$ , то  $\Phi$  содержит и аффинное подпространство  $p + (W_1 + W_2)$ , т. к. для любых  $w_1 \in W_1$  и  $w_2 \in W_2$  точка  $p + w_1 + w_2$  является серединой отрезка с концами в точках  $p + 2w_1$  и  $p + 2w_2$ . Поэтому аффинное пространство  $p + U$ , где  $U \subset V$  это сумма всех таких подпространств  $W \subset V$ , что  $p + W \subset \Phi$ , содержит все лежащие в  $\Phi$  аффинные подпространства, проходящие через  $p$ . Если  $q + W$  это максимальное содержащееся в  $\Phi$  аффинное подпространство, проходящее через точку  $q \notin p + U$ , то  $U \subset W$ , так как для любого вектора  $u \in U$  точка  $r = q + u$  является концом содержащегося в  $\Phi$  интервала  $[p, r[ = \{(1-t)p + tr \mid 0 \leq t < 1\}$  (см. рис. 13◊5), ибо

$$(1-t)p + t(q+u) = (1-t)\left(p + \frac{t}{1-t}u\right) + tq \in \Phi.$$

По той же причине  $W \subset U$ . Это доказывает первые два утверждения и первую половину третьего. Прямое разложение  $V = U \oplus U'$  задаёт разложение  $\mathbb{A}(V) = (p + U) \times (p + U')$ , в котором  $p + U \subset \Phi$ . Для любой точки  $q = p + u + u' \in \Phi$  точка  $p + u' = q - u \in q + U$  лежит в  $(p + U') \cap \Phi = \Phi'$ . Наоборот, для любой точки  $p + u' \in \Phi' \subset \Phi$  всё аффинное пространство  $p + u' + U \subset \Phi$ . Поэтому  $\Phi \subset (p + U) \times \Phi'$ .  $\square$

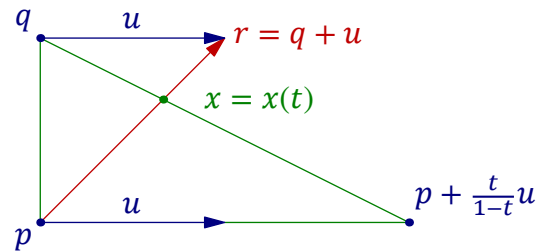


Рис. 13◊5.  $\overline{px} : \overline{xr} = t : (1-t)$ .

Следствие 13.1

Следующие свойства непустой замкнутой выпуклой фигуры  $\Phi$  эквивалентны друг другу:

- 1)  $\Phi$  является цилиндром
- 2)  $\Phi$  не имеет крайних точек
- 3)  $\Phi$  содержит аффинное подпространство положительной размерности.

Доказательство. Импликация (1)  $\Rightarrow$  (2). Если  $\Phi$  цилиндр, то через любую точку  $p \in \Phi$  проходит содержащееся в  $\Phi$  аффинное пространство положительной размерности. Поэтому никакая точка  $p \in \Phi$  не может быть крайней.

Импликация (2)  $\Rightarrow$  (3). Если фигура  $\Phi$  не совпадает с наименьшим аффинным подпространством, в котором она содержится, то в этом подпространстве у  $\Phi$  есть опорная гиперплоскость, а значит, и грань строго меньшей размерности, чем  $\dim \Phi$ . Заменяя  $\Phi$  на эту грань и повторяя рассуждение, мы построим цепочку вида: фигура  $\Phi$ , грань фигуры  $\Phi$ , грань грани фигуры  $\Phi$ , и т. д., последний элемент в которой совпадает с наименьшим содержащим его аффинным подпространством. Если это подпространство — точка, то она крайняя. Если нет, то  $\Phi$  содержит аффинное подпространство положительной размерности.

Импликация (2)  $\Rightarrow$  (3) вытекает из предл. 13.2.  $\square$

<sup>1</sup>Т. е. такого, что  $U \oplus U' = V$ .



**13.4. Выпуклые многогранники.** Пересечение конечного числа замкнутых полупространств

$$M = H_{a_1}^+ \cap H_{a_2}^+ \cap \dots \cap H_{a_m}^+, \quad (13-4)$$

задаваемых в аффинном пространстве  $\mathbb{A}(V)$  набором непостоянных аффинных функционалов

$$a_1, a_2, \dots, a_m : \mathbb{A}(V) \rightarrow \mathbb{R}, \quad (13-5)$$

называется *выпуклым многогранником*. В частности, каждая аффинная гиперплоскость  $H_a = H_a^+ \cap H_a^- = H_a^+ \cap H_{-a}^+$  является выпуклым многогранником. Пересечение конечного множества выпуклых многогранников является многогранником. В частности, все аффинные подпространства, включая точку, а также пустое множество и сечения любого выпуклого многогранника любыми аффинными подпространствами являются выпуклыми многогранниками. Удобно считать, что и всё объемлющее пространство  $\mathbb{A}(V)$  является выпуклым многогранником, который мы будем называть *несобственным* в отличие от многогранников (13-4), которые будем называть *собственными*.

Каждый собственный непустой выпуклый многогранник  $M$  имеет грани, и все они являются непустыми выпуклыми многогранниками. Сам многогранник  $M$  является своей гранью если и только если он содержится в некоторой гиперплоскости. В этом случае мы будем называть совпадающую с  $M$  грань *несобственной*, а все остальные грани  $G \subsetneq M$  — *собственными*.

Под *размерностью* выпуклого многогранника мы всегда понимаем размерность наименьшего аффинного подпространства, в котором он содержится. В частности, размерность каждой собственной грани строго меньше размерности многогранника. Грани  $G \subset M$  размерности  $\dim G = \dim M - 1$  называются *гипергранями*.

Для многогранника (13-4) и каждого непустого подмножества

$$I = \{i_1, i_2, \dots, i_r\} \subset \{1, 2, \dots, m\}$$

мы полагаем  $H_I = \bigcap_{i \in I} H_{a_i}$ . Это аффинное подпространство в  $\mathbb{A}(V)$ , возможно пустое.

**ТЕОРЕМА 13.5 (ПЕРЕЧИСЛЕНИЕ ГРАНЕЙ)**

Для каждого  $I$  пересечение  $G_I \stackrel{\text{def}}{=} M \cap H_I$  либо пусто, либо является гранью  $M$ , и все грани многогранника  $M$  получаются таким образом. Для каждой грани  $G_I$  аффинное подпространство  $H_I$  является наименьшим содержащим грань  $G_I$  аффинным пространством. Точка  $p \in G_I$  является внутренней<sup>1</sup> точкой грани  $G_I$  если и только если  $a_j(p) > 0$  для всех  $j \notin I$ .

**Доказательство.** Если многогранник  $G_I = M \cap H_I$  не пуст, то сумма  $a_I = \sum_{i \in I} a_i$  является опорным функционалом<sup>2</sup> для  $M$  и  $G_I = M \cap H_{a_I}$ . Поэтому все непустые многогранники  $G_I$  являются гранями многогранника  $M$ . Покажем, что для каждой такой грани  $G_I$  справедливы два последних утверждения теоремы. Пусть точка  $p \in G_I = H_I \cap M$  такова, что  $a_j(p) > 0$  для всех  $j \notin I$ . Так как эти строгие неравенства выполняются и на некоторой кубической окрестности точки  $p$  в аффинном пространстве  $H_I$ , точка  $p$  входит в  $G_I$  вместе с этой кубической окрестностью. Это означает, что подпространство  $H_I$  является наименьшим аффинным пространством, содержащим грань  $G_I$ , а точка  $p$  является внутренней точкой грани  $G_I$ . Наоборот, если хоть один функционал  $a_k$  зануляется в точке  $p$ , лежащей в произвольной<sup>3</sup> грани  $G' \subseteq M$ , но при этом положителен в некоторой другой точке  $q$  той же грани, то точка  $p$  не может быть внутренней точкой

<sup>1</sup>В топологии аффинного пространства  $H_I$ .

<sup>2</sup>См. н° 13.2 на стр. 156.

<sup>3</sup>Возможно даже не имеющей вида  $G' = M \cap H_I$ .

грани  $\Gamma'$ , ибо в противном случае, немного продлив отрезок  $[q, p]$  за точку  $p$ , мы получим в грани  $\Gamma'$  точку, где функционал  $a_k$  строго отрицателен.

Рассмотрим теперь произвольную грань  $\Gamma = H_b \cap M$ , где  $b$  — какой-либо опорный функционал многогранника  $M$ . Обозначим через  $I = I(\Gamma) \subset \{1, 2, \dots, m\}$  множество номеров всех тех из задающих  $M$  функционалов  $a_i$ , для которых  $\Gamma \subset H_{a_i}$ . Поскольку для каждого  $j \notin I$  найдётся такая точка  $q_j \in \Gamma$ , что  $a_j(q_j) > 0$ , все функционалы  $a_j$  с  $j \notin I$  строго положительны в барицентре  $q_\Gamma$  всех точек  $q_j$ . Если  $I = \emptyset$ , то вообще все функционалы  $a_i$  строго положительны в точке  $q_\Gamma$ , а значит, и на некотором кубе с центром в  $q_\Gamma$ . Тем самым,  $q_\Gamma$  является внутренней<sup>1</sup> точкой многогранника  $M$  и не лежит ни в какой грани. Мы заключаем, что для любой грани  $\Gamma \subseteq M$  множество  $I = I(\Gamma)$  непусто и  $\Gamma \subseteq H_I \cap M = \Gamma_I$ . В частности, и грань  $\Gamma_I = H_I \cap M$ , и аффинное подпространство  $H_I$  тоже непусты, а точка  $q_\Gamma$  является, по уже доказанному, внутренней точкой грани  $\Gamma_I$ . Поэтому для любой точки  $p \in \Gamma_I$  отрезок  $[p, q_\Gamma]$  можно немного продлить за точку  $q_\Gamma$  так, чтобы его новый конец  $r$  всё ещё лежал в  $\Gamma_I$ . Из соотношений  $b(p) \geq 0$ ,  $b(q_\Gamma) = 0$ ,  $b(r) \geq 0$  вытекает, что  $b(r) = b(p) = 0$ . Следовательно, каждая точка  $p \in \Gamma_I$  лежит в грани  $\Gamma$ , откуда  $\Gamma = \Gamma_I$ .  $\square$

Следствие 13.2

Любой выпуклый многогранник имеет конечное множество граней, и каждая грань любой грани является гранью самого многогранника.  $\square$

Следствие 13.3

Крайними точками любого выпуклого многогранника являются его вершины и только они.  $\square$

Следствие 13.4

Каждый ограниченный выпуклый многогранник имеет конечное множество вершин и совпадает с их выпуклой оболочкой.  $\square$

Следствие 13.5

Непустой выпуклый многогранник  $M$  тогда и только тогда является цилиндром<sup>2</sup>, когда он не имеет вершин.  $\square$

**13.5. Выпуклые многогранные конусы.** Каждое непустое конечное множество  $R$  векторов из  $\mathbb{A}(V)$  задаёт в  $\mathbb{A}(V)$  фигуру

$$\sigma_R = \{\lambda_1 w_1 + \lambda_2 w_2 + \dots + \lambda_m w_m \mid \lambda_i \in \mathbb{R}_{\geq 0}, w_i \in R \subset V\}, \quad (13-6)$$

состоящую из всех неотрицательных линейных комбинаций векторов из множества  $R$  и именуемую *выпуклым многогранным конусом*. Векторы  $w \in R$  называются *образующими* конуса  $\sigma_R$ .

Упражнение 13.5. Убедитесь, что  $\sigma_R$  является замкнутой выпуклой фигурой в  $\mathbb{A}(V)$ .

Каждый конус (13-6) не пуст, поскольку содержит нулевой вектор  $0 \in V$ . Вместе с каждым ненулевым вектором  $v \in \sigma_R$  в конусе  $\sigma_{\mathbb{R}}$  лежат и все неотрицательные кратные этого вектора, т. е. замкнутый луч  $[0, v) = \mathbb{R}_{\geq 0} v$ . Поэтому любая опорная гиперплоскость  $H_a$  конуса  $\sigma$  проходит через нуль: в противном случае из неравенства  $a(0) > 0$  и равенства  $a(v) = 0$ , которое должно выполняться в некоторой точке  $v \in H_a \cap \sigma_R \neq \emptyset$ , вытекало бы, что  $a(w) < 0$  для всех  $w \in [0, v) \setminus [0, v]$ . Таким образом, все опорные гиперплоскости любого конуса являются *векторными* подпространствами в  $V$  и имеют вид  $H_\alpha$  для некоторого *линейного* функционала  $\alpha \in V^*$ .

<sup>1</sup>В топологии объемлющего пространства  $\mathbb{A}(V)$ .

<sup>2</sup>См. *опр. 13.2* на стр. 159. Являющиеся цилиндрами многогранники также называют *призмами*.

Будучи замкнутой выпуклой фигурой, каждый конус  $\sigma_R$  является пересечением своих опорных полупространств  $H_\alpha^+ = \{v \in V \mid \alpha(v) \geq 0\}$ , по всем таким  $\alpha \in V^*$ , что  $\alpha(w) \geq 0$  для всех  $w \in \sigma_R$  и  $H_\alpha \cap \sigma_R \neq \emptyset$ . Поэтому для любого вектора  $u \notin \sigma_R$  найдётся такой ковектор  $\alpha \in V^*$ , что  $\alpha(u) < 0$ , но  $\alpha(w) \geq 0$  для всех  $w \in \sigma_R$ . Это наблюдение известно как *лемма Фаркаша*.

**ТЕОРЕМА 13.6** (ТЕОРЕМА ФАРКАША – МИНКОВСКОГО – ВЕЙЛЯ)

Подмножество  $\sigma \subset V$  тогда и только тогда является выпуклым многогранным конусом, когда оно является пересечением конечного числа векторных полупространств

$$H_\alpha^+ = \{v \in V \mid \alpha(v) \geq 0\}, \quad \text{где } \alpha \in V^*. \quad (13-7)$$

В частности, каждый выпуклый многогранный конус является выпуклым многогранником.

**Доказательство.** Пусть подмножество  $\sigma \subset V$  является пересечением конечного числа векторных полупространств (13-7). Тогда  $\sigma$  является выпуклым многогранником в  $\mathbb{A}(V)$ , содержит нуль  $0 \in V$ , и вместе с каждой точкой  $p \neq 0$  содержит весь замкнутый луч  $[0, p)$ . Пересечение многогранника  $\sigma$  со стандартным единичным кубом  $B_1(0) \subset \mathbb{A}(V)$  с центром в нуле является ограниченным выпуклым многогранником и по сл. 13.4 совпадает с выпуклой оболочкой своих вершин, которые образуют конечное множество  $R \subset \sigma$ . Так как для каждого  $v \in \sigma$  существует такое  $\lambda \geq 0$ , что  $\lambda v \in \sigma \cap B_1(0)$  является выпуклой комбинацией векторов из  $R$ , сам вектор  $v$  является неотрицательной линейной комбинацией векторов из  $R$ , т. е.  $\sigma = \sigma_R$ .

Наоборот, любой многогранный конус  $\sigma_R \subset V$ , как мы видели, является пересечением опорных полупространств вида (13-7). Для того, чтобы неравенство  $\alpha(w) \geq 0$  выполнялось для всех  $w \in \sigma_R$ , достаточно, чтобы оно выполнялось для всех  $w \in R$ . Поэтому множество всех таких ковекторов  $\alpha \in V^*$ , что  $\sigma_R \subset H_\alpha^+$  представляет собою пересечение конечного числа векторных полупространств  $H_w^+ = \{\alpha \in V^* \mid \alpha(w) \geq 0\}$ , задаваемых векторами  $w \in R$ , рассматриваемыми как линейные функционалы на  $V^*$ . По уже доказанному, такое пересечение является выпуклым многогранным конусом  $\sigma_{R^\vee} \subset V^*$ , порождённым конечным множеством ковекторов  $R^\vee \subset V^*$ . Так как каждый ковектор  $\alpha \in \sigma_{R^\vee}$  является неотрицательной линейной комбинацией ковекторов  $\psi \in R^\vee$ , все неравенства  $\alpha(v) \geq 0$ , где  $\alpha \in \sigma_{R^\vee}$ , следуют из конечного набора неравенств  $\psi(v) \geq 0$ , где  $\psi \in R^\vee$ , т. е.  $\sigma = \bigcap_{\psi \in R^\vee} H_\psi^+$ .  $\square$

**13.5.1. Двойственность.** Множество линейных функционалов  $\alpha \in V^*$ , принимающих неотрицательные значения на выпуклом многогранном конусе  $\sigma_R \subset V$ , является пересечением конечного числа векторных полупространств  $H_w^+ \subset V^*$ , задаваемых образующими  $w \in R$  конуса  $\sigma_R$ , рассматриваемыми как линейные функционалы на  $V^*$ , и по теор. 13.6 представляет собою выпуклый многогранный конус

$$\sigma_R^\vee \stackrel{\text{def}}{=} \{\alpha \in V^* \mid \forall v \in \sigma_R \alpha(v) \geq 0\} = \bigcap_{w \in R} H_w^+ \subset V^*,$$

порождённый конечным набором ковекторов, который мы обозначим через  $R^\vee \subset V^*$ . Конус  $\sigma_R^\vee = \sigma_{R^\vee} \subset V^*$  называется *двойственным* к конусу  $\sigma_R \subset V$ . По лемме Фаркаша исходный конус

$$\sigma_R = \{v \in V \mid \forall \alpha \in \sigma_{R^\vee} \alpha(v) \geq 0\} = \bigcap_{\alpha \in R^\vee} \alpha^+ \subset V$$

двойствен к своему двойственному конусу. Таким образом, для любого выпуклого многогранного конуса  $\sigma$  выполняется равенство  $\sigma^{\vee\vee} = \sigma$ .

**13.5.2. Грани конусов.** Условимся, что помимо собственных граней, высекаемых из конуса его опорными гиперплоскостями  $H_\alpha$ , где  $\alpha \in V^*$ , у каждого конуса  $\sigma \subset V$  имеется также и *несобственная* грань  $\sigma = H_0 = V \cap \sigma$  размерности  $\dim \sigma$ , высекаемая нулевым ковектором  $0 \in V^*$ . Для каждой грани  $\Gamma \subset \sigma_R$  обозначим через  $\langle \Gamma \rangle \subset V$  её линейную оболочку, через  $R_\Gamma = R \cap \Gamma$  — множество лежащих в этой грани образующих конуса, а через  $R_\Gamma^\vee = R^\vee \cap \text{Ann} \langle \Gamma \rangle$  — множество аннулирующих грань  $\Gamma$  образующих двойственного конуса.

Предложение 13.3

Каждая грань  $\Gamma$  конуса  $\sigma_R$  является конусом, порождённым множеством  $R_\Gamma = R \cap \Gamma$  лежащих в ней образующими конуса  $\sigma_R$ , причём множество  $R_\Gamma$  линейно порождает линейную оболочку  $\langle \Gamma \rangle$  грани  $\Gamma$ .

Доказательство. Согласно [теор. 13.5](#) на стр. 161, каждая грань  $\Gamma$  высекается из конуса  $\sigma_R$  векторным подпространством  $\text{Ann} R_\Gamma^\vee \subset V$ , которое совпадает с линейной оболочкой  $\langle \Gamma \rangle$  грани  $\Gamma$ . Поэтому включение  $\sigma_{R_\Gamma} \subset \Gamma$  очевидно. Для доказательства обратного включения и последнего утверждения леммы достаточно убедиться, что в представлении произвольного вектора  $v \in \Gamma$  в виде неотрицательной линейной комбинации векторов из  $R$  ненулевые коэффициенты могут иметь лишь образующие  $w \in R_\Gamma$ . Для каждой образующей  $w' \in R \setminus R_\Gamma$  найдётся такой функционал  $\alpha \in R_\Gamma^\vee$ , что  $\alpha(w') > 0$ . Если бы образующая  $w'$  входила в разложение вектора  $v \in \Gamma$  с положительным коэффициентом, то значение  $\alpha(v)$  было бы строго положительным, а не нулевым, как это должно быть для ковектора  $\alpha \in R_\Gamma^\vee \subset \text{Ann} \langle \Gamma \rangle$ .  $\square$

Упражнение 13.6. Приведите пример, показывающий, что не каждое непустое подмножество  $I \subset R$  порождает конус, являющийся гранью конуса  $\sigma_R$ .

Следствие 13.6 (двойственность между гранями двойственных конусов)

Для лежащих в  $n$ -мерных векторных пространствах двойственных конусов  $\sigma_R$  и  $\sigma_R^\vee = \sigma_{R^\vee}$  при каждом  $k = 0, 1, \dots, \dim \sigma_R$  имеется оборачивающая включения биекция между  $k$ -мерными гранями конуса  $\sigma_R$  и  $(n - k)$ -мерными гранями конуса  $\sigma_R^\vee$ . Она переводит грань  $\Gamma = \sigma_{R_\Gamma}$  конуса  $\sigma_R$  в грань  $\Gamma^\vee \stackrel{\text{def}}{=} \sigma_{R_\Gamma^\vee}$ , высекаемую из двойственного конуса  $\sigma_R^\vee$  аннулятором грани  $\Gamma$ . В частности, одномерные рёбра каждого из конусов являются уравнениями  $(n - 1)$ -мерных граней двойственного конуса и наоборот.

Доказательство. Все образующие  $w \in R_\Gamma$  грани  $\Gamma = \sigma_{R_\Gamma} \subset \sigma_R$  являются опорными функционалами двойственного конуса  $\sigma_R^\vee = \sigma_{R^\vee}$ . Поэтому подпространство  $\text{Ann} \Gamma = \text{Ann} R_\Gamma \subset V^*$  высекает из двойственного конуса  $\sigma_R^\vee$  некоторую грань. Обозначим её  $\Gamma^\vee$ . По [предл. 13.3](#) эта грань представляет собою конус  $\sigma_{R_\Gamma^\vee} \subset \sigma_{R^\vee}$ , порождённый множеством  $R_\Gamma^\vee \subset R^\vee$  всех аннулирующих грань  $\Gamma$  образующих конуса  $\sigma_R^\vee$ , причём множество  $R_\Gamma^\vee$  линейно порождает линейную оболочку  $\langle \Gamma^\vee \rangle$  грани  $\Gamma^\vee$ . Так как  $\text{Ann} \Gamma^\vee = \text{Ann} R_\Gamma^\vee$  и  $\sigma_R \cap \text{Ann} R_\Gamma^\vee = \Gamma$  по [теор. 13.5](#), отображение  $\Gamma \mapsto \Gamma^\vee$  переводит грань  $\Gamma^\vee$  в грань  $\Gamma^{\vee\vee} = \Gamma$ , т. е. инволютивно, а значит, биективно.  $\square$

Замечание 13.1. В [сл. 13.6](#) не предполагается равенства  $\dim \sigma_R = \dim V$ . Например, одномерный конус  $\sigma_v = \{tv \mid t \geq 0\}$  представляет собою луч, выпущенный из нуля в направлении вектора  $v$  и имеет две грани — нульмерную грань  $0$  и одномерную грань, совпадающую с самим этим лучом. Двойственный ему конус  $\sigma_v^\vee = H_v^+ \subset V^*$  является векторным полупространством и тоже имеет две грани:  $n$ -мерную грань  $\sigma_v^\vee \cap \text{Ann} 0 = H_v^+ \cap V^* = H_v^+$  и  $(n - 1)$ -мерную грань  $\sigma_v^\vee \cap \text{Ann} v = H_v^-$ .

Упражнение 13.7. Покажите, что для каждой грани  $\Gamma = \sigma_{R_\Gamma}$  конуса  $\sigma_R$  выполняется равенство  $\sigma_{R_\Gamma} = \sigma \cap -\sigma_{R_\Gamma}^\vee$ , где  $-\sigma \stackrel{\text{def}}{=} \{v \mid -v \in \sigma\}$  обозначает конус, центрально симметричный конусу  $\sigma$  относительно начала координат.

**13.6. Проективный и асимптотический конусы выпуклого многогранника.** Вложим координатное векторное пространство  $V = \mathbb{R}^n$  со стандартным базисом  $e_1, \dots, e_n$  и координатами  $(x_1, \dots, x_n)$  относительно этого базиса в координатное векторное пространство  $W = \mathbb{R}^{n+1} = \mathbb{R}e_0 \oplus V$  с базисом  $e_0, e_1, \dots, e_n$  и координатами  $(x_0, x_1, \dots, x_n)$  в качестве аффинной гиперплоскости  $U = e_0 + V$ , задаваемой уравнением  $x_0 = 1$ , и отождествим векторное пространство аффинных функционалов  $a : U \rightarrow \mathbb{R}$  с двойственным к  $W$  пространством  $W^*$  линейных функционалов  $\xi : W \rightarrow \mathbb{R}$ , сопоставляя аффинному функционалу  $a = a_0 + \alpha$ , действующему на вектор  $e_0 + v \in U$  по правилу  $a(e_0 + v) = a_0 + \alpha(v)$ , линейный функционал  $\bar{a} \stackrel{\text{def}}{=} a_0 x_0 + \alpha : W \rightarrow \mathbb{R}$ , действующий на вектор  $x_0 e_0 + v \in W$  по правилу  $\bar{a}(x_0 e_0 + v) = a_0 x_0 + \alpha(v)$ .

Каждый выпуклый многогранник  $M = H_{a_1}^+ \cap H_{a_2}^+ \cap \dots \cap H_{a_m}^+$ , задаваемый в аффинном пространстве  $\mathbb{A}(V) = U$  аффинными функционалами  $a_i = a_{i0} + \alpha_i$ , т. е. представляющий собою множество решений системы неоднородных линейных неравенств

$$a_{i0} + \alpha_{i1}x_1 + \dots + \alpha_{in}x_n \geq 0, \quad \text{где } 1 \leq i \leq m \quad (13-8)$$

на координаты  $(x_1, \dots, x_n)$  вектора  $v \in \mathbb{R}^n$ , является пересечением аффинной гиперплоскости  $U \subset W$  с выпуклым многогранным конусом  $\bar{M} = H_{\bar{a}_1}^+ \cap H_{\bar{a}_2}^+ \cap \dots \cap H_{\bar{a}_m}^+ \subset W$ , который задаётся в векторном пространстве  $W = \mathbb{R}e_0 \oplus V$  коекторами  $\bar{a}_i = a_{i0}x_0 + \alpha_i \in W^*$  и представляет собою множество решений системы однородных линейных неравенств

$$a_{i0}x_0 + \alpha_{i1}x_1 + \dots + \alpha_{in}x_n \geq 0, \quad \text{где } 1 \leq i \leq m \quad (13-9)$$

на координаты  $(x_0, x_1, \dots, x_n)$  вектора  $w = x_0 e_0 + v \in \mathbb{R}^{n+1}$ , см. рис. 13♦6. Конус  $\bar{M}$  называется *проективным конусом* многогранника  $M$ . Его пересечение  $M_\infty \stackrel{\text{def}}{=} \bar{M} \cap V$  с направляющим для аффинной гиперплоскости  $U$  векторным подпространством  $\text{Ann } x_0 = V \subset W$  называется *асимптотическим конусом* или *конусом рецессии* многогранника  $M$ . Конус  $M_\infty$  описывается в векторном пространстве  $V = \mathbb{R}^n$  однородными неравенствами

$$\alpha_{i1}x_1 + \dots + \alpha_{in}x_n \geq 0, \quad \text{где } 1 \leq i \leq m,$$

в которые превращаются неравенства (13-9) при  $x_0 = 0$  и которые получаются из неоднородных неравенств (13-8) удалением свободных членов. По построению, асимптотический конус  $M_\infty = \sigma_{\alpha_1, \dots, \alpha_m}^\vee$  двойствен конусу  $\sigma_{\alpha_1, \dots, \alpha_m}^\vee \subset V^*$ , порождённому дифференциалами  $\alpha_i = D_{a_i}$  аффинных функционалов  $a_i$ , задающих многогранник  $M$ .

Геометрически, проективный конус  $\bar{M}$  непустого многогранника  $M$  является замыканием объединения всех лучей  $[0, w)$ , где  $w \in M$ , а асимптотический конус  $M_\infty$  образован пределами  $[0, v) = \lim_{t \rightarrow +\infty} [0, w_t)$  таких лучей, проходящих через переменную точку  $w_t = w + tv \in M$ , которая стартует при  $t = 0$  из некоторой точки  $w \in M$  и уходит при  $t \rightarrow +\infty$  на бесконечность в направлении вектора  $v \in V$ , оставаясь всё время внутри  $M$ , см. рис. 13♦7.

Упражнение 13.8. Убедитесь в этом и покажите, что асимптотический конус  $M_\infty$  непустого многогранника  $M$  состоит из всех векторов  $v \in V$ , обладающих такими эквивалентными свойствами<sup>1</sup>: (1) для любой точки  $p \in M$  точка  $p + v$  тоже лежит в  $M$  (2) для любой точки

<sup>1</sup>Направления таких векторов  $v$  называют *асимптотическими* или *направлениями рецессии*.

$p \in M$  луч  $\{p + tv \mid t \geq 0\}$  содержится в  $M$  (3) в  $M$  содержится какой-нибудь луч  $[p, q)$  с направляющим вектором  $\overrightarrow{pq} = v$ .

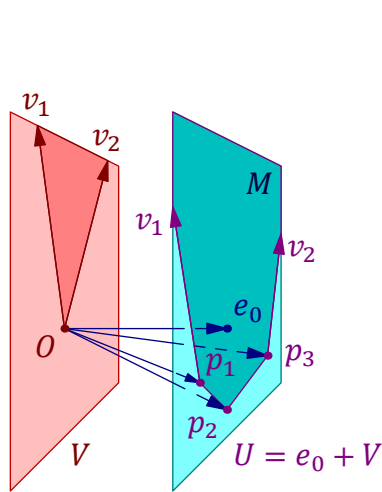


Рис. 13◊6. Конус  $\overline{M}$ .

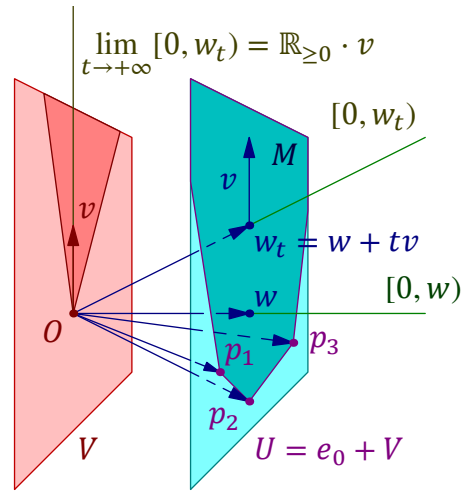


Рис. 13◊7. Конус  $M_\infty$ .

ТЕОРЕМА 13.7 (ТЕОРЕМА МИНКОВСКОГО – ВЕЙЛЯ)

Выпуклая оболочка любого конечного набора точек является ограниченным выпуклым многогранником. Наоборот, всякий компактный выпуклый многогранник является выпуклой оболочкой конечного множества точек, а именно — своих вершин.

Доказательство. Последнее утверждение уже было установлено нами в сл. 13.4 на стр. 162. Докажем первое. Вложим  $A(V)$  в векторное пространство  $W = \mathbb{R}e_0 \oplus V$  в качестве аффинной гиперплоскости  $U = e_0 + V$ , как было объяснено выше. Выпуклая оболочка любого конечного множества  $P \subset U$  ограничена, так как содержится в любом содержащем  $P$  кубе в  $U$ , и высекается из аффинной гиперплоскости  $U$  конусом  $\sigma_P \subset W$ , поскольку каждая выпуклая барицентрическая комбинация  $\sum x_i p_i$  точек  $p_i \in P$  лежит в конусе  $\sigma_P$ , и наоборот, для любого ненулевого вектора  $w = \sum \lambda_i p_i \in \sigma_P$  пересечение луча  $[0, w)$  с аффинной гиперплоскостью  $U$ , задаваемой уравнением  $x_0 = 1$ , происходит в точке  $w/x_0(w) = (\lambda_1 + \dots + \lambda_k)^{-1} \sum \lambda_i p_i$ , которая является выпуклой комбинацией точек  $p_i$ , поскольку все  $\lambda_i \geq 0$ . По теор. 13.6 конус  $\sigma_P$  является выпуклым многогранником. Поэтому  $M = \sigma_P \cap U$  тоже является выпуклым многогранником.  $\square$

ТЕОРЕМА 13.8 (РАЗЛОЖЕНИЕ МОЦКИНА)

Всякий выпуклый многогранник  $M$  раскладывается в сумму

$$M = \text{conv } P + M_\infty = \{p + v \mid p \in \text{conv } P, v \in M_\infty\},$$

где  $P \subset M$  — некоторое конечное подмножество, а  $M_\infty = \sigma_{\alpha_1, \dots, \alpha_m}^\vee \subset V$  — асимптотический конус многогранника  $M$ . Иначе говоря, каждый выпуклый многогранник является объединением семейства своих асимптотических конусов, отложенных от точек некоторого компактного выпуклого многогранника (возможно, пустого или состоящего из одной точки).

Доказательство. Как и выше, отождествим  $A(V)$  с аффинной гиперплоскостью  $U = e + V$  в векторном пространстве  $W = \mathbb{R}e_0 \oplus V$ . По теор. 13.6 на стр. 163 проективный конус  $\overline{M} = \sigma_S$

порождается некоторым конечным множеством векторов  $S \subset W$ . По предл. 13.3 на стр. 164 высекаемая векторным подпространством  $V \subset W$  грань  $M_\infty = V \cap \bar{M} = \sigma_R$  порождается подмножеством  $R = S \cap V$ . Умножая не лежащие в  $R$  образующие проективного конуса  $\bar{M}$  на положительные константы, мы можем и будем считать, что  $P \stackrel{\text{def}}{=} S \setminus R \subset M \subset U$ . Тогда

$$\bar{M} = \sigma_{P \sqcup R} = \{p + r, | p \in \sigma_P, r \in \sigma_R\}.$$

Луч  $[0, p + r)$ , где  $p \in \sigma_P, r \in \sigma_R$ , пересекает аффинную гиперплоскость  $U$  если и только если  $p \neq 0$ , и в этом случае точка пересечения  $(p + r)/x_0(p + r) = (p + r)/x_0(p)$  является суммой точки  $p/x_0(p) \in \text{conv } P$  и вектора  $r/x_0(p) \in \sigma_R = M_\infty$ .  $\square$

Следствие 13.7

Следующие свойства непустого многогранника  $M = H_{a_1}^+ \cap H_{a_2}^+ \cap \dots \cap H_{a_m}^+$ , задаваемого аффинными функционалами  $a_i = a_{i0} + \alpha_i$  эквивалентны:

$$M \text{ ограничен} \iff \text{конус } M_\infty = 0 \iff \text{конус } \sigma_{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m} = V^*.$$

$\square$

Пример 13.2 (двойственные многогранники)

Многогранники  $M \subset U$  и  $M^\vee \subset U^\vee$ , лежащие в аффинных подпространствах  $U = e_0 + V$  и  $U^\vee = x_0 + V^*$  двойственных векторных пространств  $W = \mathbb{R}e_0 \oplus V$  и  $W^* = \mathbb{R}x_0 \oplus V^*$ , которые спариваются по правилу  $\langle \mu x_0 + \alpha, \lambda e_0 + v \rangle = \lambda \mu + \alpha(v)$ , называются *двойственными* относительно точек  $e_0 \in U$  и  $x_0 \in U^\vee$ , если они имеют двойственные проективные конусы  $\bar{M}^\vee = \overline{M^\vee}$ .

Если точка  $e_0$  внутренняя для многогранника  $M = H_{a_1}^+ \cap H_{a_2}^+ \cap \dots \cap H_{a_m}^+$ , то все задающие  $M$  аффинные функционалы  $a_i = a_{i0} + \alpha_i$  имеют  $a_{i0} = a_i(e_0) > 0$ . Умножив каждый функционал  $a_i$  на подходящую положительную константу<sup>1</sup>, мы можем считать, что его свободный член  $a_{i0} = 1$ . Таким образом, при  $e_0 \in \text{int } M$  проективный конус  $\bar{M}$  многогранника  $M$  является пересечением векторных полупространств  $H_{a_i}^+ \subset W$ , задаваемых ковекторами  $\bar{a}_i = x_0 + \alpha_i$ , где  $\alpha_i = D_{a_i} \in V^*$ , а двойственный ему конус  $\bar{M}^\vee = \overline{M^\vee} = \sigma_{\bar{a}_1, \dots, \bar{a}_m}$  этими ковекторами порождается и пересекает аффинную гиперплоскость  $U^\vee = x_0 + V^*$  по выпуклой оболочке точек  $x_0 + \alpha_i$ . В частности, если  $e_0 \in \text{int } M$ , то двойственный многогранник  $M^\vee$  компактен.

Например, стандартный куб  $B_1(0) = \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n | \forall i |x_i| \leq 1\}$  в  $\mathbb{R}^n$  задаётся неравенствами  $1 + x_i \geq 0$  и  $1 - x_i \geq 0$ , где  $1 \leq i \leq n$ . Двойственный к нему относительно нулей в  $\mathbb{R}^n$  и  $\mathbb{R}^{n*}$  многогранник представляет собою выпуклую оболочку стандартных базисных векторов  $\pm e_i^* \in \mathbb{R}^{n*}$  и называется *стандартным кокубом*.

<sup>1</sup>Это не меняет ни полупространства  $H_a^+$ , ни многогранника  $M$ .

## §14. Пространство с билинейной формой

**14.1. Билинейные формы.** Отображение  $\beta : V \times V \rightarrow \mathbb{k}$  называется *билинейной формой* на векторном пространстве  $V$ , если оно линейно по каждому из двух своих аргументов при фиксированном другом, т. е. удовлетворяет равенству

$$\beta(x_1 u_1 + x_2 u_2, y_1 w_1 + y_2 w_2) = \sum_{i,j=1}^2 x_i y_j \beta(u_i, w_j) \quad (14-1)$$

при всех  $u_1, u_2, w_1, w_2 \in V$  и  $x_1, x_2, y_1, y_2 \in \mathbb{k}$ .

УПРАЖНЕНИЕ 14.1. Убедитесь, что билинейные формы образуют векторное подпространство в пространстве всех функций  $V \times V \rightarrow \mathbb{k}$ .

Если форма  $\beta$  на пространстве  $V$  зафиксирована, то её значение  $\beta(u, w) \in \mathbb{k}$  на паре векторов  $u, w \in V$  иногда бывает удобно записывать в виде *скалярного произведения*  $u \cdot w$ , принимающего значения в поле  $\mathbb{k}$  и, вообще говоря, некоммутативного. В таких обозначениях формула (14-1) утверждает, что это произведение дистрибутивно по отношению к линейным комбинациям векторов, т. е. подчиняется стандартным правилам раскрытия скобок:

$$(x_1 u_1 + x_2 u_2) \cdot (y_1 w_1 + y_2 w_2) = \sum_{i,j=1}^2 x_i y_j u_i \cdot w_j.$$

**14.1.1. Матрицы Грама.** Как и в евклидовом пространстве<sup>1</sup>, в каждом пространстве с билинейной формой с любыми двумя наборами векторов  $\mathbf{u} = (u_1, \dots, u_n)$ ,  $\mathbf{w} = (w_1, \dots, w_m)$ , где все  $u_i, w_j \in V$ , связана матрица их попарных скалярных произведений  $B_{\mathbf{u}\mathbf{w}} \stackrel{\text{def}}{=} \mathbf{u}^t \cdot \mathbf{w} \in \text{Mat}_{n \times m}(\mathbb{k})$  с элементами  $b_{ij} = v_i \cdot w_j = \beta(u_i, w_j)$ . Она называется *матрицей Грама* наборов  $\mathbf{u}$ ,  $\mathbf{w}$  и формы  $\beta$ . Когда наборы совпадают:  $\mathbf{u} = \mathbf{w}$ , мы пишем просто  $B_{\mathbf{u}}$  вместо  $B_{\mathbf{u}\mathbf{u}}$ . В этом случае  $\det B_{\mathbf{u}} \in \mathbb{k}$  называется *определителем Грама* формы  $\beta$  и набора векторов  $\mathbf{u}$ .

Если наборы векторов  $\mathbf{u}$  и  $\mathbf{w}$  линейно выражаются через наборы  $\mathbf{e}$  и  $\mathbf{f}$  по формулам  $\mathbf{u} = \mathbf{e} C_{\mathbf{e}\mathbf{u}}$  и  $\mathbf{w} = \mathbf{f} C_{\mathbf{f}\mathbf{w}}$ , то  $B_{\mathbf{u}\mathbf{w}} = \mathbf{u}^t \mathbf{w} = (\mathbf{e} C_{\mathbf{e}\mathbf{u}})^t (\mathbf{f} C_{\mathbf{f}\mathbf{w}}) = C_{\mathbf{e}\mathbf{u}}^t \mathbf{e}^t \mathbf{f} C_{\mathbf{f}\mathbf{w}} = C_{\mathbf{e}\mathbf{u}}^t B_{\mathbf{e}\mathbf{f}} C_{\mathbf{f}\mathbf{w}}$ . В частности, если  $\mathbf{u} = \mathbf{w} C_{\mathbf{w}\mathbf{u}}$ , то

$$B_{\mathbf{u}} = C_{\mathbf{w}\mathbf{u}}^t B_{\mathbf{w}} C_{\mathbf{w}\mathbf{u}}. \quad (14-2)$$

Если векторы  $\mathbf{e} = (e_1, \dots, e_n)$  образуют базис в  $V$ , а векторы  $\mathbf{u} = \mathbf{e} x$  и  $\mathbf{w} = \mathbf{e} y$  заданы столбцами  $x, y \in \mathbb{k}^n$  своих координат в этом базисе, то

$$\beta(u, w) = \mathbf{u}^t \cdot \mathbf{w} = x^t \mathbf{e}^t \cdot \mathbf{e} y = x^t B_{\mathbf{e}} y. \quad (14-3)$$

Так как любая квадратная матрица  $B_{\mathbf{e}} \in \text{Mat}_n(\mathbb{k})$  задаёт по этой формуле билинейную форму на пространстве  $V$ , сопоставление билинейной форме её матрицы Грама в произвольно зафиксированном базисе устанавливает биекцию между пространством билинейных форм на  $n$ -мерном векторном пространстве  $V$  и пространством матриц размера  $n \times n$ .

УПРАЖНЕНИЕ 14.2. Убедитесь, что эта биекция линейна.

<sup>1</sup>Ср. с н° 11.2 на стр. 135.



**14.1.2. Корреляции.** Задание билинейной формы  $\beta : V \times V \rightarrow \mathbb{K}$  эквивалентно заданию линейного отображения

$$\beta^\wedge : V \rightarrow V^*, \quad v \mapsto \beta^\wedge v = \beta(*, v), \quad (14-4)$$

которое переводит каждый вектор  $v \in V$  в линейный функционал  $\beta^\wedge v$  на пространстве  $V$ , задаваемый правым скалярным умножением на вектор  $v$ :

$$\beta^\wedge v : V \rightarrow \mathbb{K}, \quad u \mapsto \beta(u, v) = u \cdot v. \quad (14-5)$$

Линейное отображение (14-4) называется *правой корреляцией* билинейной формы  $\beta$ . Форма  $\beta$  однозначно восстанавливается по правой корреляции как  $\beta(u, w) = \beta^\wedge w(u)$ . Если зафиксировать в пространствах  $V$  и  $V^*$  двойственные базисы  $e = (e_1, \dots, e_n)$  и  $e^* = (e_1^*, \dots, e_n^*)$ , то у матрицы  $B_{e^*e}^\wedge$  отображения  $\beta^\wedge$  в этих базисах в клетке  $(i, j)$  стоит  $i$ -тая координата линейной функции  $\beta^\wedge e_j : u \mapsto \beta(u, e_j)$  в базисе  $e^*$ , которая равна<sup>1</sup> значению этой функции на базисном векторе  $e_i$ , т. е. скалярному произведению  $\beta(e_i, e_j)$ . Таким образом, матрица правой корреляции  $B_{e^*e}^\wedge = B_e$  совпадёт с матрицей Грама формы  $\beta$  в базисе  $e$ . Мы заключаем, что сопоставление билинейной форме  $\beta$  её правой корреляции  $\beta^\wedge$  устанавливает линейный изоморфизм пространства билинейных форм на  $V$  с пространством линейных отображений  $V \rightarrow V^*$ .

Симметричным образом, задание билинейной формы  $\beta : V \times V \rightarrow \mathbb{K}$  эквивалентно заданию *левой корреляции*  ${}^\wedge\beta : V \rightarrow V^*, v \mapsto {}^\wedge\beta v = \beta(v, *)$ , переводящей каждый вектор  $v \in V$  в линейный функционал левого скалярного умножением на этот вектор:

$${}^\wedge\beta v = \beta(v, *) : V \rightarrow \mathbb{K}, \quad u \mapsto v \cdot u = \beta(v, u). \quad (14-6)$$

По построению, левая корреляция билинейной формы  $\beta$  является правой корреляцией для *транспонированной* формы

$$\beta^t(u, w) \stackrel{\text{def}}{=} \beta(w, u),$$

матрица Грама которой транспонирована к матрице грама формы  $\beta$ . Поэтому матрица левой корреляции билинейной формы  $\beta$  в любых двойственных базисах  $e$  и  $e^*$  пространств  $V$  и  $V^*$  равна транспонированной матрице Грама  $B_e^t$  формы  $\beta$ .

**14.1.3. Ядра, ранг и коранг.** Векторные пространства

$$\begin{aligned} V^\perp &= \ker \beta^\wedge = \{u \in V \mid \forall v \in V \beta(v, u) = 0\} \\ {}^\perp V &= \ker {}^\wedge\beta = \{u \in V \mid \forall v \in V \beta(u, v) = 0\} \end{aligned} \quad (14-7)$$

называются, соответственно, *правым* и *левым* ядром билинейной формы  $\beta$ . Вообще говоря,  $V^\perp \neq {}^\perp V$ , если форма  $\beta$  не является симметричной или кососимметричной. Однако

$$\dim V^\perp = \dim {}^\perp V.$$

В самом деле,  $\dim \ker \beta^\wedge = \dim V - \dim \text{im } \beta^\wedge$ ,  $\dim \ker {}^\wedge\beta = \dim V - \dim \text{im } {}^\wedge\beta$ , и размерности образов операторов  $\beta^\wedge$ ,  ${}^\wedge\beta$  равны рангам их матриц в каких-либо двойственных друг другу базисах  $e$ ,  $e^*$  пространств  $V$  и  $V^*$ . Так как эти матрицы транспонированы друг другу, они имеют одинаковый ранг<sup>2</sup>, равный рангу матрицы Грама  $B_e$  базиса  $e$ . Итак, оба пространства в (14-7) имеют размерность  $\dim V - \text{rk } B_e$ . Это число называется *корангом* билинейной формы  $\beta$  и обозначается  $\text{сok } \beta$ . Ранг матрицы Грама, равный размерности образа каждой из корреляций, не зависит от выбора базиса и называется *рангом* билинейной формы  $\beta$  и обозначается  $\text{rk } \beta$ .

<sup>1</sup>См. н° 7.1.1 на стр. 87.

<sup>2</sup>См. теор. 5.1 на стр. 68 и прим. 7.5 на стр. 90.

**14.1.4. Изометрии.** Линейное отображение  $f : U \rightarrow W$  между векторными пространствами  $U$  и  $W$ , на которых заданы билинейные формы  $\beta$  и  $\gamma$ , называется *изометрическим*<sup>1</sup>, если для любых векторов  $u_1, u_2 \in U$  выполняется равенство  $\beta(u_1, u_2) = \gamma(f(u_1), f(u_2))$ . Билинейные формы  $\beta$  и  $\gamma$  называются *изоморфными*, если между пространствами  $U$  и  $W$  имеется изометрический линейный изоморфизм.

Если произвольно зафиксировать в  $U$  и  $W$  базисы  $\mathbf{u} = (u_1, \dots, u_n)$  и  $\mathbf{w} = (w_1, \dots, w_m)$ , то отображение  $f$  с матрицей  $F_{\mathbf{wu}}$  в этих базисах является изометрическим если и только если матрица Грама набора векторов  $f(\mathbf{u}) = (f(u_1), \dots, f(u_n)) = \mathbf{w} F_{\mathbf{wu}}$  равна матрице Грама базиса  $\mathbf{u}$ , что по форм. (14-2) на стр. 168 равносильно матричному равенству

$$F_{\mathbf{wu}}^t B_{\mathbf{w}} F_{\mathbf{wu}} = B_{\mathbf{u}}. \quad (14-8)$$

**14.2. Невырожденные формы.** Билинейная форма  $\beta$  называется *невырожденной*<sup>2</sup>, если она удовлетворяет условиям следующего ниже предл. 14.1. Формы, не удовлетворяющие этим условиям, называются *вырожденными* или *особыми*.

Предложение 14.1 (критерии невырожденности)

Следующие свойства билинейной формы  $\beta$  на конечномерном векторном пространстве  $V$  равносильны друг другу:

- 1) в  $V$  существует базис с ненулевым определителем Грама
- 2) любой базис в  $V$  имеет ненулевой определитель Грама
- 3) левая корреляция  $\wedge \beta : V \rightarrow V^*$  является изоморфизмом
- 4) правая корреляция  $\beta \wedge : V \rightarrow V^*$  является изоморфизмом
- 5) для любого ненулевого вектора  $v \in V$  существует такой вектор  $u \in V$ , что  $\beta(v, u) \neq 0$
- 6) для любого ненулевого вектора  $v \in V$  существует такой вектор  $u \in V$ , что  $\beta(u, v) \neq 0$
- 7) для любой линейной функции  $\varphi : V \rightarrow \mathbb{K}$  существует такой вектор  $v \in V$ , что

$$\varphi(u) = \beta(v, u) \quad \text{для всех } u \in V$$

- 8) для любой линейной функции  $\varphi : V \rightarrow \mathbb{K}$  существует такой вектор  $v \in V$ , что

$$\varphi(u) = \beta(u, v) \quad \text{для всех } u \in V,$$

причём при выполнении этих условий вектор  $v$  в последних двух пунктах определяется формой  $\varphi$  однозначно.

Доказательство. Поскольку  $\dim V = \dim V^*$ , биективность, инъективность и сюръективность линейного отображения  $V \rightarrow V^*$  равносильны друг другу и тому, что это отображение задаётся невырожденной матрицей в каких-нибудь базисах. Поэтому условия (3), (5), (7) и условия

<sup>1</sup> Или гомоморфизмом пространств с билинейными формами.

<sup>2</sup> А также неособой или регулярной.

(4), (6), (8), утверждающие, соответственно, биективность, обращение в нуль ядра и сюръективность для операторов  $\hat{\beta}$  и  $\beta^\wedge$ , равносильны между собой и условию (1), означающему, что транспонированные друг другу матрицы этих операторов обратимы. Условие (1) равносильно условию (2) в силу форм. (14-2) на стр. 168, из которой вытекает, что определители Грама двух базисов  $e$  и  $f$  связаны друг с другом по формуле  $\det B_e = \det B_f \cdot \det^2 C_{fe}$ , где  $C_{fe}$  — матрица перехода<sup>1</sup> от базиса  $e$  к базису  $f$ .  $\square$

**ПРИМЕР 14.1 (ЕВКЛИДОВА ФОРМА)**

Симметричная билинейная форма на координатном пространстве  $kk^n$  с единичной матрицей Грама  $E$  в стандартном базисе называется *евклидовой*. Эта форма невырождена и над полем  $\mathbb{k} = \mathbb{R}$  задаёт евклидову структуру на пространстве  $\mathbb{R}^n$ . Однако над отличными от  $\mathbb{R}$  полями свойства этой формы могут существенно отличаться от интуитивно привычных свойств евклидовой структуры. Например, над полем  $\mathbb{C}$  ненулевой вектор  $e_1 - ie_2 \in \mathbb{C}^2$  имеет нулевой скалярный квадрат.

**УПРАЖНЕНИЕ 14.3.** Приведите пример  $n$ -мерного подпространства в  $\mathbb{C}^{2n}$ , на котором евклидова форма ограничивается в тождественно нулевую форму.

Базисы, в которых матрица Грама евклидовой формы равна  $E$  называются *ортонормальными*. Ниже<sup>2</sup> мы увидим, что над алгебраически замкнутым полем  $\mathbb{k}$  характеристики  $\text{char } \mathbb{k} \neq 2$  любая невырожденная симметричная билинейная форма изометрически изоморфна евклидовой.

**ПРИМЕР 14.2 (ГИПЕРБОЛИЧЕСКАЯ ФОРМА)**

Симметричная билинейная форма  $h$  на чётномерном координатном пространстве  $\mathbb{k}^{2n}$ , матрица Грама которой в стандартном базисе равна

$$H = \begin{pmatrix} 0 & E \\ E & 0 \end{pmatrix}, \quad (14-9)$$

где  $E$  — единичная матрица размера  $n \times n$ , называется *гиперболической*. Она невырождена и над алгебраически замкнутым полем изометрически изоморфна евклидовой форме: ортонормальный базис гиперболической формы состоит из векторов

$$\varepsilon_{2v-1} = (e_v - e_{n+v}) / \sqrt{-2} \quad \text{и} \quad \varepsilon_{2v} = (e_v + e_{n+v}) / \sqrt{2}, \quad 1 \leq v \leq n.$$

Над полями  $\mathbb{R}$  и  $\mathbb{Q}$  гиперболическая форма не изоморфна евклидовой, поскольку евклидовы скалярные квадраты всех ненулевых векторов положительны, тогда как ограничение гиперболической формы на линейную оболочку первых  $n$  базисных векторов тождественно нулевое. Базис, в котором матрица Грама гиперболической формы имеет вид (14-9), называется *гиперболическим базисом*.

**ПРИМЕР 14.3 (СИМПЛЕКТИЧЕСКАЯ ФОРМА)**

Кососимметричная форма на чётномерном координатном пространстве  $\mathbb{k}^{2n}$ , матрица Грама которой в стандартном базисе равна

$$J = \begin{pmatrix} 0 & E \\ -E & 0 \end{pmatrix}, \quad (14-10)$$

<sup>1</sup>См. п. 5.2 на стр. 64.

<sup>2</sup>См. сл. 14.1 на стр. 178.

где  $E$  — единичная матрица размера  $n \times n$ , называется *симплектической*. Матрица  $J$  вида (14-10) называется *симплектической единицей*. Она имеет  $J^2 = -E$  и  $\det J = 1$ . Таким образом, симплектическая форма невырождена. Базис, в котором матрица Грама кососимметричной формы равна  $J$ , называется *симплектическим базисом*. Ниже<sup>1</sup> мы покажем, что всякая невырожденная кососимметричная билинейная форма над *любым* полем изометрически изоморфна симплектической. Это означает, в частности, что размерность пространства с невырожденной кососимметричной формой обязательно чётна.

УПРАЖНЕНИЕ 14.4. Убедитесь в том, что все кососимметричные квадратные матрицы нечётного размера над полем  $\mathbb{k}$  характеристики  $\text{char } \mathbb{k} \neq 2$  вырождены.

**14.2.1. Левый и правый двойственный базис.** Если билинейная форма  $\beta$  на пространстве  $V$  невырождена, то у любого базиса  $e = (e_1, \dots, e_n)$  в  $V$  есть *правый* и *левый* двойственные базисы  $e^\vee = (e_1^\vee, \dots, e_n^\vee)$  и  ${}^\vee e = ({}^\vee e_1, \dots, {}^\vee e_n)$ , состоящие из прообразов векторов двойственно-го к  $e$  базиса  $e^* = (e_1^*, e_2^*, \dots, e_n^*)$  в  $V^*$  относительно изоморфизмов правой и левой корреляций соответственно. Они однозначно характеризуются соотношениями ортогональности

$$\beta(e_i, e_j^\vee) = \beta({}^\vee e_i, e_j) = \delta_{ij}, \quad (14-11)$$

которые на матричном языке означают, что взаимные матрицы Грама двойственных относительно формы  $\beta$  базисов единичные:  $B_{ee^\vee} = B_{{}^\vee ee} = E$ . Согласно формулам из п. 14.1.1 матрицы переходов  $C_{ee^\vee}$  и  $C_{{}^\vee ee}$ , в  $j$ -тых столбцах которых стоят координаты относительно базиса  $e$  векторов  $e_j^\vee$  и  ${}^\vee e_j$ , удовлетворяют соотношениям  $B_e C_{e^\vee e} = B_{ee^\vee} = E$  и  $C_{{}^\vee e} B_e = B_{{}^\vee ee} = E$ , откуда

$$C_{e^\vee e} = B_e^{-1} \quad \text{и} \quad C_{{}^\vee ee} = B_e^{-1t}.$$

Знание пары двойственных относительно билинейной формы  $\beta$  базисов позволяет находить коэффициенты разложения произвольного по любому из базисов как взятые с нужной стороны скалярные произведения этого вектора с векторами двойственного базиса, а именно

$$v = \sum_i \beta({}^\vee e_i, v) e_i = \sum_i \beta(v, e_i^\vee) e_i = \sum_i \beta(v, e_i) {}^\vee e_i = \sum_i \beta(e_i, v) e_i^\vee \quad (14-12)$$

для любого вектора  $v \in V$ .

УПРАЖНЕНИЕ 14.5. Убедитесь в этом!

**14.2.2. Изотропные подпространства.** Подпространство  $U \subset V$  называется *изотропным* для билинейной формы  $\beta$ , если эта форма ограничивается на него в тождественно нулевую форму, т. е. когда  $\beta(u, w) = 0$  для всех  $u, w \in U$ . Например, каждое одномерное подпространство является изотропным для любой кососимметричной формы, а линейные оболочки первых  $n$  и последних  $n$  базисных векторов пространства  $\mathbb{k}^{2n}$  изотропны для гиперболической формы из прим. 14.2 и симплектической формы из прим. 14.3.

Предложение 14.2

Размерность изотропного подпространства невырожденной билинейной формы на пространстве  $V$  не превосходит  $\dim V / 2$ .

<sup>1</sup>См. теор. 14.3 на стр. 178.

Доказательство. Изотропность подпространства  $U \subset V$  означает, что корреляция  $\beta^\wedge : V \simeq V^*$  отображает  $U$  внутрь  $\text{Ann } U \subset V^*$ . Так как корреляция невырожденной формы инъективна,  $\dim U \leq \dim \text{Ann } U = \dim V - \dim U$ , откуда  $2 \dim U \leq \dim V$ .  $\square$

Замечание 14.1. Примеры гиперболической и симплектической форм показывают, что оценка из предл. 14.2 в общем случае неумлучшаема.

**14.2.3. Группа изометрий.** Как мы видели в н° 14.1.4 на стр. 170, линейный эндоморфизм  $f : V \rightarrow V$  является изометрическим для билинейной формы  $\beta$  на пространстве  $V$  если и только если его матрица  $F_e$  в произвольном базисе  $e$  пространства  $V$  связана с матрицей Грама  $B_e$  этого базиса соотношением<sup>1</sup>  $F_e^t B_e F_e = B_e$ . Если форма  $\beta$  невырождена, то беря определители обеих частей, заключаем, что  $\det^2 F_e = 1$ , откуда  $\det F_e = \pm 1$ . Поэтому любая изометрия конечномерного пространства с невырожденной билинейной формой обратима и с точностью до знака сохраняет объём. Так как композиция изометрий и обратное к изометрии отображение тоже являются изометриями, изометрические преобразования пространства  $V$  образуют группу. Она обозначается  $O_\beta(V)$  и называется *группой изометрий*<sup>2</sup> невырожденной билинейной формы  $\beta$ . Изометрии определителя 1 называются *специальными* или *собственными* и образуют в группе всех изометрий подгруппу, обозначаемую  $SO_\beta(V)$ .

Из форм. (14-8) на стр. 170 вытекает, что обратная к изометрии  $f$  изометрия имеет матрицу

$$F_e^{-1} = B_e^{-1} F_e^t B_e. \quad (14-13)$$

Пример 14.4 (изометрии вещественной гиперболической плоскости)

Оператор  $f : H_2 \rightarrow H_2$ , имеющий в стандартном гиперболическом базисе  $e_1, e_2 \in H_2$  матрицу

$$F = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix},$$

является изометрическим тогда и только тогда, когда

$$\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},$$

что равносильно уравнениям  $ac = bd = 0$  и  $ad + bc = 1$ , имеющим два семейства решений:

$$F_\lambda = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda^{-1} \end{pmatrix} \quad \text{и} \quad \tilde{F}_\lambda = \begin{pmatrix} 0 & \lambda \\ \lambda^{-1} & 0 \end{pmatrix}, \quad \text{где } \lambda \in \mathbb{k}^* = \mathbb{k} \setminus \{0\}. \quad (14-14)$$

Над полем  $\mathbb{R}$  оператор  $F_\lambda$  является собственным, и при  $\lambda > 0$  называется *гиперболическим поворотом*, т. к. каждый вектор  $v = (x, y)$ , обе координаты которого ненулевые, движется при действии на него операторов  $F_\lambda$  с  $\lambda \in (0, \infty)$  по гиперболе  $xy = \text{const}$ . Если положить  $\lambda = e^t$  и перейти к ортогональному базису из векторов  $p = (e_1 + e_2) / \sqrt{2}$ ,  $q = (e_1 - e_2) / \sqrt{2}$ , то оператор  $F_\lambda$  запишется в нём матрицей, похожей на матрицу евклидова поворота

$$\begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} e^t & 0 \\ 0 & e^{-t} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \text{ch } t & \text{sh } t \\ \text{sh } t & \text{ch } t \end{pmatrix},$$

<sup>1</sup>См. формулу (14-8) на стр. 170.

<sup>2</sup>А также ортогональной группой или группой автоморфизмов.

где  $\operatorname{ch} t \stackrel{\text{def}}{=} (e^t + e^{-t})/2$  и  $\operatorname{sh} t \stackrel{\text{def}}{=} (e^t - e^{-t})/2$  называются *гиперболическими косинусом* и *синусом* вещественного числа  $t$ . Оператор  $F_\lambda$  с  $\lambda < 0$  является композицией гиперболического поворота и центральной симметрии. Несобственный оператор  $\tilde{F}_\lambda$  является композицией гиперболического поворота с отражением относительно той оси гиперболы, которая пересекается с её ветвями.

**14.2.4. Биекция между формами и операторами.** На пространстве  $V$  с билинейной формой  $\beta : V \times V \rightarrow \mathbb{k}$  каждому линейному оператору  $f : V \rightarrow V$  можно сопоставить билинейную форму  $\beta_f(u, w) \stackrel{\text{def}}{=} \beta(u, fw)$  с матрицей Грама  $e^t \cdot f(e) = e^t \cdot e F_e = B_e F_e$  в произвольно выбранном базисе  $e$  пространства  $V$ . Поскольку на языке матриц отображение  $f \mapsto \beta_f$  заключается в левом умножении матрицы оператора на матрицу Грама:  $F_e \mapsto B_e F_e$ , оно линейно и обратимо, если форма  $\beta$  невырождена. Обратное отображение задаётся умножением матрицы оператора слева на обратную к матрице Грама матрицу. Поэтому каждая билинейная форма  $\alpha : V \times V \rightarrow \mathbb{k}$  на конечномерном векторном пространстве  $V$  с фиксированной невырожденной билинейной формой  $\beta$  имеет вид  $\alpha(u, w) = \beta(u, f_\alpha w)$  для некоторого линейного оператора  $f_\alpha : V \rightarrow V$ , однозначно определяемого формой  $\alpha$ . Матрица  $F_e$  оператора  $f_\alpha$  выражается через матрицы Грама  $B_e$  и  $A_e$  форм  $\beta$  и  $\alpha$  по формуле  $F_e = B_e^{-1} A_e$ .

ПРИМЕР 14.5 (КАНОНИЧЕСКИЙ ОПЕРАТОР)

Биекция между формами и операторами сопоставляет транспонированной к  $\beta$  билинейной форме  $\beta^t(u, w) \stackrel{\text{def}}{=} \beta(w, u)$  оператор  $\kappa : V \rightarrow V$ , который называется *каноническим оператором* невырожденной билинейной формы  $\beta$  и однозначно характеризуется свойством

$$\forall u, w \in V \quad \beta(w, u) = \beta(u, \kappa w). \quad (14-15)$$

Матрица  $K_e$  канонического оператора в произвольном базисе  $e$  пространства  $V$  выражается через матрицу Грама  $B_e$  формы  $\beta$  по формуле  $K_e = B_e^{-1} B_e^t$ .

УПРАЖНЕНИЕ 14.6. Убедитесь, что при замене матрицы Грама по правилу  $B \mapsto C^t B C$ , где  $C \in \operatorname{GL}_n(\mathbb{k})$ , матрица  $K = B^{-1} B^t$  меняется по правилу  $K \mapsto C^{-1} K C$ , т. е. канонические операторы изоморфных билинейных форм подобны.

Так как  $\beta(u, w) = \beta(w, \kappa u) = \beta(\kappa u, \kappa w)$  для всех  $u, w \in V$ , канонический оператор является изометрическим.

ТЕОРЕМА 14.1

Над алгебраически замкнутым полем характеристики нуль две невырожденные билинейные формы изометрически изоморфны если и только если их канонические операторы подобны.

Доказательство. Импликация «только если» вытекает из [упр. 14.6](#) и имеет место над любым полем. Докажем обратную импликацию. Пусть невырожденные билинейные формы  $\alpha$  и  $\beta$  имеют подобные канонические операторы  $\kappa_\alpha$  и  $\kappa_\beta = g^{-1} \kappa_\alpha g$ . Тогда форма  $\alpha'(u, w) = \alpha(gu, gw)$  изометрически изоморфна форме  $\alpha$  и имеет канонический оператор  $g^{-1} \kappa_\alpha g = \kappa_\beta$ , поскольку  $\alpha'(u, w) = \alpha(gu, gw) = \alpha(gw, \kappa_\alpha gu) = \alpha'(w, g^{-1} \kappa_\alpha gu)$  для всех  $u, w$ . Таким образом, заменяя форму  $\alpha$  на форму  $\alpha'$ , мы без ограничения общности можем считать, что формы  $\alpha$  и  $\beta$  имеют один и тот же канонический оператор  $\kappa$ . Линейный оператор  $f$ , однозначно определяемый равенством  $\beta(u, w) = \alpha(u, fw)$  для всех  $u, w$ , обратим в силу невырожденности форм  $\alpha$ ,  $\beta$  и самосопряжён относительно  $\alpha$  в том смысле<sup>1</sup>, что для всех  $u, w$  выполняется равенство

$$\alpha(fu, w) = \alpha(\kappa^{-1}w, fu) = \beta(\kappa^{-1}w, u) = \beta(u, w) = \alpha(u, fw).$$

<sup>1</sup>Ср. с н° 12.3 на стр. 149.

Любой многочлен от оператора  $f$  тоже самосопряжён относительно формы  $\alpha$ . В силу идущего ниже [упр. 14.7](#), над алгебраически замкнутым полем характеристики нуль существует такой многочлен  $P(t)$ , что оператор  $h = P(f)$  удовлетворяет равенству  $h^2 = f$ . Такой оператор  $h$  биективен и самосопряжён относительно  $\alpha$ . Поэтому форма

$$\beta(u, w) = \alpha(u, fw) = \alpha(u, h^2w) = \alpha(hu, hw)$$

изометрически изоморфна форме  $\alpha$ . □

**УПРАЖНЕНИЕ 14.7.** Покажите, что над алгебраически замкнутым полем характеристики нуль из любого биективного линейного оператора  $f$  на конечномерном векторном пространстве можно извлечь квадратный корень, являющийся многочленом от оператора  $f$ .

**14.3. Ортогоналы и ортогональные проекции.** С каждым подпространством  $U$  векторного пространства  $V$  с билинейной формой  $\beta : V \times V \rightarrow \mathbb{k}$  связаны *левый* и *правый ортогоналы*

$$\begin{aligned} {}^\perp U &= \{v \in V \mid \forall u \in U \beta(v, u) = 0\}, \\ U^\perp &= \{v \in V \mid \forall u \in U \beta(u, v) = 0\}. \end{aligned} \tag{14-16}$$

Вообще говоря, это два разных подпространства в  $V$ .

**Предложение 14.3**

Если билинейная форма  $\beta$  на конечномерном пространстве  $V$  невырождена, то для всех подпространств  $U \subset V$  выполняются равенства

$$\dim {}^\perp U = \dim V - \dim U = \dim U^\perp \quad \text{и} \quad ({}^\perp U)^\perp = U = (U^\perp)^\perp.$$

**Доказательство.** Первые два равенства верны, так как ортогоналы (14-16) суть прообразы подпространства  $\text{Ann } U \subset V^*$  при изоморфизмах  ${}^\wedge\beta, {}^\vee\beta : V \simeq V^*$ , и  $\dim \text{Ann } U = \dim V - \dim U$ . Вторые два равенства вытекают из первых, поскольку оба подпространства  $({}^\perp U)^\perp$  и  $(U^\perp)^\perp$  содержат  $U$  и имеют размерность  $\dim U$ . □

**Предложение 14.4**

Пусть билинейная форма  $\beta$  на произвольном<sup>1</sup> векторном пространстве  $V$  ограничивается на конечномерное подпространство  $U \subset V$  в невырожденную на этом подпространстве билинейную форму  $\beta|_U : U \times U \rightarrow \mathbb{k}$ . Тогда  $V = U \oplus U^\perp$ , и проекция  $v_U \in U$  каждого вектора  $v \in V$  на подпространство  $U$  вдоль  $U^\perp$  однозначно определяется тем, что  $\beta(u, v) = \beta(u, v_U)$  для всех  $u \in U$ . Вектор  $v_U$  выражается через произвольный базис  $u_1, \dots, u_n$  пространства  $U$  по формуле

$$v_U = \sum_{i=1}^n \beta({}^\vee u_i, v) u_i = \sum_{i=1}^n \beta(u_i, v) u_i^\vee, \tag{14-17}$$

где  ${}^\vee u_1, \dots, {}^\vee u_n$  и  $u_1^\vee, \dots, u_n^\vee$  суть левый и правый двойственные к  $u_1, \dots, u_n$  относительно формы  $\beta$  базисы<sup>2</sup> в  $U$ .

<sup>1</sup>Возможно даже бесконечномерном.

<sup>2</sup>См. н° 14.2.1 на стр. 172.

Доказательство. Так как ограничение формы  $\beta$  на  $U$  невырождено, для любого вектора  $v \in V$  существует единственный такой вектор  $v_U \in U$ , что линейная функция  $u \mapsto \beta(u, v)$  на пространстве  $U$  задаётся правым скалярным умножением векторов из  $U$  на этот вектор  $v_U$ , т. е. для всех  $u \in U$  выполняется равенство  $\beta(u, v) = \beta(u, v_U)$ . Поэтому разность  $v - v_U \in U^\perp$ . Таким образом, каждый вектор  $v \in V$  представляется в виде суммы  $v = v_U + (v - v_U)$  с  $v_U \in U$  и  $v - v_U \in U^\perp$ . Поскольку в любом разложении  $v = v'_U + w$  с  $v'_U \in U$  и  $w \in U^\perp$  для всех  $u \in U$  выполняется равенство  $\beta(u, v) = \beta(u, v'_U)$ , имеем равенство  $v'_U = v_U$ , а значит и равенство  $w = v - v'_U = v - v_U$ , что доказывает первые два утверждения предложения. Последнее утверждение вытекает из форм. (14-12) на стр. 172:  $v_U = \sum_i \beta(\vee u_i, v_U) u_i = \sum_i \beta(\vee u_i, v) u_i$ .  $\square$

УПРАЖНЕНИЕ 14.8. Докажите симметричное утверждение:  $V = {}^\perp U \oplus U$  если и только если билинейная форма  $\beta$  ограничивается на конечномерное подпространство  $U \subset V$  в невырожденную на этом подпространстве билинейную форму  $\beta|_U : U \times U \rightarrow \mathbb{k}$ ; при этом проекция  ${}_U v$  каждого вектора  $v \in V$  на  $U$  вдоль  ${}^\perp U$  однозначно определяется тем, что  $\beta(v, u) = \beta({}_U v, u)$  для всех  $u \in U$  и находится по формуле  ${}_U v = \sum \beta(v, u_i^\vee) u_i = \sum \beta(v, u_i) \vee u_i$ .

**14.4. Симметричные и кососимметричные формы.** Билинейная форма  $\beta$  называется *симметричной*, если  $\beta(u, w) = \beta(w, u)$  для всех  $u, w \in V$ , и *кососимметричной* — если  $\beta(v, v) = 0$  для всех  $v \in V$ . В последнем случае для любых  $u, w \in V$  выполняется равенство

$$0 = \beta(u + w, u + w) = \beta(u, w) + \beta(w, u),$$

откуда  $\beta(u, w) = -\beta(w, u)$ .

УПРАЖНЕНИЕ 14.9. Убедитесь, что при  $\text{char } \mathbb{k} \neq 2$  равенство  $\beta(u, w) = -\beta(w, u)$  всех  $u, w \in V$  равносильно равенству  $\beta(v, v) = 0$  для всех  $v \in V$  и что формы  $\beta(u, w)$  и  $\beta^t(u, w) = \beta(w, u)$  пропорциональны ровно в двух случаях: когда  $\beta^t = \pm\beta$ .

Если  $\text{char } \mathbb{k} = 2$ , каждая кососимметричная форма автоматически симметрична, но не наоборот. Если  $\text{char } \mathbb{k} \neq 2$ , пространства симметричных и кососимметричных билинейных форм имеют нулевое пересечение, и каждая билинейная форма  $\beta$  однозначно раскладывается в сумму  $\beta = \beta_+ + \beta_-$  симметричной и кососимметричной форм

$$\beta_+(v, w) = \frac{\beta(v, w) + \beta(w, v)}{2} \quad \text{и} \quad \beta_-(v, w) = \frac{\beta(v, w) - \beta(w, v)}{2}.$$

**14.4.1. Левая и правая корреляции** симметричной билинейной формы совпадают друг с другом, и мы будем в этом случае обозначать оператор  $\beta^\wedge = {}^\wedge\beta$  через  $\hat{\beta} : V \rightarrow V^*$  и называть просто *корреляцией* симметричной формы  $\beta$ . Напомним, корреляция переводит вектор  $v \in V$ , в линейную функцию

$$\hat{\beta}v : V \rightarrow \mathbb{k}, \quad u \mapsto \beta(u, v) = \beta(v, u).$$

Для кососимметричной формы левая и правая корреляции различаются знаком:  $\beta^\wedge = -{}^\wedge\beta$ .

**14.4.2. Ядро.** Левое и правое ядро (косо)симметричной формы  $\beta$  совпадают друг с другом и называются просто *ядром* этой формы. Поэтому для (косо)симметричной формы  $\beta$  пространство  $\ker \hat{\beta} = \ker \beta^\wedge$  обозначается просто

$$\ker \beta \stackrel{\text{def}}{=} \{w \in V \mid \forall v \in V \beta(v, w) = 0\}.$$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 14.5

Ограничение (косо) симметричной билинейной формы  $\beta$  на любое дополнительное к ядру  $\ker \beta$  подпространство  $U \subset V$  невырождено.



Доказательство. Пусть подпространство  $U \subset V$  таково, что  $V = \ker \beta \oplus U$ , а вектор  $w \in U$  удовлетворяет для всех  $u \in U$  соотношению  $\beta(u, w) = 0$ . Записывая произвольный вектор  $v \in V$  в виде  $v = e + u$ , где  $e \in \ker \beta$  и  $u \in U$ , получаем  $\beta(v, w) = \beta(e, w) + \beta(u, w) = 0$ , откуда  $w \in U \cap \ker \beta = 0$ .  $\square$

Предложение 14.6

Любая (косо) симметричная билинейная форма  $\beta$  на пространстве  $V$  корректно определяет на фактор пространстве  $V/\ker \beta$  невырожденную билинейную форму  $\bar{\beta}$  по формуле

$$\bar{\beta}([u], [w]) \stackrel{\text{def}}{=} \beta(u, w). \quad (14-18)$$

Доказательство. Если  $[u] = [u']$ , а  $[w] = [w']$ , то векторы  $u - u'$  и  $w - w'$  лежат в  $\ker \beta$  и имеют нулевые левые и правые скалярные произведения с любым вектором. Поэтому

$$\bar{\beta}([u'], [w']) = \beta(u', w') = \beta(u + (u' - u), w + (w' - w)) = \beta(u, w) = \bar{\beta}([u], [w]),$$

что доказывает корректность формулы (14-18). Если класс  $[u] \in V/\ker \beta$  таков, что  $\bar{\beta}([u], [w]) = 0$  для всех классов  $[w] \in V/\ker \beta$ , то определению формы  $\bar{\beta}$  это означает равенство  $\beta(u, w) = 0$  для всех  $w \in U$ , откуда  $u \in \ker \beta$  и  $[u] = 0$ .  $\square$

Предостережение 14.1. Для произвольной билинейной формы, которая не является симметричной или кососимметричной, левое и правое ядра  $\ker({}^V\beta)$  и  $\ker(\beta^V)$  могут быть различны, и в этом случае предл. 14.5 и предл. 14.6, вообще говоря, неверны.

**14.4.3. Ортогоналы и проекции.** Если форма  $\beta$  на пространстве  $V$  (косо) симметрична, то левый и правый ортогоналы к любому подпространству  $U \subset V$  совпадают друг с другом и обозначаются через  $U^\perp$ . Если (косо) симметричная форма  $\beta$  ограничивается на подпространство  $U \subset V$  в невырожденную на этом подпространстве форму, то  $V = U \oplus U^\perp$  по предл. 14.4. В этом случае подпространство  $U^\perp$  называется *ортогональным дополнением* к подпространству  $U$ . Проекция  $v_U$  вектора  $v \in V$  на  $U$  вдоль  $U^\perp$  называется *ортогональной проекцией* на  $U$  относительно формы  $\beta$ . Вектор  $v_U$  однозначно характеризуется тем, что его левое и правое скалярное произведение со всеми векторами из  $U$  такие же, как и у вектора  $v$ .

Если форма  $\beta$  невырождена на всём пространстве  $V$ , то по предл. 14.4

$$\dim U^\perp = \dim V - \dim U \quad \text{и} \quad U^{\perp\perp} = U$$

для всех подпространств  $U \subset V$ . В этом случае ограничение формы  $\beta$  на подпространство  $U \subset V$  невырождено если и только если невырождено её ограничение на  $U^\perp$ .

ТЕОРЕМА 14.2 (ТЕОРЕМА ЛАГРАНЖА)

Каждое конечномерное векторное пространство с симметричной билинейной формой  $\beta$  над любым полем  $\mathbb{k}$  характеристики  $\text{char } \mathbb{k} \neq 2$  обладает базисом с диагональной матрицей Грама<sup>1</sup>.

Доказательство. Если  $\dim V = 1$  или форма  $\beta$  нулевая, то матрица Грама любого базиса диагональна. Если форма  $\beta$  ненулевая, то найдётся вектор  $e \in V$  с  $\beta(e, e) \neq 0$ , ибо в противном

<sup>1</sup>Такие базисы называются *ортогональными*.

случае  $2\beta(u, w) = \beta(u + w, u + w) - \beta(u, u) - \beta(w, w) = 0$  для всех  $u, w \in V$ . Возьмём такой вектор  $e$  в качестве первого вектора искомого базиса. Поскольку ограничение формы  $\beta$  на одномерное подпространство  $U = \mathbb{k} \cdot e$  невырождено, пространство  $V$  распадается в прямую ортогональную сумму  $U \oplus U^\perp$ . По индукции, в  $U^\perp$  есть базис с диагональной матрицей Грама. Добавляя к нему  $e$ , получаем искомый базис в  $V$ .  $\square$

Следствие 14.1

Над алгебраически замкнутым полем  $\mathbb{k}$  характеристики  $\text{char}(\mathbb{k}) \neq 2$  две симметричных билинейных формы изометрически изоморфны если и только если их матрицы Грама имеют одинаковый ранг.

Доказательство. Над алгебраически замкнутым полем каждый ненулевой диагональный элемент матрицы Грама ортогонального базиса можно сделать единичным, заменив соответствующий ему базисный вектор  $e_i$  на  $e_i / \sqrt{\beta(e_i, e_i)}$ .  $\square$

Пример 14.6 (Ортогональный базис гиперболического пространства)

В гиперболическом пространстве<sup>1</sup>  $\mathbb{k}^{2n}$  с гиперболическим базисом  $e_1, \dots, e_n, e_{n+1}, \dots, e_{2n}$  над произвольным полем  $\mathbb{k}$  характеристики  $\text{char}(\mathbb{k}) \neq 2$  в качестве ортогонального базиса можно взять, например, векторы  $p_i = e_i + e_{n+i}$  и  $q_i = e_i - e_{n+i}$  со скалярными квадратами  $h(p_i, p_i) = 2$  и  $h(q_i, q_i) = -2$ .

Теорема 14.3 (Теорема Дарбу)

Над произвольным полем  $\mathbb{k}$  любой характеристики всякое конечномерное векторное пространство  $V$  с невырожденной кососимметричной билинейной формой  $\omega$  изометрически изоморфно симплектическому пространству<sup>2</sup>. В частности, размерность пространства  $V$  чётна.

Доказательство. Для начала построим в  $V$  базис, матрица Грама которого состоит из расположенных на главной диагонали  $2 \times 2$ -блоков вида

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}. \quad (14-19)$$

В качестве первого базисного вектора возьмём произвольный ненулевой вектор  $e_1 \in V$ . Так как форма  $\omega$  невырождена, найдётся такой вектор  $w \in V$ , что  $\omega(e_1, w) = a \neq 0$ . Положим  $e_2 = w/a$ . Поскольку  $\omega(e_1, e_1) = 0$ , векторы  $e_1$  и  $e_2$  не пропорциональны и порождают двумерное подпространство  $U \subset V$ . Матрица Грама ограничения формы  $\omega$  на это подпространство в базисе  $(e_1, e_2)$  имеет вид (14-19). Так как ограничение формы  $\omega$  на  $U$  невырождено,  $V = U \oplus U^\perp$  и ограничение формы  $\omega$  на  $U^\perp$  тоже невырождено. Индукция по  $\dim V$  позволяет считать, что в подпространстве  $U^\perp$  требуемый базис уже имеется. Добавляя к нему  $e_1, e_2$ , получаем искомый базис  $e_1, e_2, \dots, e_{2k-1}, e_{2k}$  в  $V = U \oplus U^\perp$ . Симплектический базис формы  $\omega$  получается из построенного перестановкой векторов: сначала надо написать подряд все векторы с нечётными номерами, а потом — с чётными.  $\square$

<sup>1</sup>См. прим. 14.2 на стр. 171.

<sup>2</sup>См. прим. 14.3 на стр. 171.

## §15. Симметричные билинейные и квадратичные формы

В этом параграфе мы по умолчанию считаем, что основное поле  $\mathbb{k}$  имеет  $\text{char}(\mathbb{k}) \neq 2$ .

**15.1. Пространства со скалярным произведением.** Будем называть *пространством со скалярным произведением* конечномерное векторное пространство  $V$  над произвольным полем  $\mathbb{k}$  характеристики  $\text{char } \mathbb{k} \neq 2$  с зафиксированной на нём невырожденной<sup>1</sup> симметричной билинейной формой  $\beta : V \times V \rightarrow \mathbb{k}$ . В этом и следующем разделах буква  $V$  по умолчанию обозначает именно такое пространство.

**15.1.1. Ортогональные прямые суммы.** Из двух пространств  $V_1, V_2$  со скалярными произведениями  $\beta_1, \beta_2$  можно изготовить пространство  $V_1 \oplus V_2$  со скалярным произведением  $\beta_1 \dot{+} \beta_2$ , относительно которого слагаемые ортогональны друг другу и которое ограничивается на  $V_1$  и  $V_2$  в  $\beta_1$  и  $\beta_2$ . Это скалярное произведение задаётся формулой

$$[\beta_1 \dot{+} \beta_2]((u_1, u_2), (w_1, w_2)) \stackrel{\text{def}}{=} \beta_1(u_1, u_2) + \beta_2(w_1, w_2).$$

Его матрица Грама в любом базисе, первые  $\dim V_1$  векторов которого образуют базис в  $V_1$  с матрицей Грама  $B_1$ , а последние  $\dim V_2$  векторов — базис в  $V_2$  с матрицей Грама  $B_2$ , имеет блочный вид

$$\begin{pmatrix} B_1 & 0 \\ 0 & B_2 \end{pmatrix}.$$

Пространство  $V_1 \oplus V_2$  со скалярным произведением  $\beta_1 \dot{+} \beta_2$  обозначается  $V_1 \dot{+} V_2$  и называется *ортогональной прямой суммой* пространств  $V_1$  и  $V_2$ .

УПРАЖНЕНИЕ 15.1. Обозначим через  $H_{2n}$  гиперболическое пространство<sup>2</sup> размерности  $2n$ . Постройте изометрический изоморфизм<sup>3</sup>  $H_{2m} \dot{+} H_{2k} \simeq H_{2(m+k)}$ .

**15.1.2. Изотропные и анизотропные подпространства.** Ненулевой вектор  $v \in V$  называется *изотропным*, если  $\beta(v, v) = 0$ . Подпространство  $U \subset V$ , целиком состоящее из изотропных векторов, изотропно в смысле н° 14.2.2 на стр. 172, т. е.  $\beta(u, w) = 0$  для всех  $u, w \in U$ , поскольку

$$2\beta(u, w) = \beta(u + w, u + w) - \beta(u, u) - \beta(w, w) = 0.$$

Подпространство  $U \subset V$  называется *анизотропным*, если в нём нет изотропных векторов. Скалярное произведение на  $V$  называется *анизотропным*, если анизотропно всё пространство  $V$ . Например, евклидово скалярное произведение на вещественном векторном пространстве анизотропно. Так как анизотропная форма обладает свойствами (5,6) из предл. 14.1 на стр. 170, каждая анизотропная форма невырождена. Поэтому для любого анизотропного подпространства  $U \subset V$  имеет место ортогональное разложение  $V = U \oplus U^\perp$  из предл. 14.4 на стр. 175.

Предложение 15.1

Каждое изотропное подпространство  $U$  в пространстве  $V$  со скалярным произведением  $\beta$  содержится в некотором гиперболическом подпространстве  $W \subset V$  размерности  $\dim W = 2 \dim U$ . При этом любой базис подпространства  $U$  дополняется до гиперболического базиса пространства  $W$ .

<sup>1</sup>См. предл. 14.1 на стр. 170.

<sup>2</sup>См. прим. 14.2 на стр. 171.

<sup>3</sup>См. н° 14.1.4 на стр. 170.

Доказательство. Рассмотрим произвольный базис  $u_1, u_2, \dots, u_m$  в  $U$ , дополним его до базиса в  $V$  и обозначим через  $u_1^\vee, u_2^\vee, \dots, u_m^\vee$  первые  $m$  векторов ортогонально двойственного базиса. Тогда

$$\beta(u_i, u_j^\vee) = \begin{cases} 1 & \text{при } i = j \\ 0 & \text{при } i \neq j, \end{cases} \quad (15-1)$$

и эти соотношения ортогональности не нарушаются при добавлении к любому из векторов  $u_j^\vee$  произвольной линейной комбинации векторов  $u_i$ . Заменяем каждый из векторов  $u_j^\vee$  на вектор

$$w_j = u_j^\vee - \frac{1}{2} \sum_{v=1}^m \beta(u_j^\vee, u_v^\vee) \cdot u_v.$$

Векторы  $w_1, w_2, \dots, w_m$  по-прежнему удовлетворяют соотношениям (15-1) и вдобавок

$$\beta(w_i, w_j) = \beta(u_i^\vee, u_j^\vee) - \frac{1}{2} \beta(u_i^\vee, u_j^\vee) - \frac{1}{2} \beta(u_j^\vee, u_i^\vee) = 0,$$

т. е.  $2m$  векторов  $u_i, w_j, 1 \leq i, j \leq m$ , образуют гиперболический базис в своей линейной оболочке, которую мы и возьмём в качестве  $W$ .  $\square$

#### ТЕОРЕМА 15.1

Каждое пространство  $V$  со скалярным произведением распадается в прямую ортогональную сумму  $V \simeq H_{2k} \dot{+} A$ , первое слагаемое которой гиперболическое и может быть нулевым или совпадать со всем пространством  $V$ , а второе слагаемое  $A = H_{2k}^\perp$  анизотропно.

Доказательство. Индукция по  $\dim V$ . Если  $V$  анизотропно (что так при  $\dim V = 1$ ), доказывать нечего. Если существует ненулевой изотропный вектор  $e \in V$ , то по [предл. 15.1](#) он лежит в некоторой гиперболической плоскости  $H_2 \subset V$ , и  $V = H_2 \oplus H_2^\perp$  согласно [предл. 14.4](#). По индукции,  $H_2^\perp = H_{2m} \oplus A$ , где  $A = H_{2m}^\perp$  анизотропно. Поэтому  $V = H_{2m+2} \oplus A$  и  $A = H_{2m+2}^\perp$ .  $\square$

Замечание 15.1. Ниже, в [теор. 15.4](#) на стр. 183, мы увидим, что разложение из [теор. 15.1](#) единственно в следующем смысле: если  $V \simeq H_{2k} \dot{+} U \simeq H_{2m} \dot{+} W$ , где  $U$  и  $W$  анизотропны, то  $k = m$  и существует изометрический изоморфизм  $U \simeq W$ .

#### Следствие 15.1

Следующие свойства пространства  $V$  со скалярным произведением эквивалентны:

- 1)  $V$  изометрически изоморфно гиперболическому пространству
- 2)  $V$  является прямой суммой двух изотропных подпространств
- 3)  $\dim V$  чётна, и в  $V$  имеется изотропное подпространство половинной размерности.

Доказательство. Импликация (1) $\Rightarrow$ (2) очевидна. Пусть выполнено (2). По [предл. 14.2](#) размерность каждого из двух изотропных прямых слагаемых не превышает половины размерности  $V$ , что возможно только если обе эти размерности равны  $\frac{1}{2} \dim V$ . Тем самым, (2) $\Rightarrow$ (3). По [предл. 15.1](#) на стр. 179 каждое изотропное подпространство размерности  $\frac{1}{2} \dim V$  содержится в гиперболическом подпространстве размерности  $\dim V$ , которое таким образом совпадает со всем пространством  $V$ , что даёт импликацию (3) $\Rightarrow$ (1).  $\square$

**15.2. Изометрии и отражения.** Всякий анизотропный вектор  $e \in V$  задаёт разложение пространства  $V$  в прямую ортогональную сумму  $V = \mathbb{k} \cdot e \oplus e^\perp$ . Линейный оператор  $\sigma_e: V \rightarrow V$ , тождественно действующий на гиперплоскости  $e^\perp$  и переводящий вектор  $e$  в  $-e$ , называется *отражением* в гиперплоскости  $e^\perp$ , см. рис. 15◊1. Произвольный вектор  $v = v_e + v_{e^\perp} \in V$ , где  $v_e = e \beta(e, v) / \beta(e, e)$  — проекция вектора  $v$  на одномерное подпространство<sup>1</sup>  $\mathbb{k} \cdot e$  вдоль гиперплоскости  $e^\perp$ , а  $v_{e^\perp} = v - v_e \in e^\perp$ , переходит при этом в вектор

$$\sigma_e(v) = -v_e + v_{e^\perp} = v - 2v_e = v - 2 \frac{\beta(e, v)}{\beta(e, e)} \cdot e. \quad (15-2)$$

УПРАЖНЕНИЕ 15.2. Убедитесь, что  $\sigma_e \in O_\beta(V)$  и  $\sigma_e^2 = \text{Id}_V$ , и докажите для любых изометрии  $f \in O(V)$  и анизотропного вектора  $e \in V$  равенство  $f \circ \sigma_e \circ f^{-1} = \sigma_{f(e)}$ .

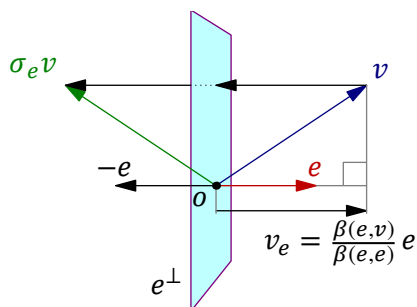


Рис. 15◊1. Отражение  $\sigma_e$ .

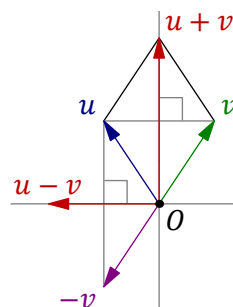


Рис. 15◊2. Отражения в ромбе.

ЛЕММА 15.1

В любом пространстве  $V$  со скалярным произведением  $\beta$  для каждой пары различных анизотропных векторов  $u, v$  с равными скалярными квадратами  $\beta(u, u) = \beta(v, v) \neq 0$  существует отражение, переводящее  $u$  либо в  $v$ , либо в  $-v$ .

Доказательство. Если  $u$  и  $v$  коллинеарны, то искомым отражением является  $\sigma_v = \sigma_u$ . Если  $u$  и  $v$  не коллинеарны, то хотя бы одна из двух диагоналей  $u + v, u - v$  натянутого на них ромба (см. рис. 15◊2) анизотропна, поскольку эти диагонали ортогональны:

$$\beta(u + v, u - v) = \beta(u, u) - \beta(v, v) = 0,$$

и их линейная оболочка содержит анизотропные векторы  $u, v$ . Тем самым, хотя бы одно из отражений  $\sigma_{u-v}, \sigma_{u+v}$  определено. При этом  $\sigma_{u-v}(u) = v$ , а  $\sigma_{u+v}(u) = -v$ .  $\square$

УПРАЖНЕНИЕ 15.3. Проверьте, последние два равенства.

ТЕОРЕМА 15.2

Всякая изометрия  $n$ -мерного пространства со скалярным произведением является композицией не более чем  $2n$  отражений.

<sup>1</sup>Мы пользуемся тем, что  $e^\vee = e / \beta(e, e)$  является двойственным к  $e$  относительно формы  $\beta$  базисным вектором одномерного пространства  $\mathbb{k}e$  и по форм. (14-17) на стр. 175 ортогональная проекция произвольного вектора  $v$  на это подпространство равна  $v_e = \beta(e, v)e^\vee$ .

Доказательство. Индукция по  $n$ . Ортогональная группа одномерного пространства состоит из тождественного оператора  $E$  и отражения  $-E$ . Пусть  $n > 1$  и  $f : V \rightarrow V$  — изометрия. Выберем в  $V$  какой-нибудь анизотропный вектор  $v$  и обозначим через  $\sigma$  отражение, переводящее  $f(v)$  в  $v$  или в  $-v$ . Композиция  $\sigma f$  переводит  $v$  в  $\pm v$ , а значит, переводит в себя  $(n-1)$ -мерную гиперплоскость  $v^\perp$ . По индукции, действие  $\sigma f$  на  $v^\perp$  является композицией не более  $2n-2$  отражений в гиперплоскостях внутри  $v^\perp$ . Продолжим их до отражений всего пространства  $V$ , добавив в зеркало каждого отражения вектор  $v$ . Композиция полученных отражений совпадает с  $\sigma f$  на гиперплоскости  $v^\perp$ , а её действие на  $v$  либо такое же, как у  $\sigma f$  (при  $\sigma f(v) = v$ ), либо отличается от него знаком (при  $\sigma f(v) = -v$ ). Поэтому  $\sigma f$ , как оператор на всём пространстве  $V$ , есть композиция построенных  $2n-2$  отражений и, возможно, ещё одного отражения в гиперплоскости  $v^\perp$ . Следовательно,  $f = \sigma \sigma f$  это композиция не более  $2n$  отражений.  $\square$

Упражнение 15.4. Покажите, что в анизотропном пространстве  $V$  в условиях лем. 15.1 всегда найдётся отражение, переводящее  $u$  в точности в  $v$ , и выведите отсюда, что любая изометрия  $n$ -мерного анизотропного пространства является композицией не более  $n$  отражений.

ТЕОРЕМА 15.3 (ЛЕММА ВИТТА)

Пусть четыре пространства  $U_1, W_1, U_2, W_2$  со скалярными произведениями таковы, что некоторые два из трёх пространств  $U_1, U_1 \dot{+} W_1, W_1$  изометрически изоморфны соответствующей паре пространств из тройки  $U_2, U_2 \dot{+} W_2, W_2$ . Тогда оставшиеся третьи элементы троек тоже изометрически изоморфны.

Доказательство. Если есть изометрические изоморфизмы  $f : U_1 \xrightarrow{\cong} U_2$  и  $g : W_1 \xrightarrow{\cong} W_2$ , то их прямая сумма  $f \oplus g : U_1 \dot{+} W_1 \rightarrow U_2 \dot{+} W_2, (u, w) \mapsto (f(u), g(w))$ , является требуемым изометрическим изоморфизмом. Оставшиеся два случая симметричны, и мы разберём один из них. Пусть имеются изометрические изоморфизмы

$$f : U_1 \xrightarrow{\cong} U_2 \quad \text{и} \quad h : U_1 \dot{+} W_1 \xrightarrow{\cong} U_2 \dot{+} W_2.$$

Изометрический изоморфизм  $g : W_1 \xrightarrow{\cong} W_2$  строится индукцией по  $\dim U_1 = \dim U_2$ . Если пространство  $U_1$  одномерно с базисом  $u$ , то вектор  $u$  анизотропен. Поэтому векторы  $f(u)$  и  $h(u, 0)$  тоже анизотропны и имеют одинаковые скалярные квадраты. Обозначим через  $\sigma$  отражение пространства  $U_2 \dot{+} W_2$ , переводящее  $h(u, 0)$  в  $(\pm f(u), 0)$ . Композиция

$$\sigma h : U_1 \dot{+} W_1 \xrightarrow{\cong} U_2 \dot{+} W_2$$

изометрично отображает одномерное подпространство  $U_1$  первой суммы на одномерное подпространство  $U_2$  второй, а значит, изометрично отображает ортогональное дополнение к  $U_1$  в первой сумме на ортогональное дополнение к  $U_2$  во второй, что и даёт требуемый изоморфизм  $\sigma h|_{W_1} : W_1 \xrightarrow{\cong} W_2$ . Пусть теперь  $\dim U_1 > 1$ . Выберем в  $U_1$  любой анизотропный вектор  $u$  и рассмотрим ортогональные разложения

$$U_1 \dot{+} W_1 = \mathbb{k} \cdot u \dot{+} u^\perp \dot{+} W_1 \quad \text{и} \quad U_2 \dot{+} W_2 = \mathbb{k} \cdot f(u) \dot{+} f(u)^\perp \dot{+} W_2,$$

в которых  $u^\perp \subset U_1$  и  $f(u)^\perp \subset U_2$  означают ортогональные дополнения к анизотропным векторам  $u$  и  $f(u)$  внутри  $U_1$  и  $U_2$  соответственно. Так как пространства  $\mathbb{k} \cdot u$  и  $\mathbb{k} \cdot f(u)$  изометрически изоморфны, по уже доказанному существуют изометрии

$$f' : u^\perp \xrightarrow{\cong} f(u)^\perp \quad \text{и} \quad h' : u^\perp \dot{+} W_1 \xrightarrow{\cong} f(u)^\perp \dot{+} W_2,$$

к которым применимо индуктивное предположение.  $\square$

## ТЕОРЕМА 15.4

Построенное в теор. 15.1 разложение пространства  $V$  со скалярным произведением в прямую ортогональную сумму гиперболического и анизотропного подпространств единственно в том смысле, что для любых двух таких разложений  $V = H_{2k} \dot{+} U = H_{2m} \dot{+} W$  имеет место равенство  $k = m$  и существует изометрический изоморфизм  $U \simeq W$ .

Доказательство. Пусть  $m \geq k$ , так что  $H_{2m} = H_{2k} \dot{+} H_{2(m-k)}$ . Тожественное отображение  $\text{Id} : V \rightarrow V$  задаёт изометрический изоморфизм  $H_{2k} \dot{+} U \simeq H_{2k} \dot{+} H_{2(m-k)} \dot{+} W$ . По лемме Витта существует изометрический изоморфизм  $U \simeq H_{2(m-k)} \dot{+} W$ . Так как  $U$  анизотропно,  $H_{2(m-k)} = 0$  (иначе в  $U$  будет ненулевой изотропный вектор), откуда  $k = m$  и  $U \simeq W$ .  $\square$

## ТЕОРЕМА 15.5

Если скалярное произведение на пространстве  $V$  невырожденно ограничивается на подпространства  $U, W \subset V$  и существует изометрический изоморфизм  $\varphi : U \simeq W$ , то он продолжается (неоднозначно) до такого изометрического автоморфизма  $f : V \simeq V$ , что  $f|_U = \varphi$ .

Доказательство. Если есть хоть какой-нибудь изометрический изоморфизм  $\psi : U^\perp \simeq W^\perp$ , то изометрия  $f = \varphi \oplus \psi : U \oplus U^\perp \simeq W \oplus W^\perp$ ,  $(u, u') \mapsto (\varphi(u), \psi(u'))$  является требуемым автоморфизмом пространства  $V$ . В силу сделанных предположений имеются изометрические изоморфизмы  $\eta : U \dot{+} U^\perp \simeq V$ ,  $(u, u') \mapsto u + u'$ , и  $\zeta : U \dot{+} W^\perp \simeq V$ ,  $(u, w') \mapsto \varphi(u) + w'$ . Композиция  $\zeta^{-1}\eta : U \dot{+} U^\perp \simeq U \dot{+} W^\perp$  тоже изометрический изоморфизм. Так что по лемме Витта<sup>1</sup> ортогоналы  $U^\perp$  и  $W^\perp$  изометрически изоморфны.  $\square$

## СЛЕДСТВИЕ 15.2

Для каждого натурального числа  $k$  в диапазоне  $1 \leq k \leq \dim V/2$  группа изометрий  $O(V)$  транзитивно действует на  $k$ -мерных изотропных и  $2k$ -мерных гиперболических подпространствах в  $V$ .

Доказательство. Утверждение про гиперболические подпространства вытекает непосредственно из теор. 15.5, а про изотропные — получается из него применением предл. 15.1.  $\square$

**15.3. Квадратичные формы.** Функция  $q : V \rightarrow \mathbb{k}$  на  $n$ -мерном векторном пространстве  $V$  над полем  $\mathbb{k}$  называется *квадратичной формой*, если она является однородным многочленом второй степени от координат в некотором базисе, т. е. существуют такие базис  $e = (e_1, \dots, e_n)$  в  $V$  и однородный многочлен второй степени  $q_e \in \mathbb{k}[x_1, x_2, \dots, x_n]$ , что

$$q(\lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2 + \dots + \lambda_n e_n) = q_e(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$$

для всех  $(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{k}^n$ . Если  $\text{char}(\mathbb{k}) \neq 2$ , то многочлен  $q_e$  можно записать в виде

$$q_e(x_1, x_2, \dots, x_n) = \sum_{i,j=1}^n q_{ij} x_i x_j, \quad (15-3)$$

где суммирование происходит по всем парам индексов  $1 \leq i, j \leq n$ , а коэффициенты  $q_{ij}$  симметричны по  $i$  и  $j$ , т. е. при  $i \neq j$  число  $q_{ji} = q_{ij}$  равно половине<sup>2</sup> фактического коэффициента

<sup>1</sup>См. теор. 15.3 на стр. 182.

<sup>2</sup>Обратите внимание, что над полем характеристики 2 многочлен  $x_1 x_2$  не записывается в виде (15-3).

при  $x_i x_j$  в многочлене  $q_e$ , получающегося после приведения подобных слагаемых в (15-3). Если организовать числа  $q_{ij}$  в симметричную матрицу  $Q_e = (q_{ij})$ , которую мы будем называть *матрицей Грама* многочлена  $q_e$ , и обозначить через  $x$  и  $x^t = (x_1, x_2, \dots, x_n)$  столбец и строку, составленные из переменных, то (15-3) можно переписать в виде

$$q(x_1, x_2, \dots, x_n) = \sum_{i,j=1}^n x_i q_{ij} x_j = x^t Q_e x. \quad (15-4)$$

Сравнивая это с форм. (14-3) на стр. 168, мы заключаем, что  $q(v) = \tilde{q}(v, v)$ , где  $\tilde{q} : V \times V \rightarrow \mathbb{k}$  — симметричная билинейная форма с матрицей Грама  $Q_e$  в базисе  $e$ . Поскольку

$$q(u+w) - q(u) - q(w) = \tilde{q}(u+w, u+w) - \tilde{q}(u, u) - \tilde{q}(w, w) = 2\tilde{q}(u, w),$$

симметричная билинейная форма  $\tilde{q}$  со свойством  $\tilde{q}(v, v) = q(v)$  однозначно определяется квадратичной формой  $q$ , если  $\text{char } \mathbb{k} \neq 2$ . Симметричная билинейная форма  $\tilde{q}$  называется *поляризацией* квадратичной формы  $q$ . Обратите внимание, что взаимно однозначное соответствие между квадратичными и симметричными билинейными формами

$$\begin{aligned} \tilde{q}(u, w) &\mapsto q(v) = \tilde{q}(v, v) \\ q(v) &\mapsto \tilde{q}(u, w) = \frac{1}{2}(q(u+w) - q(u) - q(w)) \end{aligned} \quad (15-5)$$

не зависят от базиса  $e$  в  $V$ . В частности, для любого базиса  $f = e C_{ef}$  в  $V$  значение  $q(v)$  является однородным многочленом второй степени  $q_f$  от координат вектора  $v$  в базисе  $f$ , причём матрица Грама этого многочлена, равная матрице Грама билинейной формы  $\tilde{q}$  в базисе  $f$ , будет равна<sup>1</sup>  $Q_f = C_{ef}^t Q_e C_{ef}$ .

Поскольку при переходе от базиса к базису определитель Грама умножается на квадрат определителя матрицы перехода, класс числа  $\det Q_e \in \mathbb{k}$  по модулю умножения на ненулевые квадраты из поля  $\mathbb{k}$  не зависит от выбора базиса  $e$ . Мы будем обозначать этот класс  $\det q \in \mathbb{k}/\mathbb{k}^{*2}$  и называть его *определителем Грама* квадратичной формы  $q$ . Квадратичная форма  $q$  называется *вырожденной*, если  $\det q = 0$ . Формы с  $\det q \neq 0$  называются *невырожденными*. Таким образом, невырожденность квадратичной формы  $q$  означает в точности то же, что невырожденность её поляризации<sup>2</sup>  $\tilde{q}$ . Под *рангом* квадратичной формы  $q$  мы понимаем ранг её поляризации  $\tilde{q}$ , равный рангу матрицы Грама  $Q_e$  в любом базисе  $e$ . Также, как и для симметричных билинейных форм, мы будем называть ненулевой вектор  $v \in V$  *изотропным* для квадратичной формы  $q$ , если  $q(v) = 0$ . Квадратичная форма называется *анизотропной*, если  $q(v) \neq 0$  при  $v \neq 0$ .

Из доказанных выше результатов про симметричные билинейные формы немедленно получаются аналогичные результаты про квадратичные формы.

Следствие 15.3 (из теор. 15.1 на стр. 180)

Всякая квадратичная форма  $q$  над произвольным полем  $\mathbb{k}$  характеристики  $\text{char } \mathbb{k} \neq 2$  в подходящих координатах записывается в виде  $x_1 x_{i+1} + x_2 x_{i+2} + \dots + x_i x_{2i} + \alpha(x_{2i+1}, x_{2i+2}, \dots, x_r)$ , где  $r = \text{rk}(q)$  и  $\alpha(x) \neq 0$  при  $x \neq 0$ .  $\square$

Следствие 15.4 (из теор. 14.2 на стр. 177)

Всякая квадратичная форма над произвольным полем  $\mathbb{k}$  характеристики  $\text{char } \mathbb{k} \neq 2$  линейной обратимой заменой переменных приводится к виду  $\sum a_i x_i^2$ .  $\square$

<sup>1</sup>См. формулу (14-2) на стр. 168.

<sup>2</sup>См. предл. 14.1 на стр. 170.



Следствие 15.5 (из сл. 14.1 на стр. 178)

Два однородных многочлена второй степени  $f, g \in \mathbb{k}[x_1, x_2, \dots, x_n]$  над алгебраически замкнутым полем  $\mathbb{k}$  характеристики  $\text{char}(\mathbb{k}) \neq 2$  тогда и только тогда переводятся друг в друга линейными обратимыми заменами переменных, когда задаваемые им квадратичные формы  $f, g: \mathbb{k}^n \rightarrow \mathbb{k}$  имеют одинаковый ранг.  $\square$

Пример 15.1 (квадратичные формы от двух переменных)

Согласно сл. 15.4, ненулевая квадратичная форма от двух переменных

$$q(x) = a x_1^2 + 2 b x_1 x_2 + c x_2^2 = (x_1, x_2) \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \quad (15-6)$$

подходящей линейной заменой координат приводятся либо к виду  $\alpha t^2$  с  $\alpha \neq 0$ , либо к виду

$$\alpha t_1^2 + \beta t_2^2, \quad \text{где } \alpha\beta \neq 0.$$

Условимся писать  $\xi \sim \eta$  для чисел  $\xi, \eta \in \mathbb{k}$ , если  $\xi = \lambda^2 \eta$  для какого-нибудь ненулевого  $\lambda \in \mathbb{k}$ . Тогда в первом случае  $ac - b^2 \sim \det q \sim \alpha \cdot 0 = 0$ , т. е. форма  $q$  вырождена, а во втором случае  $ac - b^2 \sim \det q \sim \alpha\beta \neq 0$  и форма  $q$  невырождена. Тем самым, вырожденность ненулевой квадратичной формы (15-6) означает, что с точностью до постоянного множителя она является полным квадратом линейной формы  $t \in V^*$ . Такая форма  $q$  зануляется вдоль одномерного подпространства  $\text{Ann}(t) \subset V$  и отлична от нуля на всех остальных векторах.

Если форма (15-6) невырождена, и у неё есть ненулевой изотропный вектор  $v = (\vartheta_1, \vartheta_2)$ , то из равенства  $\alpha \vartheta_1^2 + \beta \vartheta_2^2 = 0$  вытекает, что  $\vartheta_2 \neq 0$  и  $-\det q \sim -\alpha\beta \sim -\beta/\alpha = (\vartheta_1/\vartheta_2)^2$  является квадратом в поле  $\mathbb{k}$ . В этом случае многочлен

$$\alpha t_1^2 + \beta t_2^2 = \alpha \left( t_1 + \frac{\vartheta_1}{\vartheta_2} t_2 \right) \left( t_1 - \frac{\vartheta_1}{\vartheta_2} t_2 \right)$$

раскладывается над полем  $\mathbb{k}$  в произведение двух непропорциональных линейных форм. Поэтому квадратичная форма  $q$ , у которой  $-\det q$  является ненулевым квадратом, тождественно зануляется на двух одномерных подпространствах и отлична от нуля на всех прочих векторах. Мы будем называть такие формы *гиперболическими*<sup>1</sup>. Если же  $-\det q$  не квадрат, то форма  $q$  анизотропна. Число  $-\det(q) = b^2 - ac$  часто обозначают через  $D/4$  и называют *D дискриминантом* квадратичной формы (15-6).

**15.4. Квадратичные формы над конечными полями.** Из курса алгебры известно<sup>2</sup>, что для каждого простого  $p \in \mathbb{N}$  любого  $m \in \mathbb{N}$  существует единственное с точностью до изоморфизма поле  $\mathbb{F}_q$  из  $q = p^m$  элементов, и каждое конечное поле изоморфно одному и только одному из полей  $\mathbb{F}_q$ . Следуя принятому в начале этой лекции соглашению, всюду далее мы считаем, что  $p = \text{char } \mathbb{F}_q > 2$ . Зафиксируем какой-нибудь элемент  $\varepsilon \in \mathbb{F}_q$ , не являющийся квадратом.

Упражнение 15.5. Убедитесь, что ненулевые квадраты образуют в мультипликативной группе  $\mathbb{F}_q^*$  поля  $\mathbb{F}_q$  подгруппу индекса 2. В частности, нужный нам элемент  $\varepsilon$  существует, и любой ненулевой элемент поля  $\mathbb{F}_q$  умножением на подходящий ненулевой квадрат можно сделать равным либо 1, либо  $\varepsilon$ .

<sup>1</sup>Поскольку поляризация такой формы является гиперболическим скалярным произведением.

<sup>2</sup>См. раздел 3.5 на стр. 45 лекции <http://gorod.bogomolov-lab.ru/ps/stud/algebra-1/1314/lec-03.pdf>.

ЛЕММА 15.2

При любых  $a_1, a_2 \in \mathbb{F}_q^*$  квадратичная форма  $a_1x_1^2 + a_2x_2^2$  на двумерном координатном пространстве  $\mathbb{F}_q^2$  принимает все значения из поля  $\mathbb{F}_q$ .

Доказательство. В силу [упр. 15.5](#) при любых фиксированных  $a_1, a_2 \in \mathbb{F}_q^*$  и  $b \in \mathbb{F}_q$  чисел вида  $a_1x_1^2$  и чисел вида  $b - a_2x_2^2$ , где  $x_1, x_2$  независимо пробегает  $\mathbb{F}_q$ , имеется ровно по

$$1 + \frac{q-1}{2} = \frac{q+1}{2}$$

штук. Следовательно эти два множества чисел имеют общий элемент  $a_1x_1^2 = b - a_2x_2^2$ . Тем самым,  $f(x_1, x_2) = b$ .  $\square$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 15.2

Каждая квадратичная форма  $q$  ранга  $r$  над полем  $\mathbb{F}_q$  в подходящих координатах записывается как  $x_1^2 + \dots + x_{r-1}^2 + x_r^2$  или как  $x_1^2 + \dots + x_{r-1}^2 + \varepsilon x_r^2$ , и эти две формы изометрически не изоморфны.

Доказательство. По [теор. 14.2](#) форма  $q$  в подходящих координатах записывается в виде

$$a_1x_1^2 + \dots + a_rx_r^2, \quad \text{где все } a_i \neq 0.$$

Согласно [упр. 15.5](#), умножая базисные векторы на подходящие ненулевые константы, мы можем считать, что каждое  $a_i$  равно либо 1, либо  $\varepsilon$ . Если  $a_i = a_j = \varepsilon$  при каких-то  $i \neq j$ , то в линейной оболочке  $U$  базисных векторов  $e_i, e_j$  по [лем. 15.2](#) найдётся вектор  $v_i$  с  $q(v_i) = 1$ . Ортогональное дополнение к  $v_i$  в плоскости  $U$  одномерно, и форма  $q$  ограничивается на него невырожденно. Поэтому там найдётся вектор  $v_j$  с  $q(v_j) = 1$  или  $\varepsilon$ . Заменяя  $e_i, e_j$  на  $v_i, v_j$ , мы сохраняем вид формы, но получаем  $a_i = 1$ , строго уменьшая тем самым число коэффициентов, равных  $\varepsilon$ . Эту процедуру можно повторять, пока таких коэффициентов останется не более одного. Формы  $q = x_1^2 + \dots + x_{r-1}^2 + x_r^2$  и  $q' = x_1^2 + \dots + x_{r-1}^2 + \varepsilon x_r^2$  изометрически не изоморфны, поскольку индуцированные ими невырожденные квадратичные формы  $q_{\text{red}}$  и  $q'_{\text{red}}$  на факторах  $V/\ker \tilde{q}$  и  $V/\ker \tilde{q}'$  исходного пространства  $V$ , где были заданы формы, по ядрам этих форм<sup>1</sup>, имеют разные определители Грама:  $\det q_{\text{red}} = 1$  является квадратом, а  $\det q'_{\text{red}} = \varepsilon$  — нет.  $\square$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 15.3

Всякая квадратичная форма на пространстве размерности  $\geq 3$  над полем  $\mathbb{F}_q$  имеет ненулевой изотропный вектор.

Доказательство. По [теор. 14.2](#) форма записывается в подходящем базисе как

$$a_1x_1^2 + a_2x_2^2 + a_3x_3^2 + \dots$$

Если  $a_1 = 0$  или  $a_2 = 0$ , то вектор  $(1, 0, 0, \dots)$  или вектор  $(0, 1, 0, \dots)$  изотропен. Если  $a_1a_2 \neq 0$ , то по [лем. 15.2](#) найдутся такие  $\lambda, \mu \in \mathbb{F}_q$ , что  $a_1\lambda^2 + a_2\mu^2 = -a_3$ . Тогда вектор  $(\lambda, \mu, 1, 0, \dots)$  изотропен.  $\square$

<sup>1</sup>См. [предл. 14.6](#) на стр. 177.

Предложение 15.4 (перечисление анизотропных форм)

Анизотропные формы над полем  $\mathbb{F}_q$ , где  $q = p^m$  и  $p > 2$ , имеются только в размерностях 1 и 2. В размерности 2 квадратичная форма  $x_1^2 + x_2^2$  анизотропна если и только если  $q \equiv -1 \pmod{4}$ , а форма  $x_1^2 + \varepsilon x_2^2$  анизотропна если и только если  $q \equiv 1 \pmod{4}$ .

Доказательство. Из [прим. 15.1](#) на стр. 185 вытекает, что форма  $x_1^2 + x_2^2$  имеет изотропный вектор если и только если её  $D/4 = -1$  является квадратом в  $\mathbb{F}_q$ . В этом случае вторая форма  $x_1^2 + \varepsilon x_2^2$  имеет  $D/4 = -\varepsilon$ , не являющееся квадратом, и тем самым анизотропна. Наоборот, если  $-1$  не квадрат, то  $-\varepsilon$  квадрат, и форма  $x_1^2 + \varepsilon x_2^2$  имеет изотропный вектор. Остаётся убедиться, что  $-1$  является квадратом в  $\mathbb{F}_q$  если и только если  $q \equiv 1 \pmod{4}$ . Для этого рассмотрим гомоморфизм мультипликативных групп  $\gamma : \mathbb{F}_q^* \rightarrow \mathbb{F}_q^*$ ,  $x \mapsto x^{\frac{q-1}{2}}$ . Поскольку порядок  $|\mathbb{F}_q^*| = q - 1$ , для каждого  $x \in \mathbb{F}_q^*$  выполняется равенство  $x^{q-1} = 1$ , из которого вытекает, что все ненулевые квадраты лежат в  $\ker \gamma$ , а все  $x \in \text{im } \gamma$  имеют  $x^2 = 1$ , откуда  $\text{im } \gamma \subset \{\pm 1\}$ . Так как у уравнения  $x^{\frac{q-1}{2}} = 1$  не более  $(q - 1)/2$  корней в поле  $\mathbb{F}_q$ , образ  $\gamma$  имеет порядок 2, а  $\ker \gamma \subset \mathbb{F}_q^*$  имеет индекс 2 и совпадает с группой квадратов, т. е.  $x \in \mathbb{F}_q^*$  является квадратом тогда и только тогда, когда  $x^{\frac{q-1}{2}} = 1$ . В частности,  $-1$  квадрат если и только если  $(q - 1)/2$  чётно.  $\square$

**15.5. Вещественные квадратичные формы.** Из [сл. 15.4](#) вытекает, что любая квадратичная форма на вещественном векторном пространстве  $V$  в подходящем базисе записывается в виде

$$q(x) = x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_p^2 - x_{p+1}^2 - x_{p+2}^2 - \dots - x_{p+m}^2. \quad (15-7)$$

Для этого надо перейти к базису с диагональной матрицей Грама и поделить каждый базисный вектор  $e_i$  с  $q(e_i) \neq 0$  на  $\sqrt{|q(e_i)|}$ . Числа  $p$  и  $m$  в представлении (15-7) называются *положительным* и *отрицательным индексами инерции*, упорядоченная пара  $(p, m)$  — *сигнатурой*, а разность  $p - m$  — просто *индексом* вещественной квадратичной формы  $q$ .

Теорема 15.6

Числа  $p$  и  $m$  в представлении (15-7) не зависят от выбора базиса, в котором квадратичная форма имеет вид (15-7).

Доказательство. Будем считать, что  $p \geq m$ , поскольку противоположный случай сводится к этому заменой  $q$  на  $-q$ . Сумма  $p + m = \text{rk } q$  равна рангу билинейной формы  $\tilde{q}$  и не зависит от выбора базиса. Линейная оболочка базисных векторов  $e_k$  с номерами  $k > p + m$  является ядром билинейной формы  $\tilde{q}$ . Классы  $[e_i]$  остальных базисных векторов по модулю  $\ker \tilde{q}$  образуют базис фактор пространства  $W = V/\ker \tilde{q}$ . По [предл. 14.6](#) на стр. 177 форма  $\tilde{q}$  корректно задаёт на  $W$  невырожденную симметричную билинейную форму  $\tilde{q}_{\text{red}}([u], [w]) = \tilde{q}(u, w)$ , которая в базисе из классов  $[e_i]$  с  $1 \leq i \leq p + m$  записывается той же самой формулой (15-7). Каждая пара базисных векторов  $[e_i], [e_{p+i}]$  порождает гиперболическую плоскость с гиперболическим базисом из векторов  $([e_i] \pm [e_{p+i}]) / \sqrt{2}$ . Поэтому форма  $\tilde{q}_{\text{red}}$  является прямой ортогональной суммой гиперболического пространства  $H_{2m}$ , натянутого на классы  $[e_i], [e_{p+i}]$  с  $1 \leq i \leq m$ , и анизотропного пространства размерности  $p - m$ , натянутого на оставшиеся классы  $[e_j]$  с  $m < j \leq p$ . По [теор. 15.4](#) на стр. 183 размерности гиперболического и анизотропного слагаемых не зависят от выбора разложения пространства со скалярным произведением в ортогональную сумму гиперболического и анизотропного. Поэтому индекс  $p - m$  и отрицательный индекс инерции  $m$  не зависят от выбора базиса, в котором форма  $q$  имеет вид (15-7).  $\square$

Следствие 15.6 (из доказательства теор. 15.6)

Для каждого  $n$  на пространстве  $\mathbb{R}^n$  с точностью до изометрического изоморфизма имеются ровно два анизотропных скалярных произведения — евклидово и *антиевклидово*, получающиеся из евклидова сменой знака. Вещественные квадратичные формы положительного индекса имеют ненулевое евклидово анизотропное слагаемое, а формы отрицательного индекса — ненулевое *антиевклидово* анизотропное слагаемое, размерности которых равны абсолютной величине индекса. Гиперболичность невырожденной вещественной квадратичной формы равносильна тому, что её индекс равен нулю.  $\square$

Следствие 15.7

Два однородных многочлена второй степени  $f, g \in \mathbb{R}[x_1, x_2, \dots, x_n]$  тогда и только тогда переводятся друг в друга линейными обратимыми заменами переменных, когда задаваемые ими квадратичные формы  $f, g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  имеют одинаковый ранг и индекс.  $\square$

**15.5.1. Квадратичные формы на евклидовом пространстве.** Если на вещественном векторном пространстве  $V$  имеется евклидова структура, то поляризацию  $\tilde{q}$  любой квадратичной формы  $q$  на  $V$  можно единственным образом представить в виде  $\tilde{q}(u, w) = (u, F_q w)$ , где скобки в правой части означают евклидово скалярное произведение на  $V$ , а через  $F_q : V \rightarrow V$  обозначен линейный оператор, отвечающий симметричной билинейной форме  $\tilde{q}$  при изоморфизме между формами и операторами<sup>1</sup>, который задаётся евклидовым скалярным произведением. В любом евклидово ортонормальном базисе пространства  $V$  матрица оператора  $F_q$  совпадает с матрицей Грама формы  $\tilde{q}$  в этом базисе. В частности, она симметрична, а значит, оператор  $F_q$  евклидово самосопряжён. Согласно теор. 15.7 на стр. 188 в пространстве  $V$  найдётся евклидово ортонормальный базис, в котором матрица оператора  $F_q$  диагональна и имеет на диагонали в точности все собственные числа оператора  $F_q$  учётом их кратностей. Мы получаем следующие полезные результаты.

ТЕОРЕМА 15.7 (ТЕОРЕМА О НОРМАЛЬНОМ БАЗИСЕ)

Для любой квадратичной формы  $q$  на евклидовом пространстве  $V$  существует евклидово ортонормальный базис, в котором матрица Грама формы  $q$  диагональна. Диагональные элементы такой матрицы с точностью до перестановки не зависят от выбора указанного базиса и равны собственным числам того единственного линейного оператора  $f : V \rightarrow V$ , для которого

$$q(v) = (v, f v) \quad \text{при всех } v \in V.$$

Если все  $\dim V$  собственных чисел различны, то ортонормальный базис, в котором матрица Грама формы  $q$  диагональна, единственен с точностью до перестановки базисных векторов и замены их направлений на противоположные.  $\square$

Следствие 15.8

Два однородных многочлена второй степени  $f, g \in \mathbb{R}[x_1, x_2, \dots, x_n]$  тогда и только тогда переводятся друг в друга ортогональными<sup>2</sup> заменами переменных, когда их матрицы Грама в ортонормальном базисе имеют одинаковые наборы собственных чисел (с учётом кратностей).  $\square$

<sup>1</sup>См. п.° 14.2.4 на стр. 174.

<sup>2</sup>Т. е. сохраняющими стандартное евклидово скалярное произведение на  $\mathbb{R}^n$

**15.5.2. Вычисление сигнатуры** квадратичной формы на  $\mathbb{R}^n$  можно осуществить несколькими способами.

Пример 15.2 (использование евклидовой структуры)

Согласно теор. 15.7 и предваряющему её рассуждению, положительный и отрицательный индексы инерции квадратичной формы на  $\mathbb{R}^n$  равны количествам положительных и отрицательных собственных чисел (с учётом кратностей) матрицы Грама этой формы в любом ортонормальном для стандартной евклидовой структуры базисе пространства  $\mathbb{R}^n$ .

Пример 15.3 (метод Якоби – Сильвестра)

Обозначим через  $V_k \subset \mathbb{R}^n$  линейную оболочку первых  $k$  базисных векторов  $e_1, \dots, e_k$ , а через  $\Delta_k$  их определитель Грама, т. е. рассматриваемый с точностью до умножения на ненулевые положительные числа<sup>1</sup> главный угловой  $k \times k$  минор матрицы Грама формы, сосредоточенный в первых  $k$  строках и столбцах. Если ограничение формы на подпространство  $V_k$  неособо, то  $\Delta_k = (-1)^{m_k}$ , где показатель  $m_k$  равен отрицательному индексу инерции ограничения формы на  $V_k$ . Таким образом, когда все  $\Delta_i \neq 0$ , соседние миноры  $\Delta_k, \Delta_{k+1}$  различаются знаком если и только если отрицательный индекс инерции  $m_{k+1} = m_k + 1$ . Поэтому полный отрицательный индекс инерции  $m = m_n$  в этом случае равен числу перемен знака в последовательности  $1, \Delta_1, \Delta_2, \dots, \Delta_n$ .

Если некоторый  $\Delta_k = 0$ , но при этом  $\Delta_{k-1}$  и  $\Delta_{k+1}$  оба ненулевые, то ограничения формы на подпространства  $V_{k+1}$  и  $V_{k-1}$ , а также на двумерное ортогональное дополнение  $W$  к подпространству  $V_{k-1}$  внутри  $V_{k+1}$  невырождены, и в  $W$  имеется изотропный вектор, порождающий ядро ограничения формы на подпространство  $V_k$ , где она вырождена. Тем самым,  $W \simeq H_2$  является гиперболической плоскостью с сигнатурой  $(1, 1)$ , и из ортогонального разложения  $V_{k+1} = V_{k-1} \dot{+} W$  вытекает равенство  $(p_{k+1}, m_{k+1}) = (p_{k-1} + 1, m_{k-1} + 1)$ . Обратите внимание, что в этом случае  $\Delta_{k-1}$  и  $\Delta_{k+1}$  имеют противоположные знаки, т. е. при  $\Delta_k = 0$  неравенство  $\Delta_{k-1}\Delta_{k+1} > 0$  невозможно.

Если  $\Delta_k = \Delta_{k+1} = 0$ , но при этом  $\Delta_{k-1}$  и  $\Delta_{k+2}$  оба ненулевые, то  $V_{k+2} = V_{k-1} \dot{+} W$ , где  $W$  — трёхмерное ортогональное дополнение к  $V_{k-1}$  внутри  $V_{k+2}$ . Как и выше, ограничение формы на  $W$  невырождено, и в  $W$  есть изотропный вектор. Поэтому  $W$  имеет сигнатуру  $(2, 1)$  или  $(1, 2)$ , откуда  $(p_{k+2}, m_{k+2}) = (p_{k-1} + 2, m_{k-1} + 1)$ , если  $\Delta_{k-1}\Delta_{k+2} < 0$ , и  $(p_{k+2}, m_{k+2}) = (p_{k-1} + 1, m_{k-1} + 2)$ , если  $\Delta_{k-1}\Delta_{k+2} > 0$ .

Итак, когда в последовательности  $1, \Delta_1, \Delta_2, \dots, \Delta_n$  не встречается более двух нулей подряд, прочтение её слева направо позволяет проследить за изменением сигнатуры  $(p_i, m_i)$  ограничения формы на пространства  $V_i$  с ненулевыми  $\Delta_i$  и найти индекс.

Скажем, пусть  $\Delta_1 < 0, \Delta_2 = 0, \Delta_3 > 0, \Delta_4 = 0, \Delta_5 = 0, \Delta_6 < 0$ . Тогда

$$(p_1, m_1) = (0, 1), \quad (p_3, m_3) = (2, 1), \quad (p_6, m_6) = (3, 3).$$

Примером такой формы является форма с матрицей Грама

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

<sup>1</sup>Т. е. на ненулевые квадраты поля  $\mathbb{R}$ .

## ПРИМЕР 15.4 (МЕТОД ГАУССА)

Над любым полем  $\mathbb{K}$  перейти от произвольного базиса  $e_1, \dots, e_n$  к ортогональному базису заданной симметричной билинейной формы  $\tilde{q}$  можно при помощи гауссовых элементарных преобразований базисных векторов<sup>1</sup>: перестановок каких-нибудь двух векторов  $e_i, e_j$  местами и замен одного из базисных векторов  $e_i$  на вектор  $e'_i = e_i + \lambda e_j$ , где  $j \neq i$ , а  $\lambda \in \mathbb{K}$  произвольно, или на вектор  $e'_i = \lambda e_i$ , где  $\lambda \in \mathbb{K}^*$  отлично от нуля. При перестановке местами векторов  $e_i, e_j$  в матрице Грама формы  $\tilde{q}$  одновременно переставляются друг с другом  $i$ -я и  $j$ -я строки, а также  $i$ -й и  $j$ -й столбцы. Обратите внимание, что диагональные элементы  $\tilde{q}(e_i, e_i)$  и  $\tilde{q}(e_j, e_j)$  при этом переставятся друг с другом, а элементы  $\tilde{q}(e_i, e_j) = \tilde{q}(e_j, e_i)$  останутся без изменения. Например, перестановка первого и третьего базисного вектора действует на симметричную  $3 \times 3$  матрицу так:

$$\begin{pmatrix} a & b & c \\ b & d & e \\ c & e & f \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} f & e & c \\ e & d & b \\ c & b & a \end{pmatrix}.$$

При замене вектора  $e_i$  вектором  $\lambda e_i$   $i$ -я строка и  $i$ -й столбец матрицы Грама одновременно умножаются на  $\lambda$ . Обратите внимание, что диагональный элемент  $\tilde{q}(e_i, e_i)$  при этом умножится на  $\lambda^2$ . Например, замена  $e_2$  на  $2e_2$  подействует на предыдущую матрицу так:

$$\begin{pmatrix} a & b & c \\ b & d & e \\ c & e & f \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} a & 2b & c \\ 2b & 4d & 2e \\ c & 2e & f \end{pmatrix}.$$

Наконец, замена  $e_i$  на  $e'_i = e_i + \lambda e_j$  преобразует стоящие в  $i$ -й строке и  $i$ -м столбце недиагональные элементы  $q_{ik} = \tilde{q}(e_i, e_k)$  и  $q_{ki} = \tilde{q}(e_k, e_i)$  с  $k \neq i$  в элементы  $q'_{ik} = q_{ik} + \lambda q_{jk}$  и  $q'_{ki} = q_{ki} + \lambda q_{kj}$  соответственно, а диагональный элемент  $q_{ii} = \tilde{q}(e_i, e_i)$  — в

$$q'_{ii} = q_{ii} + \lambda q_{ij} + \lambda q_{ji} + \lambda^2 q_{jj}.$$

Иными словами, в матрице Грама к  $i$ -й строке прибавится  $j$ -я, умноженная на  $\lambda$ , и одновременно к  $i$ -у столбцу прибавится  $j$ -й, умноженный на  $\lambda$ , после чего к диагональному элементу в позиции<sup>2</sup>  $(i, i)$  добавится ещё диагональный элемент из позиции  $(j, j)$ , умноженный на  $\lambda^2$ . Например, замена  $e_3$  на  $e_3 + 3e_2$  подействует на предыдущую матрицу так:

$$\begin{pmatrix} a & b & c \\ b & d & e \\ c & e & f \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} a & b & c + 3b \\ b & d & e + 3d \\ c + 3b & e + 3d & f + 6e + 9d \end{pmatrix}.$$

Метод Гаусса заключается в том, чтобы при помощи описанных трёх типов преобразований матрицы Грама превратить заданную симметричную матрицу в диагональную. Для вещественной формы количества положительных и отрицательных чисел на диагонали итоговой матрицы — это в точности положительный и отрицательный индексы инерции.

Для иллюстрации вычислим методом Гаусса сигнатуру вещественной квадратичной формы с матрицей Грама

$$\begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 & -3 \\ 2 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -2 \\ -3 & 0 & -2 & 0 \end{pmatrix}.$$

<sup>1</sup>См. п.° 6.1 на стр. 75.

<sup>2</sup>Обратите внимание, что в текущий момент этот элемент уже увеличился на  $\lambda q_{ij} + \lambda q_{ji} = 2\lambda q_{ij}$ .

Сначала обнулیم 1-ю строку и 1-й столбец вне диагонали, добавляя к векторам  $e_2, e_4$  соответственно векторы  $2e_1$  и  $-3e_1$ :

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & -1 & -6 \\ 0 & -1 & 0 & -2 \\ 0 & -6 & -2 & 9 \end{pmatrix}.$$

Теперь обнулیم вне диагонали 2-ю строку и 2-й столбец, добавляя к текущим векторам  $e_3, e_4$  соответственно текущие векторы  $e_1/6$  и  $e_1$ :

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{6} & -3 \\ 0 & 0 & -3 & 3 \end{pmatrix}.$$

Наконец, обнулیم вне диагонали 3-ю строку и 3-й столбец, добавляя к текущему вектору  $e_4$  текущий вектор  $-18e_3$ :

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{6} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 57 \end{pmatrix}.$$

Таким образом, форма имеет сигнатуру  $(2, 2)$ .

**15.6. Самосопряжённые операторы.** Пусть на векторном пространстве  $V$  над произвольным полем  $\mathbb{K}$  задана невырожденная симметричная билинейная форма

$$(*, *) : V \times V \rightarrow \mathbb{K}, \quad u, w \mapsto (u, w). \quad (15-8)$$

Как и в евклидовом пространстве<sup>1</sup>, будем называть линейный оператор  $f : V \rightarrow V$  *самосопряжённым* относительно скалярного произведения (15-8), если  $(fu, w) = (u, fw)$  при всех  $u, w \in V$ . Самосопряжённость оператора  $f$  равносильна тому, что при биекции между формами и операторами, которая задаётся скалярным произведением<sup>2</sup> (15-8), отвечающая оператору  $f$  билинейная форма  $\beta_f(u, w) = (u, fw)$  является симметричной.

Упражнение 15.6. Убедитесь в этом.

На матричном языке самосопряжённость оператора  $f$  означает, что его матрица  $F$  в любом базисе пространства  $V$  связана с матрицей Грама  $G$  скалярного произведения (15-8) в том же базисе соотношением  $F^t G = GF$ . Дословно теми же рассуждениями, что и для евклидовых пространств<sup>3</sup> устанавливаются два ключевых свойства самосопряжённых операторов:

Упражнение 15.7. Пусть линейный оператор  $f : V \rightarrow V$  самосопряжён. Покажите, что

- а) для любого  $f$ -инвариантного подпространства  $U \subset V$  ортогонал  $U^\perp$  тоже  $f$ -инвариантен
- б) собственные векторы оператора  $f$  с разными собственными значениями ортогональны.

<sup>1</sup>Ср. с н° 12.3 на стр. 149.

<sup>2</sup>См. н° 14.2.4 на стр. 174.

<sup>3</sup>См. лем. 12.2 и лем. 12.3 на стр. 150.

## Предложение 15.5

Если характеристический многочлен самосопряжённого линейного оператора  $f : V \rightarrow V$  полностью раскладывается в поле  $\mathbb{k}$  на линейные множители и все ненулевые собственные векторы оператора  $f$  анизотропны, то в пространстве  $V$  имеется ортогональный базис из собственных векторов оператора  $f$ .

Доказательство. Индукция по  $\dim V$ . Если оператор  $f$  является умножением на скаляр (что имеет место при  $\dim V = 1$ ), то подойдёт любой ортогональный базис пространства  $V$ . Допустим, что  $\dim V > 1$  и оператор  $f$  не скалярен. Поскольку характеристический многочлен  $\det(tE - F)$  имеет корни в поле  $\mathbb{k}$ , у оператора  $F$  есть ненулевое собственное подпространство

$$V_\lambda = \{v \in V \mid fv = \lambda v\} \subsetneq V.$$

По условию леммы, оно анизотропно, и значит, скалярное произведение ограничивается на него невырождено. Поэтому  $V = V_\lambda \oplus V_\lambda^\perp$ , и ограничение скалярного произведения на  $V_\lambda^\perp$  тоже невырождено. По [упр. 15.7](#) оператор  $f$  переводит подпространство  $V_\lambda^\perp$  в себя. Тем самым, характеристический многочлен оператора  $f$  является произведением характеристических многочленов ограничений  $f|_{V_\lambda}$  и  $f|_{V_\lambda^\perp}$ . В силу единственности разложения на множители в кольце  $\mathbb{k}[t]$  и предположения леммы, каждый из этих двух характеристических многочленов полностью раскладывается на линейные множители в поле  $\mathbb{k}$ . По индуктивному предположению, в подпространстве  $V_\lambda^\perp$  есть ортогональный базис из собственных векторов оператора  $f$ . Добавляя к нему любой ортогональный базис собственного пространства  $V_\lambda$ , получаем нужный базис в  $V$ .  $\square$



## §16. Кососимметричные билинейные и грасмановы квадратичные формы

**16.1. Симплектические пространства.** Согласно теореме Дарбу<sup>1</sup>, каждое векторное пространство с невырожденной кососимметричной формой изометрически изоморфно координатному пространству  $\mathbb{k}^{2n}$ , на котором форма имеет в стандартном базисе матрицу Грама

$$J = \begin{pmatrix} 0 & E \\ -E & 0 \end{pmatrix},$$

как в [прим. 14.3](#) на стр. 171. Мы будем называть такие пространства *симплектическими* и обозначать  $\Omega_{2n}$  по аналогии с гиперболическими пространствами  $H_{2n}$ .

УПРАЖНЕНИЕ 16.1. Убедитесь, что прямая ортогональная сумма  $\Omega_{2m} \dot{+} \Omega_{2k}$  изометрически изоморфна  $\Omega_{2(m+k)}$ .

Прямым аналогом [предл. 15.1](#) на стр. 179 является следующий факт.

Предложение 16.1

Каждое изотропное подпространство  $U$  невырожденной кососимметричной формы  $\omega$  на пространстве  $V$  содержится в некотором симплектическом подпространстве  $W \subset V$  размерности  $\dim W = 2 \dim U$ , и любой базис в  $U$  дополняется<sup>2</sup> до симплектического базиса в  $W$ .

Доказательство. Выберем в  $U$  базис  $u_1, u_2, \dots, u_m$ , дополним его до базиса в  $V$  и рассмотрим двойственный к нему относительно  $\omega$  базис. Первые  $m$  векторов  $u_1^\vee, u_2^\vee, \dots, u_m^\vee$  этого двойственного базиса удовлетворяют равенствам

$$\omega(u_i, u_j^\vee) = \begin{cases} 1 & \text{при } i = j \\ 0 & \text{при } i \neq j, \end{cases} \quad (16-1)$$

которые не нарушаются при добавлении к любому из векторов  $u_j^\vee$  любой линейной комбинации векторов  $u_i$ . Заменяя каждый вектор  $u_j^\vee$  вектором

$$w_j = u_j^\vee - \sum_{v < j} \omega(u_j^\vee, u_v^\vee) \cdot u_v, \quad (16-2)$$

получаем набор векторов  $w_1, w_2, \dots, w_m$ , также удовлетворяющий равенствам (16-1), но порождающий изотропное подпространство, поскольку для всех  $i < j$

$$\omega(w_i, w_j) = \omega(u_i^\vee, u_j^\vee) - \omega(u_j^\vee, u_i^\vee) \cdot \omega(u_i^\vee, u_i) = 0.$$

Таким образом, векторы  $u_i$  и  $w_j$  с  $1 \leq i, j \leq m$  составляют симплектический базис в своей линейной оболочке, которую мы и возьмём в качестве  $W$ .  $\square$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 16.1 (ЛАГРАНЖЕВЫ ПОДПРОСТРАНСТВА)

Изотропные подпространства максимальной возможной размерности  $n$  в симплектическом пространстве  $\Omega_{2n}$  называются *лагранжевыми подпространствами*.

<sup>1</sup>См. [теор. 14.3](#) на стр. 178.

<sup>2</sup>Многими способами.

Следствие 16.1

Каждое изотропное подпространство  $U \subset \Omega_{2n}$  содержится в некотором лагранжевом подпространстве  $L \subset \Omega_{2n}$ .

Доказательство. Пусть  $\dim U = k$ . Тогда  $U$  содержится в некотором симплектическом подпространстве  $\Omega_{2k} \subset \Omega_{2n}$ . Поскольку ограничение симплектической формы  $\omega$  с  $\Omega_{2n}$  на  $\Omega_{2k}$  невырождено,  $\Omega_{2n} = \Omega_{2k} \oplus \Omega_{2k}^\perp$  и ограничение формы  $\omega$  на  $\Omega_{2k}^\perp$  тоже невырождено, т. е. ортогонал  $\Omega_{2k}^\perp$  изометрически изоморфен симплектическому подпространству  $\Omega_{2(n-k)}$ , которое в свою очередь является прямой суммой двух  $2(n-k)$ -мерных изотропных подпространств. Прямая сумма любого из них с подпространством  $U$  является лагранжевым подпространством, содержащим  $U$ .  $\square$

ТЕОРЕМА 16.1

Для каждого лагранжева подпространства  $L \subset V$  найдётся такое лагранжево подпространство  $L' \subset V$ , что  $V = L \oplus L'$ . При этом каждый базис  $e$  подпространства  $L$  однозначно достраивается некоторым базисом  $e'$  подпространства  $L'$  до симплектического базиса пространства  $V$ . При фиксированном  $L'$  все дополнительные к  $L$  лагранжевы подпространства  $L''$  биективно соответствуют линейным операторам  $f : L' \rightarrow L$ , удовлетворяющим равенству<sup>1</sup>

$$\omega(u_1, f u_2) = -\omega(f u_1, u_2) \text{ для всех } u_1, u_2 \in L'.$$

Доказательство. Согласно предл. 16.1 базис  $e$  подпространства  $L$  достраивается до симплектического базиса в некотором содержащем  $L$  симплектическом подпространстве  $W \subset V$  размерности  $\dim W = 2 \dim L = \dim V$ . Поэтому  $W = V$  и в качестве  $L'$  можно взять линейную оболочку последних  $n = \dim L$  векторов получающегося таким образом симплектического базиса в  $V$ . Индуцированное правой корреляцией  $\omega^\wedge : V \rightarrow V^*$  отображение

$$\omega_L^\wedge : L' \rightarrow L^*, v \mapsto \omega(*, v)|_L, \quad (16-3)$$

переводящее вектор  $v \in L'$  в линейную форму  $u \mapsto \omega(u, v)$  на подпространстве  $L \subset V$ , является изоморфизмом векторных пространств, поскольку переводит любой базис  $e'$  подпространства  $L'$ , дополняющий базис  $e$  в  $L$  до симплектического базиса в  $V$ , в двойственный к  $e$  базис  $e^*$  пространства  $L^*$ .

УПРАЖНЕНИЕ 16.2. Убедитесь в этом.

Таким образом, базис  $e'$  в  $L'$  однозначно восстанавливается по  $e$  как прообраз двойственного к  $e$  базиса в  $L^*$  при независимом от выбора базиса изоморфизме (16-3).

Далее, каждое дополнительное к  $L$  подпространство  $L'' \subset V = L' \oplus L$  биективно проектируется на  $L'$  вдоль  $L$ , ибо ядро такой проекции равно  $L'' \cap L$ . Поэтому для любого вектора  $u \in L'$  существует единственный такой вектор  $f(u) \in L$ , что  $u + f(u) \in L''$ . Правило  $u \mapsto f(u)$  задаёт линейное отображение  $f : L' \rightarrow L$ , графиком которого является подпространство  $L'' \subset L' \oplus L$ . Таким образом, мы получаем биекцию между линейными отображениями  $f : L' \rightarrow L$  и подпространствами  $L'' \subset L' \oplus L = V$ , которые изоморфно проектируются на  $L'$  вдоль  $L$ . При этом изотропность такого подпространства  $L'' \subset V$  равносильна антисамосопряжённости задаваемого им оператора  $f : L' \rightarrow L$ , графиком которого является  $L''$ , так как

$$\omega(u_1 + f(u_1), u_2 + f(u_2)) = \omega(u_1, f(u_2)) + \omega(f(u_1), u_2)$$

в силу изотропности подпространств  $L' \ni u_1, u_2$  и  $L \ni f(u_1), f(u_2)$ .  $\square$

<sup>1</sup>Такие операторы называются *антисамосопряжёнными* относительно формы  $\omega$ .

**16.2. Грассмановы квадратичные формы.** Покажем, что каждый ненулевой однородный грассманов многочлен<sup>1</sup> второй степени  $\omega \in \Lambda^2 V$  на конечномерном пространстве  $V$  над любым полем  $\mathbb{k}$  в подходящем базисе  $e$  пространства  $V$  может быть записан в *нормальном виде Дарбу*

$$e_1 \wedge e_2 + e_3 \wedge e_4 + \cdots + e_{2r-1} \wedge e_{2r}. \quad (16-4)$$

Для этого рассмотрим произвольный базис  $u$  и перенумеруем его векторы так, чтобы

$$\omega = u_1 \wedge (\alpha_2 u_2 + \cdots + \alpha_n u_n) + u_2 \wedge (\beta_3 u_3 + \cdots + \beta_n u_n) + (\text{члены без } u_1 \text{ и } u_2),$$

где коэффициент  $\alpha_2 \neq 0$  и вектор  $v_2 \stackrel{\text{def}}{=} \alpha_2 u_2 + \cdots + \alpha_n u_n \neq 0$ . Перейдём к новому базису  $v$  из векторов  $v_i = u_i$  при  $i \neq 2$  и вектора  $v_2$ .

УПРАЖНЕНИЕ 16.3. Убедитесь, что это действительно базис.

Подставляя в предыдущую формулу  $u_2 = (v_2 - \alpha_3 v_3 - \cdots - \alpha_n v_n) / \alpha_2$ , получаем

$$\begin{aligned} \omega &= v_1 \wedge v_2 + v_2 \wedge (\gamma_3 v_3 + \cdots + \gamma_n v_n) + (\text{члены без } v_1 \text{ и } v_2) = \\ &= (v_1 - \gamma_3 v_3 - \cdots - \gamma_n v_n) \wedge v_2 + (\text{члены без } v_1 \text{ и } v_2) \end{aligned}$$

для некоторых  $\gamma_3, \dots, \gamma_n \in \mathbb{k}$ . Переходя к базису  $w$  из векторов  $w_1 = v_1 - \gamma_3 v_3 - \cdots - \gamma_n v_n$  и  $w_i = v_i$  при  $i \neq 1$ , получаем  $\omega = w_1 \wedge w_2 + (\text{члены без } w_1 \text{ и } w_2)$ , после чего процесс может быть продолжен по индукции.

Следствие 16.2

Над полем  $\mathbb{k}$  характеристики  $\text{char } \mathbb{k} \neq 2$  однородный грассманов многочлен  $\omega \in \Lambda^2 V$  тогда и только тогда разложим в произведение  $u \wedge w$  двух векторов  $u, w \in V$ , когда  $\omega \wedge \omega = 0$ .

Доказательство. Если  $\omega = u \wedge w$ , то  $\omega \wedge \omega = u \wedge w \wedge u \wedge w = 0$ . Чтобы получить обратное, выберем в  $V$  базис  $e$ , в котором  $\omega = e_1 \wedge e_2 + e_3 \wedge e_4 + \cdots$ . Если в этой сумме есть хотя бы два слагаемых, то базисный моном  $e_1 \wedge e_2 \wedge e_3 \wedge e_4$  войдёт в  $\omega \wedge \omega$  с ненулевым коэффициентом 2, а значит,  $\omega \wedge \omega \neq 0$ . Таким образом, равенство  $\omega \wedge \omega = 0$  влечёт равенство  $\omega = e_1 \wedge e_2$ .  $\square$

**16.2.1. Поляризация грассмановой квадратичной формы.** Напомню<sup>2</sup>, что с каждым базисом  $e = (e_1, e_2, \dots, e_n)$  пространства  $V$  связан базис в  $\Lambda^2 V$ , состоящий из  $n(n-1)/2$  грассмановых мономов  $e_{ij} = e_i \wedge e_j$  с  $i < j$ , и каждый однородный грассманов многочлен второй степени  $\omega \in \Lambda^2 V$  однозначно представляется в виде

$$\omega = \sum_{i < j} \omega_{ij} e_{ij}, \quad \text{где } \omega_{ij} \in \mathbb{k}, \quad (16-5)$$

и суммирование происходит по всем  $1 \leq i < j \leq n$ . Если  $\text{char } \mathbb{k} \neq 2$ , то подобно тому, как это делалось для коммутативных квадратичных форм<sup>3</sup>, каждое слагаемое в (16-5) можно переписать в виде  $\omega_{ij} e_{ij} = \omega'_{ij} e_i \wedge e_j + \omega'_{ji} e_j \wedge e_i$ , где  $\omega'_{ij} = -\omega'_{ji} = \omega_{ij}/2$ . Составленная из чисел  $\omega'_{ij}$  кососимметричная квадратная матрица  $\Omega_e = (\omega'_{ij}) \in \text{Mat}_n(\mathbb{k})$  называется *матрицей Грама*

<sup>1</sup>См. н° 9.2 на стр. 115.

<sup>2</sup>См. 9-5 на стр. 115.

<sup>3</sup>Ср. с н° 15.3 на стр. 183.

грассмановой квадратичной формы  $\omega$  в базисе  $e$ . В терминах матрицы Грама форма  $\omega$  записывается в виде

$$\omega = \sum_{i,j=1}^n \omega'_{ij} e_i \wedge e_j = (e \Omega_e) \wedge e^t, \quad (16-6)$$

где в отличие от (16-5) суммирование происходит по всем  $n^2$  парам индексов  $i, j$ , а обозначение  $A \wedge B$  для матриц  $A, B$ , элементами которых являются векторы, предписывает перемножить эти матрицы по обычному правилу, используя в качестве произведения матричных элементов грассманово произведение соответствующих векторов, т. е. в  $(i, j)$ -й позиции матрицы  $A \wedge B$  стоит вектор  $a_{i1} \wedge b_{1j} + a_{i2} \wedge b_{2j} + \dots + a_{in} \wedge b_{nj}$ .

При выборе в  $V$  другого базиса  $f$ , через который базис  $e$  выражается по формуле  $e = f C_{fe}$ , матрица Грама  $\Omega_f$  грассмановой квадратичной формы  $\omega$  в базисе  $f$  будет связана с матрицей Грама  $\Omega_e$  соотношением

$$\Omega_e = C_{fe} \Omega_e C_{fe}^t \quad (16-7)$$

поскольку  $\omega = (e \Omega_e) \wedge e^t = (f C_{fe} \Omega_e) \wedge (C_{fe}^t f^t) = (f C_{fe} \Omega_e C_{fe}^t) \wedge f^t$ .

**ПРИМЕР 16.1 (НОРМАЛЬНАЯ ФОРМА ДАРБУ)**

Если  $\text{char } \mathbb{k} \neq 2$ , то существование базиса  $e$ , в котором заданная грассманова квадратичная форма  $\omega \in \Lambda^2 V$  имеет вид (16-4), вытекает из теоремы о приведении кососимметричной билинейной формы к нормальному виду Дарбу<sup>1</sup>. Действительно, доказывая эту теорему, мы установили, что для любой кососимметричной матрицы  $\Omega$  существует такая обратимая матрица  $C$ , что все ненулевые элементы матрицы  $C \Omega C^t$  сосредоточены в расположенных на главной диагонали  $2 \times 2$ -блоках вида  $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ . Поэтому грассманова квадратичная форма, имеющая матрицу Грама  $\Omega$  в некотором базисе  $f$ , запишется в базисе  $g = f C$  как  $\omega = 2g_1 \wedge g_2 + 2g_3 \wedge g_4 + \dots$ . Искомый базис  $e$  получается из  $g$  удвоением векторов с нечётными номерами:  $e_{2i+1} = 2g_{2i+1}$ ,  $e_{2i} = g_{2i}$ .

**16.3. Пфаффиан.** Рассмотрим кососимметричную матрицу  $A = (a_{ij})$  размера  $(2n) \times (2n)$ . Будем считать её элементы  $a_{ij}$  с  $i < j$  независимыми коммутирующими переменными и обозначим через  $\mathbb{Z}[a_{ij}]$  кольцо многочленов с целыми коэффициентами от этих  $2n^2 - n$  переменных. Мы собираемся показать, что существует единственный такой многочлен  $\text{Pf}(A) \in \mathbb{Z}[a_{ij}]$ , что

$$\text{Pf}^2(A) = \det(A) \quad \text{и} \quad \text{Pf}(J') = 1,$$

где  $J'$  — блочно диагональная матрица из  $n$  идущих по главной диагонали  $2 \times 2$ -блоков

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix},$$

как в доказательстве теор. 14.3 на стр. 178. Многочлен  $\text{Pf}(A)$  называется *пфаффианом* кососимметричной матрицы  $A$  и явно выражается через матричные элементы по формуле

$$\text{Pf}(A) = \sum_{\substack{\{i_1, j_1\} \sqcup \dots \sqcup \{i_n, j_n\} \\ = \{1, 2, \dots, 2n\}}} \text{sgn}(i_1 j_1 i_2 j_2 \dots i_n j_n) \cdot a_{i_1 j_1} a_{i_2 j_2} \dots a_{i_n j_n}, \quad (16-8)$$

<sup>1</sup>См. теор. 14.3 на стр. 178.

где суммирование происходит по всем разбиениям множества  $\{1, 2, \dots, 2n\}$  в объединение  $n$  неупорядоченных непересекающихся двухэлементных множеств  $\{i_\nu, j_\nu\}$ , порядок внутри которых тоже не существен, а  $\text{sgn}$  означает знак указанной в его аргументе перестановки из симметрической группы  $S_{2n}$ .

УПРАЖНЕНИЕ 16.4. Убедитесь, что этот знак не меняется при перестановках пар друг с другом, а вся правая часть (16-8) не меняется при перестановке элементов внутри любой из пар. Например,

$$\det \begin{pmatrix} 0 & a_{12} \\ -a_{12} & 0 \end{pmatrix} = a_{12}^2, \quad \det \begin{pmatrix} 0 & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ -a_{12} & 0 & a_{23} & a_{24} \\ -a_{13} & -a_{23} & 0 & a_{34} \\ -a_{14} & -a_{24} & -a_{34} & 0 \end{pmatrix} = (a_{12}a_{23} - a_{13}a_{24} + a_{14}a_{23})^2.$$

Чтобы извлечь квадратный корень из  $\det A$ , интерпретируем  $A$  как матрицу Грама невырожденной кососимметричной формы в стандартном базисе координатного векторного пространства  $K^{2n}$  над полем  $K = \mathbb{Q}(a_{ij})$  рациональных функций от переменных  $a_{ij}$  с коэффициентами в поле  $\mathbb{Q}$ . Доказывая теор. 14.3 на стр. 178, мы видели, что в  $K^{2n}$  есть базис, в котором эта форма имеет матрицу Грама  $J'$ . Поэтому  $A = CJ'C^t$  для некоторой матрицы  $C \in \text{GL}_{2n}(K)$ . Так как  $\det J' = 1$ , определитель  $\det(A) = \det^2(C)$ .

Покажем, что  $\det C$  является многочленом с целыми коэффициентами и вычисляется по формуле (16-8). Для этого рассмотрим ещё одну кососимметричную матрицу  $B = (b_{ij})$ , наддиагональные элементы  $b_{ij}$  которой также будем считать независимыми переменными, и образуем грасманову квадратичную форму

$$\beta_B(\xi) \stackrel{\text{def}}{=} (\xi B) \wedge \xi^t = \sum_{ij} b_{ij} \xi_i \wedge \xi_j$$

от переменных  $\xi = (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_{2n})$  с коэффициентами в кольце  $\mathbb{Z}[b_{ij}]$ . Поскольку чётные мономы  $\xi_i \wedge \xi_j$  лежат в центре грасмановой алгебры,  $n$ -тая грасманова степень

$$\begin{aligned} \beta_B(\xi)^{\wedge n} &= \beta_B(\xi) \wedge \dots \wedge \beta_B(\xi) = \\ &= \left( \sum_{i_1 j_1} b_{i_1 j_1} \xi_{i_1} \wedge \xi_{j_1} \right) \wedge \left( \sum_{i_2 j_2} b_{i_2 j_2} \xi_{i_2} \wedge \xi_{j_2} \right) \wedge \dots \wedge \left( \sum_{i_n j_n} b_{i_n j_n} \xi_{i_n} \wedge \xi_{j_n} \right) = \\ &= 2^n n! \sum_{\substack{\{i_1, j_1\} \sqcup \dots \sqcup \{i_n, j_n\} = \\ = \{1, 2, \dots, 2n\}}} \text{sgn}(i_1 j_1 i_2 j_2 \dots i_n j_n) b_{i_1 j_1} b_{i_2 j_2} \dots b_{i_n j_n} \xi_1 \wedge \xi_2 \wedge \dots \wedge \xi_{2n} = \\ &= 2^n n! \text{Pf}(B) \xi_1 \wedge \xi_2 \wedge \dots \wedge \xi_{2n}, \end{aligned} \quad (16-9)$$

где в суммирование предпоследней строке происходит, как и в формуле (16-8), по всем разбиениям множества  $\{1, 2, \dots, 2n\}$  в объединение  $n$  неупорядоченных непересекающихся двухэлементных множеств  $\{i_\nu, j_\nu\}$ , порядок внутри которых тоже не существен, и  $\text{Pf}(B) \in \mathbb{Z}[b_{ij}]$  означает тот же самый многочлен, что и в формуле (16-8). Заменим в (16-9) грасмановы переменные  $\xi$  на новые грасмановы переменные  $\eta$  по формуле  $\xi = \eta C$ , где  $C \in \text{GL}_{2n}(K)$ . В правой части (16-9) получим  $2^n n! \text{Pf}(B) \det C \eta_1 \wedge \eta_2 \wedge \dots \wedge \eta_{2n}$ . Квадратичная форма  $\beta_B(\xi)$  в самой левой части (16-9) превратится в

$$\beta_B(\xi) = (\xi B) \wedge \xi^t = (\eta C B) \wedge (\eta C)^t = (\eta C B C^t) \wedge \eta^t = \beta_{C B C^t}(\eta),$$

а её  $n$ -тая грассманова степень — в  $\beta_{CBC^t}(\eta)^{\wedge n} = 2^n n! \text{Pf}(CBC^t) \eta_1 \wedge \eta_2 \wedge \cdots \wedge \eta_{2n}$ . Таким образом, для любой матрицы  $C \in \text{GL}_{2n}(K)$  в кольце многочленов  $K[b_{ij}]$  от переменных  $b_{ij}$  с коэффициентами в поле  $K$  выполняется равенство

$$\text{Pf}(CBC^t) = \text{Pf}(B) \det C. \quad (16-10)$$

Полагая в этом равенстве  $B = J'$  и беря в качестве  $C$  такую матрицу, что  $CJ'C^t = A$ , получаем в поле  $K = \mathbb{Q}(a_{ij})$  равенство  $\text{Pf}(A) = \det C$ .

УПРАЖНЕНИЕ 16.5. Убедитесь, что  $\text{Pf}(J') = 1$ .

Это доказывает существование пфаффиана и формулу (16-8). Единственность пфаффиана вытекает из того, что многочлен

$$x^2 - \det A = (x - \text{Pf}(A))(x + \text{Pf}(A)) \in \mathbb{Z}[a_{ij}][x]$$

имеет в целостном кольце  $\mathbb{Z}[a_{ij}]$  ровно два корня  $x = \pm \text{Pf}(A)$ , и требование  $\text{Pf}(J') = 1$  однозначно фиксирует нужный знак.

**16.4. Симплектическая группа.** Изометрии  $f : \Omega_{2n} \xrightarrow{\simeq} \Omega_{2n}$  называются *симплектическими преобразованиями* и образуют группу  $\text{Sp}(\Omega_{2n})$ , называемую *симплектической группой* пространства  $\Omega_{2n}$ . Сопоставление оператору его матрицы в симплектическом базисе изоморфно отображает группу  $\text{Sp}(\Omega_{2n})$  на группу *симплектических матриц*

$$\text{Sp}_{2n}(\mathbb{k}) \stackrel{\text{def}}{=} \{F \in \text{Mat}_{2n}(\mathbb{k}) \mid F^t J F = J\}, \quad \text{где } J = \begin{pmatrix} 0 & E \\ -E & 0 \end{pmatrix}.$$

УПРАЖНЕНИЕ 16.6. Убедитесь, что  $J^2 = -E$  и  $\det J = 1$ .

Если записать симплектическую матрицу  $F$  в блочном виде

$$F = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}, \quad \text{где } A, B, C, D \in \text{Mat}_n(\mathbb{k}),$$

то условие  $F^t J F = J$  примет вид

$$\begin{pmatrix} A^t & C^t \\ B^t & D^t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & E \\ -E & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & E \\ -E & 0 \end{pmatrix},$$

и будет равносильно выполнению соотношений  $C^t A = A^t C$ ,  $D^t B = B^t D$ ,  $E + C^t B = A^t D$ .

УПРАЖНЕНИЕ 16.7. Убедитесь в этом.

Из этих соотношений вытекает, что полная линейная группа  $\text{GL}_n(\mathbb{k})$  гомоморфно вкладывается в симплектическую группу  $\text{Sp}_{2n}(\mathbb{k})$  по правилу

$$G \mapsto \begin{pmatrix} G & 0 \\ 0 & G^{t-1} \end{pmatrix}. \quad (16-11)$$

На бескоординатном языке вложение (16-11) описывается в духе теор. 16.1 на стр. 194. Разложим симплектическое пространство в прямую сумму  $\Omega_{2n} = L \oplus L'$  лагранжевых подпространств  $L, L'$ . В доказательстве теор. 16.1 мы видели, что сопоставление вектору  $w \in L'$  линейного функционала  $\omega_L^\wedge(w) : L \rightarrow \mathbb{k}, u \mapsto \omega(u, w)$ , устанавливает изоморфизм пространства  $L'$  с двойственным к  $L$  пространством  $L^*$ . Прямая сумма этого изоморфизма с тождественным изоморфизмом

$\text{Id}_L : L \simeq L$  даёт изоморфизм  $\Omega_{2n} = L \oplus L' \simeq L \oplus L^*$ , который переводит симплектическую форму  $\omega$  на  $\Omega_{2n}$  в невырожденную кососимметричную форму  $\omega_L$  на  $L \oplus L^*$ , действующую на векторы  $(u, \xi)$  и  $(w, \eta)$  из  $L \oplus L^*$  по правилу

$$\omega_L((u, \xi), (w, \eta)) = \eta(u) - \xi(w). \quad (16-12)$$

УПРАЖНЕНИЕ 16.8. Убедитесь в этом.

Вложение  $\text{GL}(L) \hookrightarrow \text{Sp}(\omega_L)$  переводит обратимый оператор  $g : L \simeq L$  в оператор

$$g \oplus (g^{-1})^* : L \oplus L^* \simeq L \oplus L^*, \quad (v, \xi) \mapsto (gv, (g^{-1})^*\xi), \quad (16-13)$$

где  $(g^{-1})^* : L^* \rightarrow L^*$  — оператор, двойственный к обратному к  $g$  оператору  $g^{-1} : L \rightarrow L$ . Так как оператор (16-13) сохраняет симплектическую форму (16-12):

$$\begin{aligned} \omega_L((gu, (g^{-1})^*\xi), (gw, (g^{-1})^*\eta)) &= (g^{-1})^*\eta(gu) - (g^{-1})^*\xi(gw) = \\ &= \eta(g^{-1}gu) - \xi(g^{-1}gw) = \eta(u) - \xi(w) = \omega_L((u, \xi), (w, \eta)), \end{aligned}$$

он действительно задаёт инъективный гомоморфизм групп  $\text{GL}(L) \hookrightarrow \text{Sp}(L \oplus L^*)$ . Матричная формула (16-11) получается если записать операторы  $g$  и  $(g^{-1})^*$  в двойственных базисах  $e$  и  $e^*$  пространств  $L$  и  $L^*$ .

УПРАЖНЕНИЕ 16.9. Убедитесь что базис  $(e_1, 0), \dots, (e_n, 0), (0, e_1^*), \dots, (0, e_n^*)$ , где  $e_i$  и  $e_i^*$  пробегают двойственные друг другу базисы в  $L$  и  $L^*$ , является симплектическим для формы (16-12) на  $L \oplus L^*$ .

Предложение 16.2

Каждая симплектическая матрица  $F \in \text{Sp}_{2n}(\mathbb{k})$  имеет единичный определитель  $\det F = 1$  и возвратный<sup>1</sup> характеристический многочлен  $\chi_F(t) = t^{2n}\chi_F(t^{-1})$ .

Доказательство. Из равенства  $F^t J F = J$  и форм. (16-10) на стр. 198 вытекает, что

$$\text{Pf}(J) = \text{Pf}(F^t J F) = \det(F) \text{Pf}(J),$$

откуда  $\det F = 1$ , так как  $\text{Pf}(J) \neq 0$ . Кроме того, из равенства  $F^t J F = J$  вытекает, что обратная к  $F$  матрица  $F^{-1} = J^{-1} F^t J = -J F^t J$ , откуда характеристический многочлен

$$\begin{aligned} \chi_F(t) = \det(tE - F) &= t^{2n} \det(F) \det(F^{-1} - t^{-1}E) = t^{2n} \det(t^{-1}J^2 - J F^t J) = \\ &= t^{2n} \det^2(J) \det(t^{-1}E - F^t) = t^{2n} \det(t^{-1}E - F) = t^{2n} \chi_F(t^{-1}), \end{aligned}$$

что и требовалось. □

Предложение 16.3

Симплектическая группа  $\text{Sp}(\Omega_{2n})$  транзитивно действует на изотропных и на симплектических подпространствах любой фиксированной размерности.

<sup>1</sup>Напомню, что многочлен  $a_0 x^m + a_1 x^{m-1} + \dots + a_{m-1} x + a_m$  называется *возвратным*, если последовательность его коэффициентов симметрична относительно своей середины:  $a_k = a_{m-k}$  при всех  $k = 0, 1, \dots, m$ .

Доказательство. По сл. 16.1 на стр. 194 каждое изотропное подпространство  $U_1 \subset \Omega_{2n}$  содержится в некотором лагранжевом подпространстве  $L_1$ , и  $\Omega_{2n} = L_1 \oplus L'_1$  для некоторого дополнительного к  $L_1$  лагранжева подпространства  $L'_1$  согласно теор. 16.1 на стр. 194. Каждый базис  $\mathbf{u}_1$  в  $U_1$  включается в некоторый базис подпространства  $L_1$  и достраивается до симплектического базиса в  $L_1 \oplus L'_1 = \Omega_{2n}$ . С любым другим изотропным подпространством  $U_2 \subset \Omega_{2n}$  той же размерности, что и  $U_1$ , и базисом  $\mathbf{u}_2$  в  $U_2$  можно точно также связать лагранжевы подпространства  $L_2, L'_2$  с  $L_2 \oplus L'_2 = \Omega_{2n}$  и симплектический базис в  $\Omega_{2n}$ , достраивающий какой-нибудь содержащий  $\mathbf{u}_2$  базис в  $L_2$ . Изометрический изоморфизм  $\Omega_{2n} \simeq \Omega_{2n}$ , переводящий первый построенный нами симплектический базис во второй, переводит  $U_1$  в  $U_2$ . Транзитивность действия на симплектических подпространствах доказывается ещё проще: пусть подпространства  $W_1, W_2 \subset \Omega_{2n}$  изометрически изоморфны  $\Omega_{2k}$ . Тогда их ортогоналы  $W_1^\perp, W_2^\perp \subset \Omega_{2n}$  изометрически изоморфны  $\Omega_{2(n-k)}$ . Композиция изометрических изоморфизмов

$$W_1 \oplus W_1^\perp \simeq \Omega_{2k} \dot{+} \Omega_{2(n-k)} \simeq W_2 \oplus W_2^\perp$$

является изометрическим изоморфизмом  $\Omega_{2n} \simeq \Omega_{2n}$ , переводящим  $W_1$  в  $W_2$ . □



## §17. Проективная геометрия

**17.1. Проективные пространства.** С каждым  $(n + 1)$ -мерным векторным пространством  $V$  над произвольным полем  $\mathbb{k}$  помимо  $(n + 1)$ -мерного аффинного пространства  $\mathbb{A}^{n+1} = \mathbb{A}(V)$  связано  $n$ -мерное проективное пространство  $\mathbb{P}_n = \mathbb{P}(V)$ , точками которого по определению являются одномерные векторные подпространства в  $V$  или, что то же самое, проходящие через начало координат аффинные прямые в  $\mathbb{A}(V)$ . Чтобы наблюдать их как «обычные точки», внутрь  $\mathbb{A}(V)$  следует поместить экран — не содержащую начала координат аффинную гиперплоскость. Каждая такая гиперплоскость однозначно задаётся неоднородным линейным уравнением  $\xi(x) = 1$ , где  $\xi \in V^*$  — ненулевая линейная форма на  $V$ , и называется аффинной картой  $U_\xi$  на  $\mathbb{P}(V)$  (см. рис. 17◊1).

УПРАЖНЕНИЕ 17.1. Убедитесь, что сопоставление

$$\xi \mapsto U_\xi$$

задаёт биекцию между ненулевыми ковекторами  $\xi \in V^*$  и не проходящими через начало координат аффинными гиперплоскостями в  $\mathbb{A}(V)$ .

В карте  $U_\xi$  видны все одномерные подпространства, порождённые векторами  $v \in V$  с  $\xi(v) \neq 0$ . Дополнение  $\mathbb{P}_n \setminus U_\xi$  состоит из одномерных подпространств, лежащих в параллельном экрану  $U_\xi$  векторном подпространстве  $\text{Ann } \xi \subset V$  размерности  $n$ . Таким образом, невидимые в карте  $U_\xi$  точки  $n$ -мерного проективного пространства  $\mathbb{P}_n = \mathbb{P}(V)$  образуют  $(n - 1)$ -мерное проективное пространство  $\mathbb{P}_{n-1} = \mathbb{P}(\text{Ann } \xi)$ . Оно называется бесконечно удалённой гиперплоскостью карты  $U_\xi$ . Точки  $\mathbb{P}(\text{Ann } \xi)$  можно воспринимать как направления в аффинной карте  $U_\xi$ .

Из сказанного вытекает, что  $n$ -мерное проективное пространство  $\mathbb{P}_n$  разбивается в дизъюнктное объединение аффинных пространств всех размерностей от 0 до  $n$ :

$$\mathbb{P}_n = U_\xi \sqcup \mathbb{P}(\text{Ann } \xi) = \mathbb{A}^n \sqcup \mathbb{P}_{n-1} = \mathbb{A}^n \sqcup \mathbb{A}^{n-1} \sqcup \mathbb{P}_{n-2} = \dots = \mathbb{A}^n \sqcup \mathbb{A}^{n-1} \sqcup \dots \sqcup \mathbb{A}^0,$$

где  $\mathbb{A}^0 = \mathbb{P}_0$  это одна точка.

УПРАЖНЕНИЕ 17.2. Какое соотношение на  $q$  получится, если независимо подсчитать количества точек в левой и правой части этого равенства над конечным полем из  $q$  элементов?

**17.1.1. Глобальные однородные координаты.** Зафиксируем в  $V$  координаты  $x_0, x_1, \dots, x_n$  относительно какого-нибудь базиса  $e_0, e_1, \dots, e_n$ . Два ненулевых вектора

$$v = (x_0, x_1, \dots, x_n) \quad \text{и} \quad w = (y_0, y_1, \dots, y_n)$$

задают одну и ту же точку  $p \in \mathbb{P}_n$  если и только если их координаты пропорциональны. Последнее равносильно равенству отношений<sup>1</sup>  $x_\mu : x_\nu = y_\mu : y_\nu$  для всех  $0 \leq \mu \neq \nu \leq n$ .

<sup>1</sup>При этом равенства вида  $0 : x = 0 : y$  и  $x : 0 = y : 0$ , в которых  $x$  и  $y$  либо одновременно отличны от нуля, либо одновременно нулевые, тоже допускаются и считаются истинными.

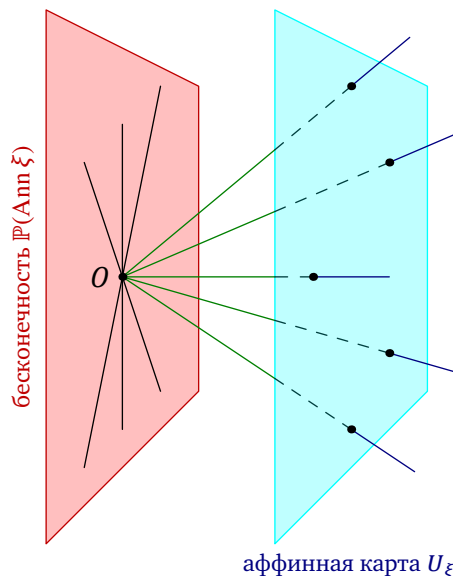


Рис. 17◊1. Проективный мир.

Иначе говоря, с точкой  $p \in \mathbb{P}_n$  взаимно однозначно связаны не координаты ненулевого вектора, задающего эту точку, а только отношения  $(x_0 : x_1 : \dots : x_n)$  между ними. Эти отношения называются *однородными координатами* точки  $p$  в базисе  $e_0, e_1, \dots, e_n$ .

**17.1.2. Локальные аффинные координаты.** Любой набор ковекторов  $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n \in V^*$ , дополняющий ковектор  $\xi$  до базиса в  $V^*$ , задаёт в аффинной карте  $U_\xi$  аффинную систему координат с началом в точке  $e_0$  и базисными векторами  $e_1, e_2, \dots, e_n$ , где  $e_0, e_1, \dots, e_n$  это двойственный к  $\xi, \xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$  базис пространства  $V$ .

УПРАЖНЕНИЕ 17.3. Убедитесь, что  $e_0 \in U_\xi$ , а  $e_1, e_2, \dots, e_n$  составляют базис в  $\text{Ann } \xi$ .

Каждое наблюдаемое в карте  $U_\xi$  одномерное подпространство, порождённое ненулевым вектором  $v \in V$ , изображается в нём точкой  $v/\xi(v) \in U_\xi$  с аффинными координатами

$$t_i = \xi_i(v/\xi(v)) = \xi_i(v)/\xi(v), \quad \text{где } 1 \leq i \leq n.$$

Обратите внимание, что локальные аффинные координаты точки  $v \in \mathbb{P}(V)$  являются не линейными, а дробно линейными функциями от глобальных однородных координат этой точки.

ПРИМЕР 17.1 (ПРОЕКТИВНАЯ ПРЯМАЯ)

Проективная прямая  $\mathbb{P}_1 = \mathbb{P}_1(\mathbb{k}) = \mathbb{P}(\mathbb{k}^2)$  целиком покрывается двумя аффинными картами  $U_0 = U_{x_0}$  и  $U_1 = U_{x_1}$ , которые представляют собою прямые  $x_0 = 1$  и  $x_1 = 1$  в аффинном пространстве  $\mathbb{k}^2$ , см. рис. 17◊2.

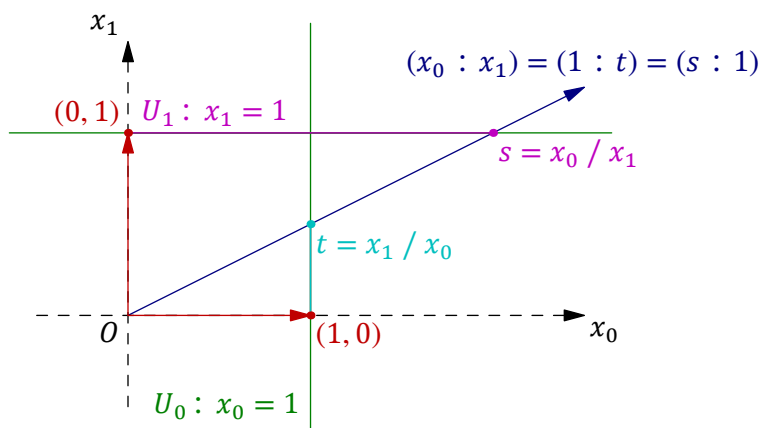


Рис. 17◊2. Стандартные карты на  $\mathbb{P}_1$ .

В карте  $U_0$  видны все одномерные подпространства в  $\mathbb{k}^2$  кроме вертикальной координатной оси  $(0 : 1)$ , которая является единственной бесконечно удалённой точкой этой карты. В качестве локальной аффинной координаты на  $U_0$  годится функция  $t = x_1 / x_0$ . В карте  $U_1$  видны все точки  $(x_0 : x_1) = \left(\frac{x_0}{x_1} : 1\right)$ , у которых  $x_1 \neq 0$ , и в качестве локальной аффинной координаты в этой карте можно взять функцию  $t = x_0 / x_1$ . Единственной бесконечно удалённой точкой для карты  $U_1$  является горизонтальная координатная ось  $(1 : 0)$ . Координаты  $s$  и  $t$  одной и той же точки  $(x_0 : x_1) \in \mathbb{P}_1$ , видимой сразу в обеих картах, связаны соотношением  $t = 1/s$ .

УПРАЖНЕНИЕ 17.4. Убедитесь в этом.

Таким образом, проективная прямая  $\mathbb{P}_1(\mathbb{k})$  является результатом склейки двух аффинных прямых  $\mathbb{A}^1 = \mathbb{k}$  с координатами  $s$  и  $t$  вдоль дополнения до начал координат по правилу: точка с координатой  $s$  на первой прямой отождествляется с точкой с координатой  $t = 1/s$  на второй.

Если основное поле  $\mathbb{k} = \mathbb{R}$ , результат такой склейки можно представлять себе как окружность диаметра 1, склеенную из двух диаметрально противоположных касательных прямых, каждая из которых проектируется на окружность из точки, диаметрально противоположной к точке своего касания, см. рис. 17◊3.

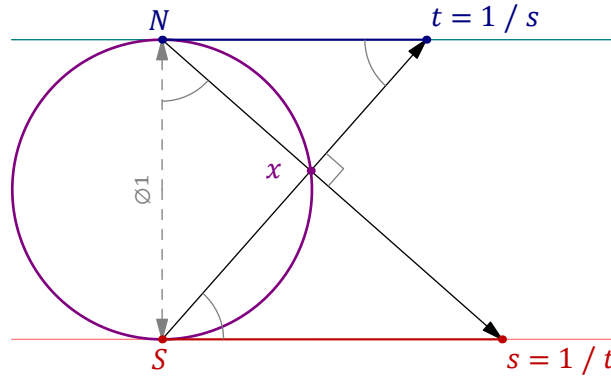


Рис. 17◊3.  $\mathbb{P}_1(\mathbb{R}) \simeq S^1$ .

Из подобия прямоугольных треугольников  $NSs$  и  $tNS$  на рис. 17◊3 вытекает, что точка с координатой  $s$  на верхней касательной и точка с координатой  $t$  на нижней проектируются в одну и ту же точку  $x$  окружности если и только если  $t = 1/s$ . Получаемое таким образом отождествление «пополненной числовой прямой»  $\mathbb{P}_1(\mathbb{R}) = \mathbb{R} \sqcup \infty$  с окружностью хорошо согласуется с принятыми в вещественном анализе представлениями о бесконечности: уходу координаты  $t$  на бесконечность по верхней числовой прямой отвечает стремление к нулю координаты  $s = 1/t$  на нижней, и сжимающиеся  $\varepsilon$ -окрестности точки  $S$  на окружности выглядят на верхней числовой прямой как дополнения до неограниченно увеличивающихся отрезков  $[-1/\varepsilon, 1/\varepsilon]$ , используемые в анализе как «окрестности бесконечности».

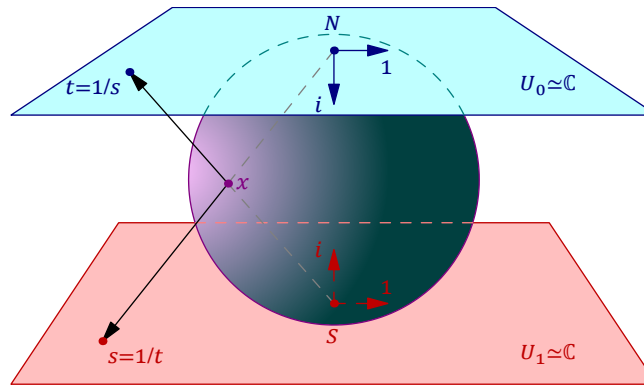


Рис. 17◊4.  $\mathbb{P}_1(\mathbb{C}) \simeq S^2$ .

При  $\mathbb{k} = \mathbb{C}$  результат склейки двух аффинных прямых  $A^1 = \mathbb{C}$  вдоль дополнений до нуля по правилу  $t \leftrightarrow 1/t$  можно воспринимать как сферу диаметра 1, склеенную из двух диаметрально противоположных касательных плоскостей, каждая из которых стереографически проектируется на сферу из точки, диаметрально противоположной к точке своего касания со сферой, см. рис. 17◊4. Если за начала отсчёта в каждой из плоскостей принять точку касания, а векторы

$1, i \in \mathbb{C}$  направить так<sup>1</sup>, как на рис. 17◊4, то комплексные числа  $s$  и  $t$  из разных плоскостей спроектируются в одну и ту же точку  $P$  сферы если и только если<sup>2</sup>  $\text{Arg } s = -\text{Arg } t$  и  $|s| = 1/|t|$ , т. е. когда  $s = 1/t$  в  $\mathbb{C}$ . По этой причине комплексную проективную прямую  $\mathbb{P}_1(\mathbb{C})$  часто называют сферой Римана, а также *полной комплексной плоскостью*.

Пример 17.2 (вещественная проективная плоскость  $\mathbb{P}_2(\mathbb{R}) = \mathbb{P}(\mathbb{R}^3)$ )

Как топологическое пространство, вещественная проективная плоскость допускает следующее наглядное описание. Каждая проходящая через начало координат прямая в  $\mathbb{R}^3$  пересекает единичную замкнутую полусферу  $x_0^2 + x_1^2 + x_2^2 = 1, x_0 \geq 0$ . При этом любая не лежащая в плоскости  $x_0 = 0$  прямая пересекает полусферу ровно в одной внутренней точке, а каждая прямая из плоскости  $x_0 = 0$  — в двух диаметрально противоположных точках границы. Таким образом, топологическое пространство  $\mathbb{P}_2(\mathbb{R})$  гомеоморфно<sup>3</sup> полусфере, у которой склеены диаметрально противоположные точки границы. Поскольку полусфера гомеоморфна квадрату, то же пространство получится при склейке противоположных сторон квадрата с обращением их ориентации, как на рис. 17◊5.

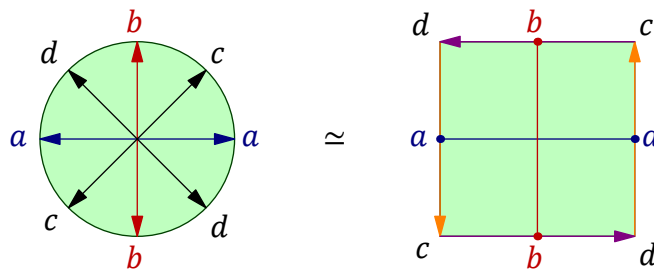


Рис. 17◊5.  $\mathbb{P}_2(\mathbb{R})$  это квадрат со склеенными противоположными точками границы.

Результат такой склейки иначе можно описать как ленту Мёбиуса, к граничной окружности которой приклеен — по своей граничной окружности — диск, см. рис. 17◊6.

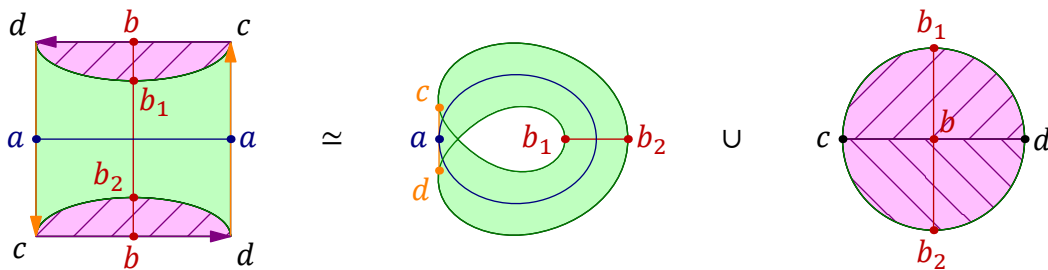


Рис. 17◊6.  $\mathbb{P}_2(\mathbb{R})$  это лента Мёбиуса с заклеенной диском границей.

<sup>1</sup>Обратите внимание, что ориентации плоскостей при этом согласованы в том смысле, что одну из них можно непрерывным перекачиванием по поверхности сферы совместить с другой так, что ориентации будут одинаковыми.

<sup>2</sup>Первое очевидно из рис. 17◊4, второе — из рассмотрения сечения сферы плоскостью  $NxS$ , которое изображено на рис. 17◊3 выше.

<sup>3</sup>Биективное отображение между топологическими пространствами называется *гомеоморфизмом*, если и оно, и обратное к нему отображения оба непрерывны.

Обратите внимание, что красный вертикальный и синий горизонтальный отрезки квадрата превращаются при склейке в две петли<sup>1</sup> на  $\mathbb{P}_2(\mathbb{R})$ , которые пересекаются по одной точке, причём при малых шевелениях этих петель они по-прежнему будут пересекаться в одной точке. Это означает, что ни одну из них нельзя стянуть в точку непрерывной деформацией внутри  $\mathbb{P}_2(\mathbb{R})$ .

УПРАЖНЕНИЕ 17.5. Убедитесь, что устойчивое к малым шевелениям количество точек пересечения непрерывно стягиваемой в точку петли с любой другой петлёй чётно.

При этом, если петлю  $a$ , т. е. экватор ленты Мёбиуса, пройти в одном направлении дважды, то возникающая таким образом «удвоенная петля» непрерывно деформируется в границу ленты Мёбиуса, а значит, может быть стянута внутри  $\mathbb{P}_2(\mathbb{R})$  в точку по приклеенному к границе ленты Мёбиуса диску. Таким образом, на  $\mathbb{P}_2(\mathbb{R})$  есть нестягиваемая петля, двойной обход которой стягиваем.

ПРИМЕР 17.3 (вещественное проективное пространство  $\mathbb{P}_3(\mathbb{R}) \simeq \text{SO}_3(\mathbb{R})$ )

Каждая собственная линейная изометрия трёхмерного евклидова пространства  $\mathbb{R}^3$  является поворотом вокруг некоторой прямой. Изобразим поворот вокруг прямой с направляющим вектором  $e$  единичной длины на угол  $\varphi \in [0, \pi]$ , если смотреть вдоль вектора  $e$ , точкой<sup>2</sup>  $\varphi \cdot e \in \mathbb{R}^3$ . В результате все повороты на углы, меньшие  $\pi$ , изобразятся внутренними точками шара радиуса  $\pi$  с центром в нуле. Диаметрально противоположным точкам ограничивающей этот шар сферы отвечает одна и та же изометрия — поворот на угол  $\pi$  вокруг соединяющей эти точки прямой<sup>3</sup>. Таким образом собственная ортогональная группа  $\text{SO}_3(\mathbb{R})$  евклидова пространства  $\mathbb{R}^3$  гомеоморфна трёхмерному шару со склеенными диаметрально противоположными точками ограничивающей этот шар сферы. С другой стороны, конструкция из предыдущего прим. 17.2, применённая к пространству  $\mathbb{R}^4$ , показывает, что вещественное проективное пространство  $\mathbb{P}_3(\mathbb{R}) = \mathbb{P}(\mathbb{R}^4)$  допускает точно такое же описание: каждая проходящая через начало координат прямая в  $\mathbb{R}^4$  пересекает единичную замкнутую полусферу

$$x_0^2 + x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1, \quad x_0 \geq 0,$$

и все не лежащие в гиперплоскости  $x_0 = 0$  прямые пересекают её в единственной внутренней точке, а прямые из гиперплоскости  $x_0 = 0$  — по двум диаметрально противоположным точкам граничной трёхмерной сферы  $x_0^2 + x_1^2 + x_2^2 = 1$ . Остаётся заметить, что полусфера в  $\mathbb{R}^4$  гомеоморфна шару в  $\mathbb{R}^3$ .

УПРАЖНЕНИЕ 17.6. Убедитесь, что семейство вращений вокруг фиксированной оси в фиксированном направлении на непрерывно меняющийся от 0 до  $2\pi$  угол образует в пространстве  $\text{SO}_3(\mathbb{R}) \simeq \mathbb{P}_3(\mathbb{R})$  нестягиваемую петлю, двойной обход которой стягиваем.

ПРИМЕР 17.4 (СТАНДАРТНЫЕ АФФИННЫЕ КАРТЫ НА  $\mathbb{P}_n$ )

Набор из  $(n+1)$  аффинных карт  $U_\nu = U_{x_\nu}$ , задаваемых в  $\mathbb{A}^{n+1}$  уравнениями  $x_\nu = 1$ , называется *стандартным аффинным покрытием* проективного пространства  $\mathbb{P}_n = \mathbb{P}(\mathbb{K}^{n+1})$ . Для каждого  $\nu = 0, 1, \dots, n$  в качестве стандартных локальных аффинных координат на карте  $U_\nu$  берутся  $n$  линейных форм  $t_i^{(\nu)} = x_i|_{U_\nu} = x_i/x_\nu$ , где  $0 \leq i \leq n$  и  $i \neq \nu$ . Таким образом, пространство  $\mathbb{P}_n$

<sup>1</sup>Т. е. в замкнутые кривые, являющиеся непрерывными образами окружности.

<sup>2</sup>Т. е. концом вектора длины  $\varphi \in [0, \pi] \subset \mathbb{R}$ , отложенного в направлении единичного вектора  $e$ .

<sup>3</sup>Он виден как поворот на угол  $\pi$  независимо от того направления на оси, вдоль которого Вы его наблюдаете.

можно представлять себе как результат склейки  $(n + 1)$  различных копий  $U_0, U_1, \dots, U_n$  аффинного пространства  $\mathbb{A}^n$  по их фактическим пересечениям внутри  $\mathbb{P}^n$ . В однородных координатах на  $\mathbb{P}^n$  пересечение  $U_\mu \cap U_\nu$  описывается как множество всех таких  $x = (x_0 : x_1 : \dots : x_n)$ , у которых обе координаты  $x_\mu$  и  $x_\nu$  не обращаются в 0. В локальных аффинных координатах на картах  $U_\mu$  и  $U_\nu$  это множество задаётся, соответственно, неравенствами  $t_\nu^{(\mu)} \neq 0$  и  $t_\mu^{(\nu)} \neq 0$ . При этом точка  $t^{(\mu)} \in U_\mu$  склеивается с точкой  $t^{(\nu)} \in U_\nu$  если и только если  $t_\nu^{(\mu)} = 1 / t_\mu^{(\nu)}$  и  $t_i^{(\mu)} = t_i^{(\nu)} / t_\mu^{(\nu)}$  для  $i \neq \mu, \nu$ . Правые части этих равенств называются *функциями перехода* от локальных координат  $t^{(\nu)}$  к локальным координатам  $t^{(\mu)}$ .

#### Пример 17.5 (Аффинные коники)

Посмотрим как выглядит в различных аффинных картах плоская проективная кривая  $C$ , заданная в однородных координатах на  $\mathbb{P}_2 = \mathbb{P}(\mathbb{R}^3)$  уравнением  $x_0^2 + x_1^2 = x_2^2$ . В стандартной

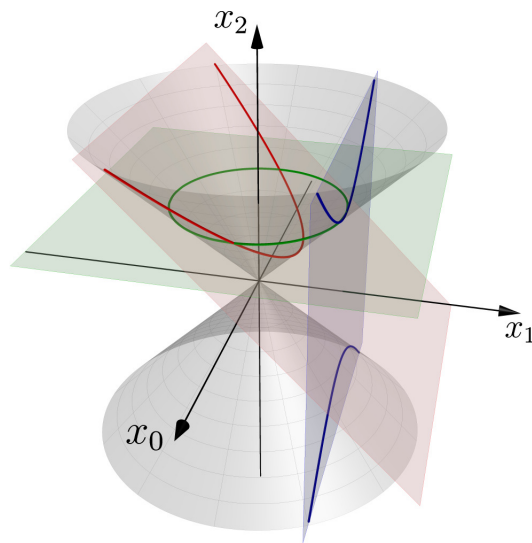


Рис. 17◊7. Аффинные изображения проективной коники.

карте  $U_1$ , где  $x_1 = 1$ , в локальных координатах  $t_0 = x_0 / x_1$  и  $t_2 = x_2 / x_1$  это уравнение превращается в уравнение гиперболы  $t_2^2 - t_0^2 = 1$ . В стандартной карте  $U_2$ , где  $x_2 = 1$ , в локальных координатах  $t_0 = x_0 / x_2$ ,  $t_1 = x_1 / x_2$  — в уравнение окружности  $t_0^2 + t_1^2 = 1$ . В нестандартной карте  $U_{x_1+x_2}$ , где  $x_1 + x_2 = 1$ , в локальных координатах  $t = x_0 / (x_1 + x_2)$  и  $s = (x_2 - x_1) / (x_2 + x_1)$  после переноса  $x_1^2$  из левой части направо и деления обеих частей на  $x_2 + x_1$  наше однородное уравнение превратится в уравнение параболы  $t^2 = u$ . Таким образом, аффинные эллипс, гипербола и парабола суть изображения одной и той же проективной кривой  $x_0^2 + x_1^2 = x_2^2$  в различных аффинных картах. Вид кривой  $C$  в карте  $U_\xi \subset \mathbb{P}_2$  определяется тем, как располагается по отношению к  $C$  бесконечно удалённая прямая  $\xi(x) = 0$  этой карты: эллипс, парабола и гипербола возникают, соответ-

ственно, когда эта прямая не пересекается с  $C$ , касается  $C$  и пересекается с  $C$  в двух различных точках, см. рис. 17◊7.

**17.2. Подпространства.** Проективизации  $\mathbb{P}(U) \subset \mathbb{P}(V)$  векторных подпространств  $U \subset V$  называются *проективными подпространствами* в  $\mathbb{P}(V)$ . Через любые две различные точки  $a, b \in \mathbb{P}(V)$  проходит единственная проективная прямая  $(ab)$ . Она является проективизацией линейной оболочки непропорциональных векторов  $a, b$  и состоит из всевозможных ненулевых линейных комбинаций  $\lambda a + \mu b$ , рассматриваемых с точностью до пропорциональности. Отношение  $(\lambda : \mu)$  коэффициентов в разложении вектора  $v = \lambda a + \mu b \in (ab)$  можно использовать в качестве внутренней однородной координаты точки  $v$  на проективной прямой  $(ab)$ .

**Упражнение 17.7.** Убедитесь, что  $k$ -мерное проективное подпространство наблюдается в любой задевающей его аффинной карте как  $k$ -мерное аффинное подпространство.

#### Предложение 17.1

Для любых двух проективных подпространств  $K, L \subset \mathbb{P}^n$  выполняется неравенство

$$\dim(K \cap L) \geq \dim K + \dim L - n.$$

Доказательство. Пусть  $\mathbb{P}_n = \mathbb{P}(V)$ ,  $L = \mathbb{P}(U)$ ,  $\mathbb{P}(W)$ , где  $U, W \subset V$  — векторные подпространства. Тогда  $K \cap L = \mathbb{P}(U \cap W)$  имеет размерность  $\dim K \cap L = \dim(U \cap W) - 1 \geq \dim U + \dim W - \dim V - 1 = \dim K + 1 + \dim L + 1 - (n + 1) - 1 = \dim K + \dim L - n$ .  $\square$

УПРАЖНЕНИЕ 17.8. Убедитесь, что любые две прямые на  $\mathbb{P}_2$  пересекаются.

**17.2.1. Дополнительные подпространства и проекции.** Проективные подпространства  $K = \mathbb{P}(U)$  и  $L = \mathbb{P}(W)$  в  $\mathbb{P}_n = \mathbb{P}(V)$  называются *дополнительными*, если

$$K \cap L = \emptyset \quad \text{и} \quad \dim K + \dim L = n - 1.$$

Например, любые две непересекающиеся прямые в  $\mathbb{P}_3$  дополнительные. На языке линейной алгебры дополнительность проективных подпространств означает, что подлежащие им векторные подпространства  $U, W \subset V$  трансверсальны, т. е.  $U \cap W = \{0\}$ , и

$$\dim U + \dim W = \dim K + 1 + \dim L + 1 = (n + 1) = \dim V,$$

откуда  $V = U \oplus W$ . В этом случае любой вектор  $v \in V$  имеет единственное разложение  $v = u + w$  с  $u \in U$  и  $w \in W$ . Если вектор  $v$  не лежит ни в  $U$ , ни в  $W$ , обе компоненты этого разложения отличны от нуля. Это означает, что для любой точки  $p \notin K \sqcup L$  существует единственная проходящая через  $p$  прямая  $\ell$ , пересекающая как  $K$ , так и  $L$ .

УПРАЖНЕНИЕ 17.9. Убедитесь в этом.

Всякая пара дополнительных подпространств  $K, L \subset \mathbb{P}_n$  задаёт проекцию из  $K$  на  $L$

$$\pi_L^K : (\mathbb{P}_n \setminus K) \rightarrow L, \quad (17-1)$$

которая тождественно действует на  $L$  и переводит каждую точку  $p \in \mathbb{P}_n \setminus (K \sqcup L)$  в точку пересечения подпространства  $L$  с той единственной прямой, которая проходит через точку  $p$  и пересекает оба подпространства  $K$  и  $L$ . На языке линейной алгебры, проекция переводит каждый вектор  $v = u + w$  с ненулевой компонентой  $w \in W$  в эту компоненту. В однородных координатах  $(x_0 : x_1 : \dots : x_n)$ , согласованных с разложением  $V = U \oplus W$  так, что начальный кусок  $(x_0 : x_1 : \dots : x_m)$  является координатами в  $K$ , а остаток  $(x_{m+1} : x_{m+2} : \dots : x_n)$  — координатами в  $L$ , проекция  $\pi_L^K$  просто удаляет первые  $(m + 1)$  координат  $x_\nu$  с  $0 \leq \nu \leq m$ .

**17.2.2. Проективная двойственность.** Проективизации  $\mathbb{P}_n = \mathbb{P}(V)$  и  $\mathbb{P}_n^\times \stackrel{\text{def}}{=} \mathbb{P}(V^*)$  двойственных друг другу векторных пространств  $V$  и  $V^*$  называются *двойственными* проективными пространствами. Геометрически, каждое из них есть пространство гиперплоскостей в другом: соотношение  $\varphi(v) = 0$  на вектор  $v \in V$  ковектор  $\varphi \in V^*$  линейно как по  $v$ , так и по  $\varphi$ , и задаёт при фиксированном  $\varphi \in \mathbb{P}_n^\times$  гиперплоскость в  $\mathbb{P}_n$ , а при фиксированном  $v \in \mathbb{P}_n$  — гиперплоскость в  $\mathbb{P}_n^\times$ , состоящую из всех гиперплоскостей в  $\mathbb{P}_n$ , проходящих через точку  $v \in \mathbb{P}_n$ . Так как две линейные формы задают одну и ту же гиперплоскость в векторном пространстве если и только если они пропорциональны, гиперплоскости в проективном пространстве биективно соответствуют точкам двойственного проективного пространства.

Напомню<sup>1</sup>, что между векторными подпространствами дополнительных размерностей в  $V$  и  $V^*$  имеется каноническая биекция  $U \leftrightarrow \text{Ann}(U)$ , которая оборачивает включения и переводит суммы в пересечения, а пересечения — в суммы. На языке проективной геометрии это означает,

<sup>1</sup>См. теор. 7.1 на стр. 91.

что множество гиперплоскостей, содержащих заданное  $m$ -мерное проективное подпространство  $K = \mathbb{P}(U) \subset \mathbb{P}_n$ , представляет собою проективное подпространство  $K^\times \stackrel{\text{def}}{=} \mathbb{P}(\text{Ann } U) \subset \mathbb{P}_n^\times$  размерности  $n - m - 1$ , и при каждом  $m = 0, 1, \dots, (n - 1)$  соответствие  $K \rightleftharpoons K^\times$  между  $m$ -мерными проективными подпространствами в  $\mathbb{P}_n$  и  $(n - m - 1)$ -мерными проективными подпространствами в  $\mathbb{P}_n^\times$  взаимно однозначно и оборачивает включения. Это соответствие называется *проективной двойственностью*. Оно позволяет переговаривать геометрические утверждения в эквивалентные двойственные геометрические утверждения, подчас довольно сильно отличающиеся от исходных.

Например, условие коллинеарности трёх точек двойственно условию наличия у трёх гиперплоскостей общего подпространства коразмерности 2.

Поскольку биекция  $U \rightleftharpoons \text{Ann}(U)$  переводит пересечения векторных пространств в суммы и наоборот, соответствие  $K \rightleftharpoons K^\times$  переводит пересечение  $K \cap L$  проективных подпространств в *линейное соединение*<sup>1</sup>  $J(K^\times, L^\times)$  — объединение всех проективных прямых<sup>2</sup>  $(\varphi\psi)$  с  $\varphi \in K^\times$ ,  $\psi \in L^\times$ . Наоборот, линейное соединение  $J(K, L)$  двойственно пересечению  $K^\times \cap L^\times$ .

УПРАЖНЕНИЕ 17.10. Убедитесь, что  $\mathbb{P}(U + W) = J(\mathbb{P}(U), \mathbb{P}(W))$  в  $\mathbb{P}(V)$  для любых ненулевых векторных подпространств  $U, W \subset V$ .

**17.3. Проективные квадрики.** Одномерные изотропные подпространства ненулевой квадратичной формы  $q$  на векторном пространстве  $V$  образуют в  $\mathbb{P}(V)$  геометрическую фигуру, которая называется *проективной квадратикой* и обозначается  $V(q)$ . Квадрика  $V(q)$  называется *гладкой* (а также  *невырожденной* или  *неособой*), если квадратичная форма  $q$  невырождена<sup>3</sup>. В противном случае квадрика называется *особой* или *вырожденной*.

ПРИМЕР 17.6 (квадрики на  $\mathbb{P}_1$ , геометрическая переформулировка ПРИМ. 15.1 на стр. 185)

Если  $\dim V = 2$ , уравнение  $q(x) = 0$  в ортогональном базисе формы  $q$  преобразуется либо к виду  $x_0^2 = 0$ , либо к виду  $x_0^2 + \alpha x_1^2 = 0$ , где  $\alpha \neq 0$ .

В первом случае форма  $q$  вырождена, а квадрика  $V(q)$  состоит из единственной точки  $p = (0 : 1)$ , представляющей одномерное ядро формы  $q$ . Поскольку квадратичная форма  $q = x_0^2$  является квадратом линейной формы  $x_0$ , аннулирующей точку  $p$ , квадрика  $V(q)$  называется *двойной точкой*  $p$ .

Гладкая квадрика  $x_0^2 + \alpha x_1^2 = 0$  либо пуста, либо состоит из двух различных точек. Первое равносильно тому, что  $-\alpha$  не является квадратом в  $\mathbb{k}$ , и над алгебраически замкнутым полем  $\mathbb{k}$  такого не бывает. Если же  $-\alpha = \delta^2$ , то форма  $x_0^2 + \alpha x_1^2 = (x_0 - \delta x_1)(x_0 + \delta x_1)$  зануляется ровно в двух различных точках  $(\pm\delta : 1) \in \mathbb{P}_1$ .

Различить все перечисленные случаи можно при помощи определителя Грама формы  $q$  в произвольном базисе<sup>4</sup> пространства  $V$ . Квадрика представляет собою двойную точку, если её дискриминант  $D = -4 \det q$  обращается в нуль, состоит из двух различных точек, если  $D$  является ненулевым квадратом, и пуста, когда  $D$  не является квадратом.

<sup>1</sup>Обозначение  $J$  является сокращением от английского *join*.

<sup>2</sup>Здесь и далее удобно считать, что «прямая»  $(aa)$  это одна точка  $a$ .

<sup>3</sup>Т. е. её поляризация  $\tilde{q} : V \times V \rightarrow \mathbb{k}$  удовлетворяет условиям ПРЕДЛ. 14.1 на стр. 170.

<sup>4</sup>При умножении формы  $q$  на ненулевую константу определитель Грама  $\det q = -D/4$  умножается на квадрат этой константы, а коэффициент  $\alpha$  в выражении  $x_0^2 + \alpha x_1^2$  сравним по модулю умножения на ненулевые квадраты из поля  $\mathbb{k}$  с определителем Грама этой формы в произвольном базисе, ср. с ПРИМ. 15.1 на стр. 185.



СЛЕДСТВИЕ 17.1

Квадрика  $Q \subset \mathbb{P}_n$  может пересекать прямую  $\ell \subset \mathbb{P}_n$  ровно одним из следующих четырёх способов: либо  $\ell \subset Q$ , либо  $\ell \cap Q$  это одна двойная точка, либо  $\ell \cap Q$  это две различные точки, либо  $\ell \cap Q = \emptyset$ , причём над алгебраически замкнутым полем последний случай невозможен.  $\square$

**17.3.1. Касательные прямые и касательное пространство.** Прямая, проходящая через точку  $p$  квадрики  $Q$ , называется *касательной* к  $Q$  в точке  $p$ , если она лежит на квадрике  $Q$  или пересекает  $Q$  по двойной точке  $p$ . Объединение всех прямых, касающихся квадрики  $Q$  в точке  $p$ , обозначается  $T_p Q$  и называется *касательным пространством* к  $Q$  в точке  $p \in Q$ .

Таким образом, прямая  $(ab)$  является касательной к квадрике  $Q = V(q)$  если и только если ограничение квадратичной формы  $q$  на линейную оболочку векторов  $a, b$  вырождено, т. е.

$$\det \begin{pmatrix} q(a) & \tilde{q}(a, b) \\ \tilde{q}(a, b) & q(b) \end{pmatrix} = 0, \quad (17-2)$$

где  $\tilde{q}: V \times V \rightarrow \mathbb{k}$  это поляризация<sup>1</sup> формы  $q$ . Если  $a \in Q$ , то  $q(a) = 0$  и равенство (17-2) равносильно ортогональности точек  $a$  и  $b$ :

$$b \in T_a Q \iff \tilde{q}(a, b) = 0. \quad (17-3)$$

Если  $b \notin Q$ , то ограничение формы  $q$  на одномерное подпространство  $b \subset V$  невырождено и  $V = b \oplus b^\perp$ . Формула (17-3) утверждает, что видимый из точки  $b \notin Q$  контур квадрики  $Q$ , т. е. ГМТ пересечения с квадрикой  $Q$  всевозможных касательных, опущенных на неё из точки  $b$ , высекается из квадрики  $Q$  не проходящей через точку  $b$  гиперплоскостью

$$\mathbb{P}(b^\perp) = \{x \mid \tilde{q}(x, b) = 0\}, \quad (17-4)$$

которая называется *полярной* точки  $b$  относительно квадрики  $Q$ . Из формулы (17-3) также следует, что касательное пространство

$$T_a Q = \mathbb{P}(a^\perp) = \{x \mid \tilde{q}(x, a) = 0\} \quad (17-5)$$

либо является гиперплоскостью в  $\mathbb{P}(V)$ , либо совпадает со всем пространством  $\mathbb{P}(V)$ . В первом случае точка  $a \in Q$  называется *гладкой* или *неособой*, а во втором — *особой*. Особость означает, что  $\tilde{q}(v, a) = 0$  для всех  $v \in V$ , т. е. что  $a$  лежит в ядре корреляции<sup>2</sup>  $\hat{q}: V \rightarrow V^*$ , переводящей вектор  $v \in V$  в линейную форму  $w \mapsto \tilde{q}(w, v)$  на пространстве  $V$ . Все ненулевые векторы из  $\ker \hat{q}$  изотропны и являются особыми точками квадрики  $Q$ . Проективное подпространство

$$\text{Sing } Q \stackrel{\text{def}}{=} \mathbb{P}(\ker \hat{q}) \subset Q$$

называется *пространством особых точек* или *вершинным пространством* квадрики  $Q$ . Оно непусто если и только если квадрика  $Q = V(q)$  особа, т. е. имеет  $\det q = 0$ .

ТЕОРЕМА 17.1

Пересечение особой квадрики  $Q$  с любым дополнительным к  $\text{Sing } Q$  проективным подпространством  $L \subset \mathbb{P}(V)$  является гладкой (возможно пустой) квадрикой  $Q' = L \cap Q$  в подпространстве  $L$ , и исходная квадрика  $Q$  является линейным соединением<sup>3</sup>  $Q'$  и  $\text{Sing } Q$ .

<sup>1</sup>См. н° 15.3 на стр. 183.

<sup>2</sup>См. н° 14.1.2 на стр. 169.

<sup>3</sup>Т. е. объединением всех прямых вида  $(ab)$  с  $a \in Q'$  и  $b \in \text{Sing } Q$ , ср. с *упр.* 17.10 на стр. 208.

Доказательство. невырожденность ограничения формы  $q$  на подпространство  $L$  была доказана в [предл. 14.5](#) на стр. 176. Каждая пересекающая  $\text{Sing } Q$  прямая, будучи касательной к квадрике  $Q$ , либо целиком лежит на квадрике  $Q$ , либо пересекает  $Q$  ровно в одной точке — точке своего пересечения с  $\text{Sing } Q$ . Поэтому каждая прямая  $(a, b)$  с  $a \in \text{Sing } Q$ ,  $b \in Q'$  целиком лежит на  $Q$ , т. е.  $J(Q', \text{Sing } Q) \subset Q$ . По [упр. 17.9](#) каждая не лежащая в  $L$  гладкая точка  $c \in Q$  лежит на некоторой прямой, пересекающей  $L$ , и  $\text{Sing } Q$ . Поскольку эта прямая пересекает  $Q$  в точке  $c \notin \text{Sing } Q$ , она целиком лежит на квадрике, а значит, пересекает  $L$  в точке, лежащей на квадрике  $Q'$ . Поэтому  $Q \subset J(Q', \text{Sing } Q)$ .  $\square$

УПРАЖНЕНИЕ 17.11. Покажите, что квадрика, имеющая хоть одну гладкую точку, не содержится в гиперплоскости.

**17.3.2. Коники.** Квадрики на проективной плоскости называются *кониками*. Примером гладкой коники является кривая из [прим. 17.5](#). Вырожденная коника задаётся квадратичной формой  $q$  ранга 1 или 2. В первом случае  $q$  является квадратом линейной формы, поскольку в ортогональном базисе записывается в виде  $q(x_0, x_1, x_2) = x_0^2$ . Соответствующая коника  $C = V(q)$  называется *двойной прямой*. Она выглядит как прямая  $x_0 = 0$  и совпадает с  $\text{Sing } C$ . В свете [теор. 17.1](#) коника  $C$  является линейным соединением прямой  $\text{Sing } C$  и пустой нульмерной квадрики<sup>1</sup>. Если  $\text{rk } q = 2$ , пространство  $\text{Sing } q$  является точкой — проективизацией одномерного ядра формы  $Q$ . По [теор. 17.1](#) пересечение такой коники  $C$  с любой не проходящей через особую точку прямой является гладкой квадрикой на этой прямой и, как мы видели [прим. 17.6](#), либо пусто, либо состоит из двух разных точек, причём первый случай над алгебраически замкнутым полем невозможен. В первом случае коника  $C$  называется *двойной точкой* и совпадает со своей особой точкой. Например, над полем  $\mathbb{R}$  уравнение  $x_0^2 + x_1^2 = 0$  задаёт двойную точку  $(0 : 0 : 1)$ . Во втором случае коника  $C$  является объединением двух различных прямых, пересекающихся в её особой точке, и называется *распавшейся*. В ортогональном базисе уравнение коники ранга 2 приводится к виду  $x_0^2 + \alpha x_1^2 = 0$  — тому же самому, что и в [прим. 17.6](#) на стр. 208. Точка  $(0 : 0 : 1)$  является особой точкой такой коники, ограничение формы на дополнительную к ядру прямую  $x_2 = 0$  анизотропно, если  $-\alpha$  не квадрат, и гиперболично, если  $-\alpha$  является квадратом. Во втором случае форма разлагается в произведение двух линейных множителей, задающих две прямые, на которые распадается коника  $C$ .

Итак, полный список вырожденных коник таков: распавшаяся коника (объединение двух различных прямых), двойная прямая, двойная точка (над алгебраически замкнутым полем не реализуется).

Невырожденная квадратичная форма  $q$  на трёхмерном пространстве либо анизотропна, либо является прямой ортогональной суммой двумерной гиперболической и одномерной анизотропной форм. В первом случае  $V(q) = \emptyset$ . Над полем  $\mathbb{R}$  такая коника задаётся уравнением  $x_0^2 + x_1^2 + x_2^2 = 0$ . Над алгебраически замкнутым полем таких коник нет.

Во втором случае в подходящих координатах коника задаётся уравнением

$$x_1^2 = x_0 x_2. \quad (17-6)$$

Поскольку любые значения  $x_0 = t_0$ ,  $x_1 = t_1$  однозначно дополняются до тройки

$$(t_0 : t_1 : t_1^2/t_0) = (t_0^2 : t_0 t_1 : t_1^2),$$

<sup>1</sup>Дополнительным подпространством к прямой на плоскости является точка — проективизация одномерного векторного пространства, а невырожденная форма на одномерном пространстве автоматически анизотропна.

удовлетворяющей уравнению (17-6), коника (17-7) является образом вложения

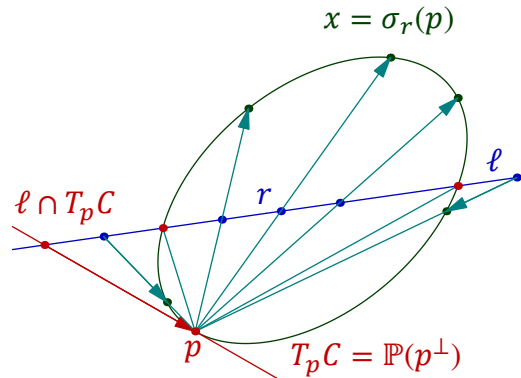
$$\mathbb{P}_1 \hookrightarrow \mathbb{P}_2, \quad (t_0 : t_1) \mapsto (t_0^2 : t_0 t_1 : t_1^2). \quad (17-7)$$

Когда точка  $(t_0 : t_1)$  пробегает  $\mathbb{P}_1$ , точка  $(x_0 : x_1 : x_2) = (t_0^2 : t_0 t_1 : t_1^2)$  ровно по одному разу пробегает все изотропные подпространства квадратичной формы  $x_1^2 - x_0 x_2$ .

Итак, над любым полем  $\mathbb{k}$  характеристики  $\text{char } \mathbb{k} \neq 2$  имеется единственная с точностью до линейной замены координат непустая невырожденная коника. В подходящих координатах она задаётся уравнением (17-6) и допускает рациональную параметризацию (17-7).

**Пример 17.7 (проекция коники на прямую)**

Получить рациональную параметризацию непустой невырожденной коники  $C = V(q)$  можно без приведения её уравнения к виду  $x_1^2 = x_0 x_2$ , если явно известна хотя бы одна точка  $p \in C$ . Для этого надо спроектировать какую-нибудь не проходящую через  $p$  прямую  $\ell$  из точки  $p$  на конику  $C$ , как на рис. 17◊8. Согласно сл. 17.1 каждая прямая  $(pr)$  с  $r \in \ell$  пересекает конику  $C$  в точке  $p$  и ещё ровно в одной точке  $x = x(r) \in C$ , которая совпадает с  $p$ , если прямая  $(pr) = T_p C$  касается коники  $C$  в точке  $p$ , и отлична от  $p$ , если  $(pr)$  не касается коники  $C$  в точке  $p$ . Во втором случае, если  $r \in \ell \cap C$ , то  $x(r) = r$ , а если точка  $r$  анизотропна для формы  $q$ , то две лежащие на прямой  $(pr)$  изотропные точки  $p$  и  $x(r)$  переводятся друг в друга отражением<sup>1</sup>  $\sigma_r$  в  $\tilde{q}$ -ортогонале  $r^\perp$  к анизотропному вектору  $r \in (pr)$ . Таким образом,



$$x(r) = \sigma_r(p) = p - 2 \frac{\tilde{q}(p, r)}{\tilde{q}(r, r)} r. \quad (17-8)$$

Рис. 17◊8. Проекция коники на прямую.

Обратите внимание, что когда  $(pr) = T_p C$ , точки  $p$  и  $r$   $\tilde{q}$ -ортогональны друг другу и  $\sigma_r(p) = p = x(r)$ . Формулу (17-8) можно переписать в виде

$$q(r) \cdot x(r) = q(r) \cdot p - 2\tilde{q}(p, r) \cdot r. \quad (17-9)$$

Если выбрать на прямой  $\ell$  какой-нибудь базис  $a, b$  и использовать векторы  $p, a, b$  в качестве базиса на  $\mathbb{P}_2$ , то однородные координаты  $(x_p : x_a : x_b)$  точки  $x(r) \sim q(r) \cdot x(r)$  в этом базисе и однородные координаты  $(t_a : t_b)$  точки  $r = t_a a + t_b b \in \ell$  в базисе  $a, b$  будут в силу (17-9) выражаться друг через друга следующим образом:

$$\begin{aligned} (x_p : x_a : x_b) &= (q(t_a a + t_b b) : -2t_a \tilde{q}(p, t_a a + t_b b) : -2t_b \tilde{q}(p, t_a a + t_b b)) \\ (t_a : t_b) &= (x_a : x_b). \end{aligned} \quad (17-10)$$

**Пример 17.8 (рациональная параметризация окружности и пифагоровы тройки)**

Окружность  $x_0^2 + x_1^2 = 1$  является изображением гладкой проективной коники  $x_0^2 + x_1^2 - x_2^2 = 0$  из прим. 17.5 в стандартной аффинной карте  $U_2$ , где  $x_2 = 1$ . Построим рациональную параметризацию этой коники при помощи проекции из точки  $p = e_0 + e_2 = (1 : 0 : 1)$  на задаваемую

<sup>1</sup>См. н° 15.2 на стр. 181.

уравнением  $x_0 = 0$  прямую  $\ell = (e_1 e_2)$ , см. рис. 17◊9. Беря  $r = t_1 e_1 + t_2 e_2 = (0 : t_1 : t_2)$ , получаем  $\tilde{q}(p, r) = -t_2$ ,  $q(r) = t_1^2 - t_2^2$ , и по формуле (17-10),

$$x = (pr) \cap C = (t_1^2 - t_2^2)(e_0 + e_2) + 2t_1 t_2 e_2 + 2t_1 t_2 e_1 = (t_1^2 - t_2^2)e_0 + 2t_1 t_2 e_1 + (t_1^2 + t_2^2)e_2$$

В стандартном базисе  $e_0, e_1, e_2$  эта точка имеет однородные координаты

$$(x_0 : x_1 : x_2) = ((t_1^2 - t_2^2) : 2t_1 t_2 : (t_1^2 + t_2^2)). \quad (17-11)$$

Альтернативный способ получения рациональной параметризации заключается в приведении квадратичной формы  $x_0^2 + x_1^2 - x_2^2$  к виду  $a_1^2 = a_0 a_2$  и использовании параметризации

$$(a_0 : a_1 : a_2) = (t_0^2 : t_0 t_1 : t_1^2)$$

из форм. (17-7) на стр. 211. Это делается при помощи линейной замены переменных

$$\begin{cases} a_0 = x_2 + x_0 \\ a_1 = x_1 \\ a_2 = x_2 - x_0 \end{cases} \quad \begin{cases} x_0 = (a_0 - a_2)/2 \\ x_1 = a_1 \\ x_2 = (a_0 + a_2)/2, \end{cases}$$

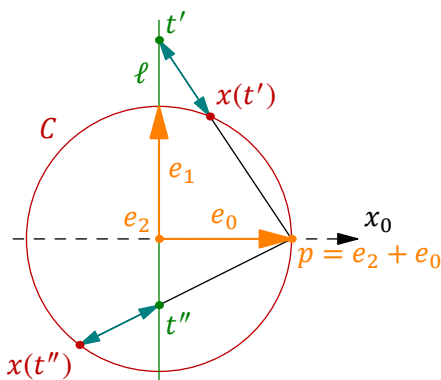


Рис. 17◊9. Параметризация окружности.

превращающей (17-7) в (17-11). Обратите внимание, что подставляя в правую часть формулы (17-11) всевозможные  $(t_0, t_1) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ , мы получим слева все возможные пифагоровы тройки<sup>1</sup> с точностью до пропорциональности.

**17.4. Однородные многочлены.** Рассмотрим  $(n + 1)$ -мерное векторное пространство  $V$  с базисом  $e_0, e_1, \dots, e_n$  над полем  $\mathbb{k}$ . Алгебра многочленов  $\mathbb{k}[e_0, e_1, \dots, e_n]$  от коммутирующих переменных  $e_0, e_1, \dots, e_n$  с коэффициентами из  $\mathbb{k}$  называется *симметрической алгеброй* векторного пространства  $V$ . Как векторное пространство над  $\mathbb{k}$  эта алгебра является прямой суммой счётного множества конечномерных векторных подпространств  $S^k V$ , образованных однородными многочленами степени  $k$  от  $e_0, e_1, \dots, e_n$ . При  $k = 0$  пространство  $S^0 V = \mathbb{k}$  есть одномерное пространство констант. При  $k = 1$  пространство  $S^1 V = V$  состоит из всевозможных линейных комбинаций базисных векторов и канонически отождествляется с  $V$ . Вообще, при каждом  $k \geq 1$  пространство  $S^k V$  представляет собою линейную оболочку всевозможных произведений  $v_1 v_2 \dots v_k$ , составленных из  $k$  произвольных векторов  $v_i \in V$ , и тем самым не зависит от выбора базиса в  $V$ . Поэтому для прямой суммы пространств  $S^k V$  уместно использовать более короткое и не привязанное к выбору базиса обозначение

$$SV \stackrel{\text{def}}{=} \bigoplus_{k \geq 0} S^k V.$$

Любой выбор базиса  $e_0, e_1, \dots, e_n$  в  $V$  задаёт в  $S^k V$  базис из мономов  $e_0^{m_0} e_1^{m_1} \dots e_n^{m_n}$  с целыми  $m_i \geq 0$  и  $m_0 + m_1 + \dots + m_n = k$ .

УПРАЖНЕНИЕ 17.12. Найдите  $\dim S^k V$ , если  $\dim V = n + 1$ .

<sup>1</sup>Т. е. целочисленные решения уравнения Пифагора  $x_0^2 + x_1^2 = x_2^2$ .

**17.4.1. Полиномиальные функции.** Каждый ковектор  $\varphi \in V^*$  представляет собою линейную функцию  $\varphi : V \rightarrow \mathbb{k}$ . Сопоставим каждому произведению  $f = \varphi_1 \varphi_2 \cdots \varphi_k \in S^k V^*$  ковекторов  $\varphi_i \in V^*$  полиномиальную функцию  $f : V \rightarrow \mathbb{k}$ ,  $f(v) = \varphi_1(v) \varphi_2(v) \cdots \varphi_k(v)$ , и по линейности продолжим это сопоставление до гомоморфизма  $SV^* \rightarrow \mathbb{k}^V$  симметрической алгебры пространства  $V^*$  в алгебру  $\mathbb{k}^V$  всех функций  $V \rightarrow \mathbb{k}$ . Если зафиксировать в  $V$  и  $V^*$  двойственные базисы  $\mathbf{e} = (e_0, e_1, \dots, e_n)$  и  $\mathbf{x} = (x_0, x_1, \dots, x_n)$ , то функция  $f : V \rightarrow \mathbb{k}$ , отвечающая многочлену  $f(x_0, x_1, \dots, x_n) \in SV^*$ , будет принимать на каждом векторе  $v \in V$  значение, равное результату подстановки координат вектора  $v$  в базисе  $\mathbf{e}$  вместо переменных  $\mathbf{x}$  в многочлен  $f$ .

УПРАЖНЕНИЕ 17.13 (по алгебре и теории множеств). Убедитесь в этом и покажите, что для конечномерного векторного пространства  $V$  построенный нами гомоморфизм  $SV^* \rightarrow \mathbb{k}^V$  инъективен если и только если поле  $\mathbb{k}$  бесконечно, и сюръективен если и только если поле  $\mathbb{k}$  конечно.

**17.4.2. Проективные гиперповерхности.** Важное отличие проективной геометрии от аффинной заключается в том, что отличный от константы многочлен  $f \in SV^*$  не является функцией на проективном пространстве  $\mathbb{P}(V)$ , так как значения  $f(v)$  и  $f(\lambda v)$  на пропорциональных векторах обычно различны. Тем не менее, множество векторов  $v \in V$  на которых обращается в нуль однородный многочлен  $f \in S^k V$  является корректно определённой геометрической фигурой в  $\mathbb{P}(V)$ , так как равенства  $f(v) = 0$  и  $f(\lambda v) = \lambda^k f(v) = 0$  эквивалентны друг другу для любых ненулевых  $v \in V$  и  $\lambda \in \mathbb{k}$ . Эта фигура обозначается  $V(f) \stackrel{\text{def}}{=} \{v \in V \mid f(v) = 0\}$  и называется *проективной алгебраической гиперповерхностью степени  $k$* , задаваемой однородным многочленом  $f \in S^k V$ . С точки зрения аффинного пространства  $\mathbb{A}(V)$  множество нулей многочлена  $f$  представляет собою конус, образованный проходящими через начало координат прямыми, а каждая такая прямая является точкой в проективном пространстве  $\mathbb{P}(V)$ . Проективная гиперповерхность  $V(f) \subset \mathbb{P}(V)$  состоит ровно из этих точек.

**17.4.3. Проективное замыкание аффинной гиперповерхности.** Произвольный<sup>1</sup> многочлен  $f \in \mathbb{k}[x_1, \dots, x_n]$  задаёт в аффинном координатном пространстве  $\mathbb{A}^n = \mathbb{A}(\mathbb{k}^n)$  аффинную гиперповерхность  $V(f) = \{v \in \mathbb{k}^n \mid f(v) = 0\}$ . Запишем многочлен  $f$  в виде

$$f(x_1, \dots, x_n) = f_0 + f_1(x_1, \dots, x_n) + f_2(x_1, \dots, x_n) + \cdots + f_d(x_1, \dots, x_n),$$

где  $d = \deg f$  и каждый многочлен  $f_k$  однороден степени  $k$ , и вложим  $\mathbb{A}^n$  в проективное пространство  $\mathbb{P}_n = \mathbb{P}(\mathbb{k}^{n+1})$  с однородными координатами  $(x_0 : x_1 : \dots : x_n)$  в качестве стандартной аффинной карты  $U_0$ , на которой  $x_0 = 1$ . образуем из  $f$  однородный многочлен

$$\bar{f}(x_0, x_1, \dots, x_n) \stackrel{\text{def}}{=} f_0 \cdot x_0^d + f_1(x_1, \dots, x_n) \cdot x_0^{d-1} + \cdots + f_d(x_1, \dots, x_n),$$

т. е. умножим в  $f$  каждый моном на такую степень переменной  $x_0$ , чтобы степени всех мономов стали равны  $d$ . Полученный многочлен  $\bar{f}$  превращается обратно в  $f$ , если положить в нём  $x_0 = 1$ . Таким образом  $f$  и  $\bar{f}$  однозначно определяют друг друга. Проективная гиперповерхность  $V(\bar{f}) \subset \mathbb{P}_n$  называется *проективным замыканием* аффинной гиперповерхности  $V(f) \subset \mathbb{A}^n$ . Аффинная гиперповерхность  $V(f) = V(\bar{f}) \cap U_0$  является той частью своего проективного замыкания, которая видна в стандартной аффинной карте  $U_0$ . Точки проективного замыкания, лежащие в бесконечно удалённой по отношению к карте  $U_0$  проективной гиперплоскости  $x_0 = 0$ , образуют в ней проективную гиперповерхность, которая в однородных координатах  $(x_1 : \dots : x_n)$  описывается однородным уравнением  $f_d(x_1, \dots, x_n) = 0$  и называется *поверхностью асимптотических направлений* аффинной гиперповерхности  $V(f)$ . Таким образом,

<sup>1</sup>Не обязательно однородный.

асимптотическими направлениями аффинной гиперповерхности  $V(f) \subset \mathbb{A}(V)$  называются все такие векторы  $v \in V$ , на которых зануляется старшая однородная компонента  $f_d$  многочлена  $f$ . Обратите внимание, что аффинная прямая, проведённая в асимптотическом направлении, вовсе не обязательно является асимптотой аффинной гиперповерхности в том смысле, который принят в математическом анализе.

ПРИМЕР 17.9 (КАСПИДАЛЬНАЯ КУБИКА)

Проективным замыканием аффинной кубической кривой  $x_2 = x_1^3$  является проективная кубическая кривая  $x_0^2 x_2 = x_1^3$ , имеющая ровно одну бесконечно удалённую точку  $p = (0 : 1 : 0)$ , которой в исходной аффинной карте  $U_0$  отвечает направление первой координатной оси  $x_1$ . Обратите внимание, что никакая горизонтальная прямая  $x_2 = \text{const}$  не является асимптотой функции  $x_2 = x_1^3$  в смысле математического анализа. Точка  $p$  лежит в стандартной аффинной карте  $U_1$ , на которой  $x_1 = 1$ . В этой карте кривая задаётся уравнением<sup>1</sup>  $x_0^2 = x_2^3$  и имеет в точке  $p$  остриё.

**17.5. Конфигурации точек на прямой.** Каждый неупорядоченный набор из  $n$  точек

$$p_1, \dots, p_n \in \mathbb{P}_1 = \mathbb{P}(\mathbb{k}^2),$$

среди которых могут быть совпадающие, является алгебраической гиперповерхностью степени  $n$ . В самом деле, пусть  $p_i = (\alpha_i : \beta_i)$ . Обозначим через

$$\det(x, p) \stackrel{\text{def}}{=} \det \begin{pmatrix} x_0 & \alpha \\ x_1 & \beta \end{pmatrix} = \beta x_0 - \alpha x_1$$

единственную с точностью до пропорциональности линейную форму на  $\mathbb{k}^2$ , зануляющуюся на одномерном подпространстве, порождённом ненулевым вектором  $p = (\alpha, \beta)$ . Тогда однородный многочлен  $n$ -й степени

$$f(x_0, x_1) = \det(x, p_1) \cdot \det(x, p_2) \cdot \dots \cdot \det(x, p_n) = \prod_{v=1}^n (\beta_v x_0 - \alpha_v x_1), \quad (17-12)$$

зануляется на  $\mathbb{P}_1$  ровно в точках  $p_1, \dots, p_n$ . Эти точки называются *корнями* однородного многочлена (17-12) на  $\mathbb{P}_1$ . Будем называть *кратностью обращения в нуль* однородного многочлена  $f \in \mathbb{k}[x_0, x_1]$  в точке  $p \in \mathbb{P}_1$  такое максимальное целое неотрицательное  $m$ , что  $f$  делится в  $\mathbb{k}[x_0, x_1]$  на  $\det^m(x, p_i)$ .

Предложение 17.2

Однородный многочлен  $f \in \mathbb{k}[x_0, x_1]$  обращается в нуль в точке  $p \in \mathbb{P}_1 = \mathbb{P}(\mathbb{k}^2)$  если и только если он делится в  $\mathbb{k}[x_0, x_1]$  на линейную форму  $\det(x, p)$ . В частности, ненулевой однородный многочлен степени  $n$  имеет не более  $n$  различных корней на  $\mathbb{P}_1$ . Если поле  $\mathbb{k}$  алгебраически замкнуто, то каждый однородный многочлен  $f \in \mathbb{k}[x_0, x_1]$  имеет на  $\mathbb{P}_1$  ровно  $\deg f$  корней с учётом их кратностей, и любые два многочлена с совпадающими наборами корней<sup>2</sup> пропорциональны.

<sup>1</sup>Аффинная кривая с таким уравнением называется *полукубической параболой*.

<sup>2</sup>Где каждый корень присутствует в наборе столько раз, какова его кратность.

Доказательство. Поскольку при линейных заменах координат в  $\mathbb{k}^2$  линейная форма  $\det(p, x)$  умножается на ненулевую константу<sup>1</sup> первое утверждение не зависит от выбора координат в  $\mathbb{k}^2$ . Выберем их так, чтобы  $p = (0, 1)$ . Пусть  $f(x_0, x_1) = a_0 x_0^n + a_1 x_0^{n-1} x_1 + \dots + a_{n-1} x_0 x_1^{n-1} + a_n x_1^n$ . Если  $f(0, 1) = a_n = 0$ , то  $f$  делится на  $x_0 = \det(x, p)$ , что и требуется. Второе утверждение вытекает из первого и однозначности разложения на неприводимые множители в кольце  $\mathbb{k}[x_0, x_1]$ , поскольку линейные формы  $\det(x, p_1)$  и  $\det(x, p_2)$  отличаются друг от друга постоянным множителем если и только если точки  $p_1, p_2 \in \mathbb{P}_1$  совпадают друг с другом. Для доказательства последних утверждений обозначим через  $m$  кратность, с которой  $f$  обращается в нуль в точке  $q = (1 : 0)$ . Тогда  $f(x_0, x_1) = x_1^m (a_0 x_0^{n-m} + a_1 x_0^{n-m-1} x_1 + \dots + a_{n-m} x_1^{n-m})$ , где  $a_0 \neq 0$ . Если поле  $\mathbb{k}$  алгебраически замкнуто, то многочлен  $f(x_0, 1)$  полностью раскладывается в  $\mathbb{k}[x_0]$  на линейные множители:  $a_0 x_0^{n-m} + a_1 x_0^{n-m-1} + \dots + a_{n-m} = a_0 (x_0 - \vartheta_1) \dots (x_0 - \vartheta_{n-m})$ . Тогда

$$a_0 x_0^{n-m} + a_1 x_0^{n-m-1} x_1 + \dots + a_{n-m} x_1^{n-m} = a_0 (x_0 - \vartheta_1 x_1) \dots (x_0 - \vartheta_{n-m} x_1)$$

и  $f = \det^m(x, q) \det(x, p_1) \dots \det(x, p_{n-m})$ , где  $q = (1 : 0)$  и  $p_i = (1 : \vartheta_i)$ .  $\square$

**17.5.1. Кривые Веронезе.** Неупорядоченный набор точек  $p_1, \dots, p_n$  на прямой  $\mathbb{P}_1 = \mathbb{P}(U)$  можно воспринимать как коммутативное произведение  $p_1 \dots p_n$ , т. е. как точку проективного пространства  $\mathbb{P}_n = \mathbb{P}(S^n U)$  однородных элементов степени  $n$  в симметрической алгебре  $SU$  двумерного векторного пространства  $U$ . Множество всех  $n$ -точечных конфигураций вида  $p^n$ , в которых все  $n$  точек совпадают друг с другом, представляет собою кривую в  $\mathbb{P}_n$  — образ прямой  $\mathbb{P}_1$  при отображении Веронезе

$$\nu_n : \mathbb{P}(U) \rightarrow \mathbb{P}(S^n U), \quad p \mapsto p^n. \quad (17-13)$$

Эта кривая называется *кривой Веронезе* или *рациональной нормальной кривой* степени  $n$  в  $\mathbb{P}_n$ . Если зафиксировать в  $U$  базис  $e_0, e_1$ , отображение (17-13) будет переводить линейный двучлен  $p = t_0 e_0 + t_1 e_1 \in \mathbb{k}[e_0, e_1]$  в однородный многочлен

$$(t_0 e_0 + t_1 e_1)^n = \sum_{i=0}^n t_0^{n-i} t_1^i \binom{n}{i} e_0^{n-i} e_1^i.$$

Если  $\text{char } \mathbb{k} > n$ , все одночлены  $\binom{n}{i} e_0^{n-i} e_1^i$  в правой части этой формулы отличны от нуля и образуют базис<sup>2</sup> в  $S^n U$ . В однородных координатах относительно этого базиса отображение Веронезе  $\nu_n : \mathbb{P}_1 \rightarrow \mathbb{P}_n$  действует по правилу

$$(t_0 : t_1) \mapsto (t_0^n : t_0^{n-1} t_1 : t_0^{n-2} t_1^2 : \dots : t_1^n). \quad (17-14)$$

Точки  $(1 : 0)$  и  $(0 : 1)$  переходят при этом в  $(1 : 0 : \dots : 0 : 0)$  и  $(0 : \dots : 0 : 1)$ , а когда обе координаты  $(t_0 : t_1)$  ненулевые, последовательность однородных координат в правой части (17-14) является ненулевой геометрической прогрессией со знаменателем  $q = t_1/t_0$ . Наоборот, каждая ненулевая геометрическая прогрессия  $(1 : q : q^2 : \dots : q^n)$  является образом

<sup>1</sup>А именно, на определитель матрицы перехода между координатами.

<sup>2</sup>Обратите внимание, что этого может не случиться при  $\text{char } \mathbb{k} < n$ . Например, если  $\text{char } \mathbb{k} = p$  и  $n = p^m q$ , то

$$(t_0 e_0 + t_1 e_1)^n = (t_0 e_0 + t_1 e_1)^q.$$

точки  $(1 : q)$  при отображении (17-14). Так как числа  $x_0, x_1, \dots, x_n$  образуют геометрическую прогрессию если и только если составленная из них матрица

$$X = \begin{pmatrix} x_0 & x_1 & x_2 & \dots & x_{d-2} & x_{d-1} \\ x_1 & x_2 & x_3 & \dots & x_{d-1} & x_n \end{pmatrix}$$

имеет пропорциональные строки, что равносильно равенству  $\text{rk } X = 1$ , мы заключаем, что образ отображения Веронезе задаётся в  $\mathbb{P}_n$  системой однородных квадратных уравнений

$$\det \begin{pmatrix} x_i & x_j \\ x_{i+1} & x_{j+1} \end{pmatrix} = x_i x_{j+1} - x_{i+1} x_j = 0, \quad \text{где } 0 \leq i < j \leq n. \quad (17-15)$$

Предложение 17.3

Если  $\text{char } \mathbb{k} > n$ , то при  $1 \leq k \leq n$  образы любых  $k + 1$  различных точек на  $\mathbb{P}_1$  при отображении Веронезе (17-14) не содержатся ни в каком  $(k - 1)$ -мерном проективном подпространстве. В частности, отображение Веронезе инъективно, и никакая гиперплоскость в  $\mathbb{P}_n$  не пересекает кривую Веронезе более, чем по  $n$  точкам.

Доказательство. Достаточно доказать первое утверждение для максимального  $k = n$ . Обозначим через  $(x_0 : x_1 : \dots : x_n)$  однородные координаты на  $P_n = \mathbb{P}(S^n U)$  в базисе из одночленов  $\binom{n}{i} e_0^{n-i} e_1^i$ , где  $e_0, e_1$  — базис в  $U$ . Если отображение (17-14) переводит точку  $p = (\alpha : \beta) \in \mathbb{P}_1$  внутрь гиперплоскости, заданной уравнением  $a_0 x_0 + a_1 x_1 + \dots + a_n x_n = 0$ , где  $a_i \in \mathbb{k}$ , то точка  $p$  является корнем однородного многочлена  $f(t_0, t_1) = a_0 t_0^n + a_1 t_0^{n-1} t_1 + \dots + a_n t_1^n$ , у которого не более  $n$  различных корней на  $\mathbb{P}_1$ . Поэтому образы  $n + 1$  различных точек не могут оказаться в одной гиперплоскости.  $\square$

Пример 17.10 (коника Веронезе)

Коника Веронезе  $C_2 \subset \mathbb{P}_2 = \mathbb{P}(S^2 U)$  состоит из всех таких однородных квадратичных многочленов  $x_0 e_0^2 + 2x_1 e_0 e_1 + x_2 e_1^2$  от базисных векторов  $e_0, e_1$  пространства  $U$ , которые являются полными квадратами линейных форм от  $e_0, e_1$ . Система (17-15) в этом случае состоит из одного уравнения

$$D/4 = -\det \begin{pmatrix} x_0 & x_1 \\ x_1 & x_2 \end{pmatrix} = x_1^2 - x_0 x_2 = 0, \quad (17-16)$$

задающего гладкую конику, а отображение Веронезе (17-14) задаёт эту же конику параметрическими уравнениями  $x_0 = t_0^2, x_1 = t_0 t_1, x_2 = t_1^2$ , где  $t = (t_0 : t_1)$  пробегает  $\mathbb{P}_1$ , что согласуется с форм. (н° 17.3.2) на стр. 210.

Поскольку любую непустую гладкую конику можно в подходящих однородных координатах записать уравнением  $x_1^2 = x_0 x_2$ , проективную плоскость с заданной ей непустой гладкой коникой всегда можно отождествить с  $\mathbb{P}(S^2 U)$  так, чтобы коника стала коникой Веронезе. При фиксированной точке  $p \in \mathbb{P}_1 = \mathbb{P}(U)$  множество всех пар  $pt$ , где  $t = \lambda_0 e_0 + \lambda_1 e_1$  пробегает  $\mathbb{P}_1$ , изображается на плоскости  $\mathbb{P}_2 = \mathbb{P}(S^2 V)$  прямой, проходящей через точки  $ae_0$  и  $ae_1$ . Такая прямая касается коники Веронезе  $C_2 \subset \mathbb{P}(S^2 U)$  в точке  $p^2 \in C_2$ . Мы заключаем, что касательные прямые  $T_{a^2} C_2$  и  $T_{b^2} C_2$ , проведённые в произвольных двух точках  $a^2, b^2 \in C_2$ , пересекаются в точке  $ab$ . Таким образом, из каждой точки вида  $ab \in \mathbb{P}(S^2 U)$  на конику Веронезе можно опустить ровно две касательные. Они состоят из точек  $at$  и  $bt$ , где  $t$  пробегает  $\mathbb{P}_1$ , и касаются коники Веронезе в точках  $a^2$  и  $b^2$  соответственно. Если поле  $\mathbb{k}$  алгебраически замкнуто, каждая точка плоскости  $\mathbb{P}(S^2 U)$  имеет вид  $ab$ , поскольку каждый однородный многочлен от  $e_0, e_1$



полностью разлагается на линейные множители. Если же поле  $\mathbb{k}$  не является алгебраически замкнутым, то на плоскости  $\mathbb{P}(S^2V)$  могут быть точки, не представимые в виде  $ab$ , и ни из какой такой точки нельзя опустить касательную на конику Веронезе.

**17.6. Пространства гиперповерхностей.** Так как пропорциональные многочлены задают одну и ту же гиперповерхность, каждая проективная гиперповерхность  $V(f) \subset \mathbb{P}(V)$  может рассматриваться как точка проективного пространства  $\mathbb{P}(S^dV^*)$ , которое называется *пространством гиперповерхностей*. Согласно [упр. 17.12](#) на стр. 212

$$\dim \mathbb{P}(S^dV^*) = \binom{n+d}{d} - 1. \quad (17-17)$$

Например, пространство квадрик  $\mathbb{P}(S^2V^*)$  на  $\mathbb{P}_n = \mathbb{P}(V)$  имеет размерность

$$\frac{(n+2)(n+1)}{2} - 1 = \frac{n(n+3)}{2}.$$

Проективные подпространства положительной размерности в пространстве гиперповерхностей называются *линейными системами* гиперповерхностей. Например, все гиперповерхности степени  $d$ , проходящие через заданную точку  $p \in \mathbb{P}(V)$ , образуют в  $\mathbb{P}(S^dV^*)$  проективную гиперплоскость<sup>1</sup>, задаваемую линейным по  $f \in S^dV^*$  уравнением  $f(p) = 0$ . Поскольку любая линейная система имеет непустое пересечение с любой гиперплоскостью в пространстве гиперповерхностей, в каждой линейной системе имеется гиперповерхность, проходящая через любую наперёд заданную точку.

Каждая гиперповерхность из линейной системы, порождённой гиперповерхностями

$$V(f_1), \dots, V(f_m),$$

задаётся уравнением вида  $\lambda_1 f_1 + \dots + \lambda_m f_m = 0$ , где  $\lambda_1, \dots, \lambda_m \in \mathbb{k}$  — некоторые константы, и автоматически содержит пересечение  $V(f_1) \cap \dots \cap V(f_m)$ , которое называется *базисным множеством* линейной системы. Таким образом, базисное множество является пересечением всех гиперповерхностей линейной системы, и любой порождающий эту систему набор гиперповерхностей пересекается в точности по базисному множеству.

По старинной традиции, одномерные, двумерные и трёхмерные линейные системы принято называть *пучками*, *связками* и *сетями* соответственно. Например, все прямые, проходящие через заданную точку  $p \in \mathbb{P}_2$ , образуют пучок, ибо составляют прямую<sup>2</sup>  $p^\times \subset \mathbb{P}_2^\times$ . Точно также все двумерные плоскости, проходящие через заданную прямую  $\ell \subset \mathbb{P}_3$ , составляют прямую  $\ell^\times \subset \mathbb{P}_3^\times$  и, стало быть, тоже образуют пучок.

**Предложение 17.4**

Через любые пять точек на  $\mathbb{P}_2$  можно провести конику. Если никакие четыре из пяти точек не коллинеарны, то такая коника единственна, а если никакие три не коллинеарны, то она вдобавок ещё и гладкая.

**Доказательство.** Коника на  $\mathbb{P}_2 = \mathbb{P}(V)$  являются точками пространства  $\mathbb{P}_5 = \mathbb{P}(S^2V^*)$ . Поскольку любые пять гиперплоскостей в  $\mathbb{P}_5$  имеют непустое пересечение, через любые пять точек в  $\mathbb{P}_2$  проходит хотя бы одна коника.

<sup>1</sup>Т. е. линейную систему коразмерности 1.

<sup>2</sup>См. [п. 17.2.2](#) на стр. 207.

Если какие-то три из пяти точек коллинеарны, то проходящая через них прямая целиком содержится в конике в силу [сл. 17.1](#) на [стр. 209](#). Согласно классификации из [п° 17.3.2](#) на [стр. 210](#) такая коника является двойной прямой или распадается. В первом случае все пять точек должны быть коллинеарны. Поэтому когда никакие четыре из пяти точек не коллинеарны, коника распадается, причём её вторая прямолинейная компонента однозначно задаётся тем, что проходит через оставшиеся две точки.

Если никакие три из пяти точек не коллинеарны, то согласно классификации из [п° 17.3.2](#) на [стр. 210](#) каждая проходящая через эти пять точек коника является гладкой. Единственность такой коники вытекает из следующего далее [предл. 17.5](#).  $\square$

**Предложение 17.5**

Гладкая коника и произвольная кривая степени  $d$  на  $\mathbb{P}_2$  либо пересекаются не более, чем по  $2d$  точкам, либо коника целиком содержится в кривой.

**Доказательство.** Каждая непустая гладкая коника на  $\mathbb{P}_2$  является образом инъективного отображения  $q : \mathbb{P}_1 \hookrightarrow \mathbb{P}_2$ , которое в подходящих однородных координатах задаётся правилом

$$q : (t_0 : t_1) \mapsto (t_0^2 : t_0 t_1 : t_1^2). \quad (17-18)$$

Если точка  $(\alpha : \beta) \in \mathbb{P}_1$  переводится этим отображением в точку, лежащую на кривой, заданной однородным уравнением  $f(x_0, x_1, x_2) = 0$  степени  $d$ , то эта точка является корнем однородного многочлена  $f(t_0^2, t_0 t_1, t_1^2)$  степени  $2d$ . Если этот многочлен тождественно нулевой, то образ отображения [\(17-18\)](#) целиком содержится в кривой. Если он ненулевой, то у него не более  $2d$  различных корней.  $\square$

## §18. Проективные преобразования

**18.1. Линейные проективные изоморфизмы.** Всякий линейный изоморфизм векторных пространств  $F : U \simeq W$  задаёт биекцию  $\bar{F} : \mathbb{P}(U) \simeq \mathbb{P}(W)$  между одномерными подпространствами в  $U$  и  $W$ , которая называется *линейным проективным преобразованием* или *проективным изоморфизмом*.

Пример 18.1 (перспектива между гиперплоскостями)

Покажем, что для любой пары проективных гиперплоскостей  $L_1, L_2 \subset \mathbb{P}_n = \mathbb{P}(V)$  и произвольной точки  $p \notin L_1 \cup L_2$  центральная проекция гиперплоскости  $L_1$  из точки  $p$  на гиперплоскость  $L_2$  задаёт проективный изоморфизм между  $L_1$  и  $L_2$ , который мы будем обозначать  $p : L_1 \simeq L_2$  и называть *перспективой* с центром в  $p$ . Пусть  $L_1 = \mathbb{P}(U)$ ,  $L_2 = \mathbb{P}(W)$  и  $p = \mathbb{P}(\mathbb{k} \cdot e)$ . Тогда  $V = W \oplus \mathbb{k} \cdot e$ , ибо  $p \notin L_2$ , и центральная проекция из  $p$  задаётся ограничением линейной проекции  $V \rightarrow W$  вдоль одномерного подпространства  $\mathbb{k} \cdot e$  на подпространство  $U \subset V$ . Так как  $p \notin L_1$ , подпространство  $U$  имеет нулевое пересечение с ядром проекции и, стало быть, проектируется на  $W$  изоморфно.

ТЕОРЕМА 18.1

Для любых двух векторных пространств  $U, W$  одинаковой размерности  $\dim U = \dim W = n + 1$  и упорядоченных наборов из  $n + 2$  точек  $p_0, p_1, \dots, p_{n+1} \in \mathbb{P}(U)$ ,  $q_0, q_1, \dots, q_{n+1} \in \mathbb{P}(W)$ , в каждом из которых никакие  $n + 1$  точек не лежат в одной гиперплоскости, существует единственный с точностью до пропорциональности линейный изоморфизм  $F : U \simeq W$ , такой что  $\bar{F}(p_i) = q_i$  при всех  $i$ .

Доказательство. Зафиксируем какие-нибудь ненулевые векторы  $u_i$  и  $w_i$ , представляющие точки  $p_i$  и  $q_i$ , и возьмём наборы векторов  $\mathbf{u} = (u_0, u_1, \dots, u_n)$  и  $\mathbf{w} = (w_0, w_1, \dots, w_n)$  в качестве базисов векторных пространств  $U$  и  $W$ . В силу наложенных на точки условий все коэффициенты в разложениях  $u_{n+1} = \alpha_0 u_0 + \alpha_1 u_1 + \dots + \alpha_n u_n$  и  $w_{n+1} = \beta_0 w_0 + \beta_1 w_1 + \dots + \beta_n w_n$  векторов  $u_{n+1}$  и  $w_{n+1}$  по этим базисам отличны от нуля, так как, к примеру, при  $\alpha_i = 0$  точка  $p_{n+1}$  оказывается в одной гиперплоскости  $x_i = 0$  с  $n$  базисными точками  $p_\nu$ , где  $\nu \neq i$ . Отображение  $\bar{F} : \mathbb{P}(U) \rightarrow \mathbb{P}(W)$  переводит  $p_i$  в  $q_i$  если и только если  $F(u_i) = \lambda_i w_i$  для некоторых ненулевых  $\lambda_i \in \mathbb{k}$ . Поэтому матрица  $F_{\mathbf{w}\mathbf{u}}$  оператора  $F$  в базисах  $\mathbf{u}$  и  $\mathbf{w}$  диагональна с ненулевыми элементами  $\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_n$  на диагонали, причём каждый диагональный элемент удовлетворяет равенству  $\lambda_i \alpha_i = \lambda_{n+1} \beta_i$ , выражающему равенство  $i$ -х координат векторов  $F(u_{n+1}) = \lambda_{n+1} w_{n+1}$ . Таким образом, набор диагональных элементов  $\lambda_i = \lambda_{n+1} \alpha_i / \beta_i$  матрицы оператора  $F$  определяется однозначно с точностью до умножения на произвольную ненулевую константу  $\lambda_{n+1}$ .  $\square$

Следствие 18.1

Два линейных изоморфизма тогда и только тогда задают равные проективные изоморфизмы, когда они пропорциональны.  $\square$

Пример 18.2 (четырёхвершинник и эпиморфизм  $S_4 \rightarrow S_3$ )

Любые четыре точки  $a, b, c, d \in \mathbb{P}_2$ , никакие три из которых не коллинеарны, задают конфигурацию из трёх пар прямых, соединяющих пары точек для каждого из трёх различных способов разбить эти точки на две пары, см. рис. 18◊1. Эта конфигурация называется *четырёхвершинником  $abcd$* , а каждая из трёх пар прямых — парой его *противоположных сторон*. Точки пересечений пар противоположных сторон  $z = (ab) \cap (cd)$ ,  $y = (ac) \cap (bd)$ ,  $x = (ad) \cap (bc)$

и проходящие через них три прямые называют *ассоциированным треугольником*  $xuz$  четырёхвершинника  $abcd$ . Согласно теор. 18.1, каждая перестановка точек  $a, b, c, d$  однозначно задаёт проективное преобразование  $\mathbb{P}_2 \xrightarrow{\sim} \mathbb{P}_2$ , переводящее четырёхвершинник  $abcd$  в себя, а значит, как-то переставляющее вершины  $x, y, z$  ассоциированного с ним треугольника. Таким образом возникает гомоморфизм групп  $\pi : S_4 \rightarrow S_3$ . Поскольку транспозиции  $(ab)$  и  $(bc)$  переходят при этом в транспозиции  $(xy)$  и  $(yz)$ , гомоморфизм  $\pi$  биективно отображает подгруппу  $S_3 \subset S_4$ , образованную всеми оставляющими на месте вершину  $d$  перестановками вершин  $a, b, c$ , на группу перестановок вершин  $x, y, z$ , переводя каждую перестановку вершин  $a, b, c$  в точно такую же перестановку вершин  $x, y, z$ . Ядро  $\ker \pi$  состоит из тождественной перестановки и трёх пар независимых транспозиций  $(b, a, d, c), (c, d, a, b), (d, c, b, a)$ . Эта подгруппа называется *четвертной группой Клейна* или *группой двуугольника* и обозначается, соответственно, через  $V_4$  или  $D_2$ .

УПРАЖНЕНИЕ 18.1. Убедитесь, что  $V_4 \simeq \mathbb{Z}/(2) \times \mathbb{Z}/(2)$ , а  $S_4 \simeq V_4 \rtimes S_3$  является полупрямым нормальным подгруппы  $V_4 \triangleleft S_4$  и дополнительной подгруппы  $S_3 = \text{Stab}(d) \subset S_4$ .

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 18.1 (линейные проективные группы)

Согласно теор. 18.1 линейные проективные автоморфизмы пространства  $\mathbb{P}(V)$  образуют группу, изоморфную фактор группе полной линейной группы  $GL(V)$  по подгруппе скалярных гомотетий  $H = \{\lambda \cdot \text{Id} \mid \lambda \neq 0\} \subset GL(V)$ . Эта фактор группа обозначается  $PGL(V) = GL(V)/H$  и называется *линейной проективной группой* пространства  $V$ . Если при помощи выбора базиса отождествить линейную группу  $GL(V)$  с группой невырожденных матриц  $GL_{n+1}$ , проективная группа  $PGL(V)$  отождествится с группой  $PGL_{n+1}$  невырожденных матриц, рассматриваемых с точностью до пропорциональности.

ПРИМЕР 18.3 (дробно линейные преобразования прямой)

Группа  $PGL_2(\mathbb{k})$  состоит из классов пропорциональности невырожденных матриц  $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ . Такая матрица действует на  $\mathbb{P}_1$  по правилу

$$(x_0 : x_1) \mapsto ((ax_0 + bx_1) : (cx_0 + dx_1)).$$

В стандартной аффинной карте  $U_1 \simeq \mathbb{A}^1$  с аффинной координатой  $t = x_0/x_1$ , это действие имеет вид дробно линейного преобразования  $t \mapsto (at + b)/(ct + d)$ . Единственное дробно линейное преобразование, переводящее три различные точки  $a, b, c$  в точки  $\infty, 0, 1$  имеет вид

$$t \mapsto \frac{t-b}{t-a} \cdot \frac{c-a}{c-b}. \quad (18-1)$$

Образ точки  $d \in \mathbb{P}_1$  при таком преобразовании называется *двойным отношением* упорядоченной четвёрки точек  $a, b, c, d$  и обозначается

$$[a, b, c, d] \stackrel{\text{def}}{=} \frac{(a-c)(b-d)}{(a-d)(b-c)}.$$

ТЕОРЕМА 18.2

Над алгебраически замкнутым полем  $\mathbb{k}$  характеристики нуль всякое биективное отображение

$$\varphi : \mathbb{P}_1 \setminus \{\text{конечное множество}\} \xrightarrow{\sim} \mathbb{P}_1 \setminus \{\text{конечное множество}\},$$

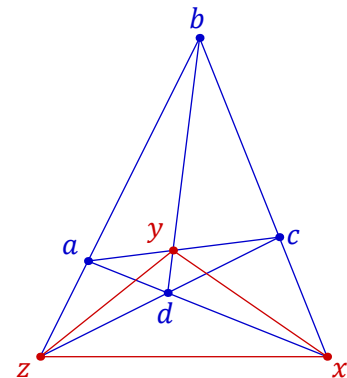


Рис. 18.1. Четырёхвершинник.

которое может быть задано в некоторой аффинной карте с координатой  $t$  формулой

$$\varphi(t) = g(t)/h(t), \quad \text{где } g, h \in \mathbb{k}[t], \quad (18-2)$$

является ограничением некоторого линейного проективного изоморфизма  $\mathbb{P}_1 \xrightarrow{\sim} \mathbb{P}_1$ .

Доказательство. Переходя к однородным координатам  $(x_0 : x_1)$ , для которых  $t = x_0/x_1$ , и меняя при необходимости конечное множество точек неопределённости отображения  $\varphi$ , перепишем формулу (18-2) в виде  $\varphi : (x_0 : x_1) \mapsto (f(x_0, x_1) : g(x_0, x_1))$ , где  $f$  и  $g$  — взаимно простые однородные многочлены от  $(x_0, x_1)$  одинаковой степени  $\deg f = \deg g = d$ . Точка  $\vartheta = (\vartheta_0 : \vartheta_1) \in \mathbb{P}_1$  имеет при отображении  $\varphi$  ровно один прообраз если и только если однородный многочлен  $\vartheta_1 \cdot f(x_0, x_1) - \vartheta_0 \cdot g(x_0, x_1)$  имеет на  $\mathbb{P}_1$  ровно один корень  $\zeta = \varphi^{-1}(\vartheta)$ . Над алгебраически замкнутым полем такое возможно, только если этот корень  $d$ -кратный, т. е.

$$\vartheta_1 \cdot f(x) - \vartheta_0 \cdot g(x) = \det^d(x, \zeta).$$

Поскольку алгебраически замкнутое поле  $\mathbb{k}$  бесконечно, а отображение  $\varphi$  биективно вне конечного множества точек, прямая  $(fg)$  в пространстве  $\mathbb{P}_d$  однородных многочленов степени  $d$  от  $(x_0, x_1)$  имеет бесконечно много точек пересечения с кривой Веронезе<sup>1</sup>  $C_d \subset \mathbb{P}_d$ , состоящей из  $d$ -тых степеней линейных двучленов. Поскольку при  $d \geq 2$  никакие три точки кривой  $C_d$  не лежат на одной прямой<sup>2</sup>, мы заключаем, что  $d = 1$  и  $\varphi \in \text{PGL}_2(\mathbb{k})$ .  $\square$

**18.2. Гомографии.** Линейные проективные изоморфизмы между проективными прямыми называются *гомографиями*.

УПРАЖНЕНИЕ 18.2. Пусть точка  $p \in \mathbb{P}_2$  не лежит на прямой  $L \subset \mathbb{P}_2$ . Покажите, что отображение<sup>3</sup>  $p^\times \xrightarrow{\sim} L, \ell \mapsto \ell \cap L$ , является гомографией между прямыми  $p^\times \subset \mathbb{P}_2^\times$  и  $L \subset \mathbb{P}_2$ .

Следующим простейшим примером гомографии является перспектива<sup>4</sup>  $o : \ell_1 \xrightarrow{\sim} \ell_2$  между прямыми  $\ell_1, \ell_2 \subset \mathbb{P}_2$ , задаваемая проекцией из какой-нибудь точки  $o \notin \ell_1 \cup \ell_2$ , как на рис. 18◊2. Отметим, что перспектива является композицией гомографий  $\ell_1 \xrightarrow{\sim} o^\times \xrightarrow{\sim} \ell_2$  из упр. 18.2.

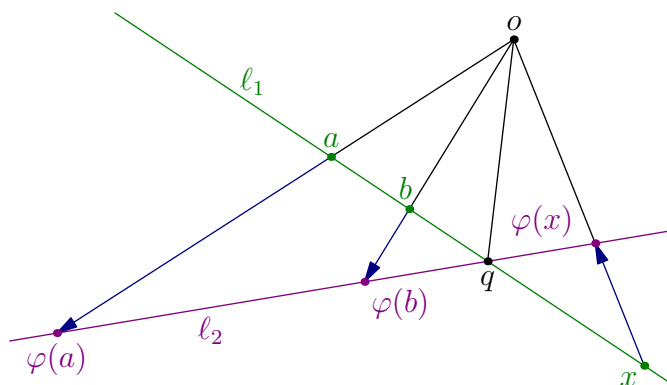


Рис. 18◊2. Перспектива.

<sup>1</sup>См. н° 17.5.1 на стр. 215.

<sup>2</sup>См. предл. 17.3 на стр. 216.

<sup>3</sup>Прямая  $p^\times \subset \mathbb{P}_2^\times$  состоит из всех проходящих через  $p$  прямых на  $\mathbb{P}_2$ , см. н° 17.2.2 на стр. 207.

<sup>4</sup>См. прим. 18.1 на стр. 219.

Согласно теор. 18.1, каждая гомография однозначно определяется своим действием на три различные точки.

Лемма 18.1

Гомография  $\varphi : \ell_1 \xrightarrow{\sim} \ell_2$  между прямыми  $\ell_1, \ell_2 \subset \mathbb{P}_2$  является перспективой если и только если она переводит точку пересечения прямых  $\ell_1 \cap \ell_2$  в себя.

Доказательство. Обозначая через  $o$  точку пересечения прямых  $(a, \varphi(a))$  и  $(b, \varphi(b))$ , соединяющих произвольные точки  $a, b \in \ell_1 \setminus \ell_2$  с их образами  $\varphi(a), \varphi(b)$ , как на рис. 18◊2, видим, что перспектива  $o : \ell_1 \xrightarrow{\sim} \ell_2$  действует на три точки  $a, b$  и  $\ell_1 \cap \ell_2$  так же, как и  $\varphi$ .  $\square$

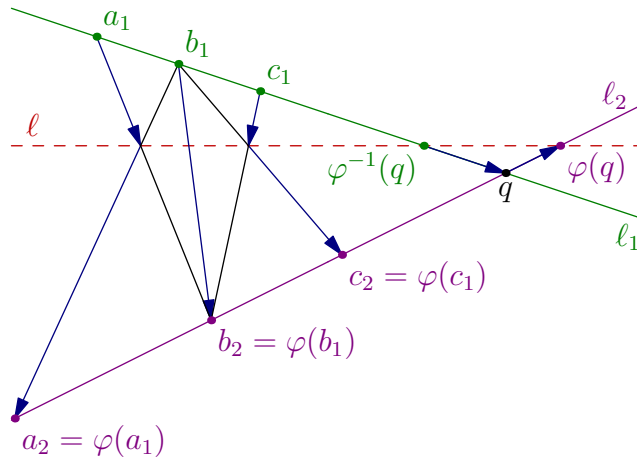


Рис. 18◊3. Перекрёстная ось.

Предложение 18.1 (перекрёстная ось гомографии)

Каждая гомография  $\varphi : \ell_1 \xrightarrow{\sim} \ell_2$  между прямыми  $\ell_1, \ell_2 \subset \mathbb{P}_2$  раскладывается в композицию  $\varphi = b_1 \circ b_2$  двух перспектив  $b_2 : \ell_1 \rightarrow \ell$  и  $b_1 : \ell \rightarrow \ell_2$  с центрами в точках  $b_1 \in \ell_1, b_2 \in \ell_2$ , см. рис. 18◊3. При этом точку  $b_1 \in \ell_1 \setminus \ell_2$  можно выбрать любой отличной от  $\varphi^{-1}(\ell_1 \cap \ell_2)$ , точка  $b_2 = \varphi(b_1)$ , а прямая  $\ell$  не зависит от выбора  $b_1$ , проходит через точки  $\varphi(\ell_1 \cap \ell_2)$  и  $\varphi^{-1}(\ell_1 \cap \ell_2)$  и представляет собою ГМТ пересечения «перекрёстных прямых»  $(x, \varphi(y)) \cap (y, \varphi(x))$ , где  $x \neq y$  независимо пробегает  $\ell_1$ . Более того, любое разложение гомографии  $\varphi$  в композицию  $b_1 \circ b_2$  перспектив с центрами  $b_1 \in \ell_1, b_2 \in \ell_2$  имеет именно такой вид.

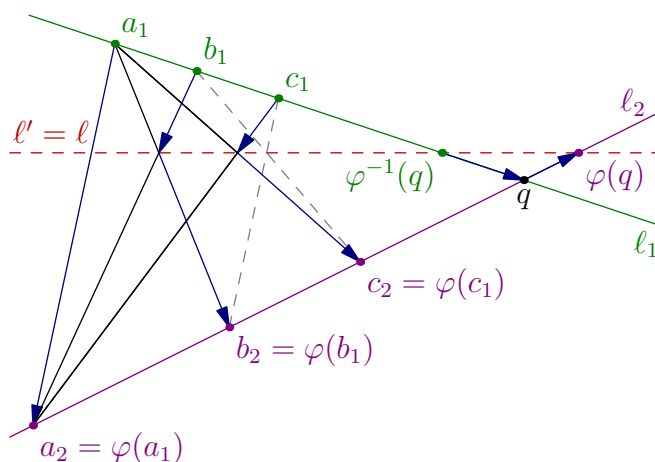


Рис. 18◊4. Равенство  $\ell' = \ell$ .

Доказательство. Рассмотрим какие-нибудь три различные точки  $a_1, b_1, c_1 \in \ell_1$ , отличные от точки  $q = \ell_1 \cap \ell_2$ , и обозначим через  $a_2, b_2, c_2 \in \ell_2$  их образы, а через  $\ell$  — прямую, проходящую через точки  $(a_1 b_2) \cap (b_1, a_2)$  и  $(c_1 b_2) \cap (b_1, c_2)$ . Так как композиция перспектив  $b_1 \circ b_2$  переводит точки  $a_1, b_1, c_1$  в  $a_2, b_2, c_2$ , она совпадает с  $\varphi$ , см. рис. 18◊3. Мы заключаем, что прямая  $\ell$  проходит через точки<sup>1</sup>  $\varphi(q)$ ,  $\varphi^{-1}(q)$  и представляет собою ГМТ пересечения прямых  $(b_1 \varphi(x)) \cap (x \varphi(b_1))$ , где  $x \in \ell_1 \setminus b_1$ . Повторяя это же рассуждение для тройки  $c_1, a_1, b_1$  вместо тройки  $a_1, b_1, c_1$ , как на рис. 18◊4, получим разложение  $\varphi = a_1 \circ a_2$  в композицию перспектив  $a_2: \ell' \rightarrow \ell$  и  $a_1: \ell' \rightarrow \ell_2$ , в котором прямая  $\ell'$  тоже проходит через точки  $\varphi(q)$ ,  $\varphi^{-1}(q)$ , но является ГМТ пересечения прямых  $(a_1 \varphi(y)) \cap (y \varphi(a_1))$ , где  $y \in \ell_1 \setminus a_1$ . Поскольку обе прямые  $\ell$  и  $\ell'$  проходят через (возможно совпадающие) точки  $\varphi(q)$ ,  $\varphi^{-1}(q)$ , а также отличную от них точку  $(b_1 a_2) \cap (a_1 b_2)$ , эти прямые совпадают. Так как точки  $a_1$  и  $b_1$  выбирались произвольно, мы заключаем, что все разложения  $\varphi = (x: \ell \rightarrow \ell_2) \circ (\varphi(x): \ell_1 \rightarrow \ell)$  имеют одну и ту же прямую  $\ell$ , являющуюся ГМТ пересечения прямых  $(x, \varphi(y)) \cap (y, \varphi(x))$ , где  $x \neq y$  независимо пробегает  $\ell_1$ . Последнее утверждение предложения очевидно, поскольку в любом разложении  $\varphi = b_1 \circ b_2$  с  $b_1 \in \ell_1, b_2 \in \ell_2$  точка  $b_2 = \varphi(b_1)$ .  $\square$

УПРАЖНЕНИЕ 18.3. Для заданной пары прямых  $\ell_1, \ell_2 \subset \mathbb{P}_2$  и гомографии  $\varphi: \ell_1 \xrightarrow{\cong} \ell_2$ , переводящей заданные три точки  $a_1, b_1, c_1 \in \ell_1$  в заданные три точки  $a_2, b_2, c_2 \in \ell_2$ , одной линейкой постройте образ  $\varphi(x)$  данной точки  $x \in \ell_1$ .

ЛЕММА 18.2

Для любых двух различных прямых  $\ell_1, \ell_2$  на  $\mathbb{P}_2$ , гладкой коники  $C \subset \mathbb{P}_2$  и точек  $p_1 \in C \setminus \ell_1$ ,  $p_2 \in C \setminus \ell_2$  отображение  $C_{p_2 p_1}: \ell_1 \rightarrow \ell_2$ , задаваемое композицией центральной проекции  $p_1: \ell_1 \xrightarrow{\cong} C$  прямой  $\ell_1$  на конику  $C$  из точки  $p_1$  и центральной проекции  $p_2: C \xrightarrow{\cong} \ell_2$  коники  $C$  на прямую  $\ell_2$  из точки  $p_2$ , является гомографией (см. рис. 18◊5).

Доказательство. Обе проекции  $p_1: \ell_1 \xrightarrow{\cong} C$  и  $p_2: C \xrightarrow{\cong} \ell_2$  биективны и задаются в однородных координатах на плоскости квадратичными многочленами<sup>2</sup>. Их композиция тоже биективна и задаётся многочленами. Согласно теор. 18.2 на стр. 220 она является гомографией.  $\square$

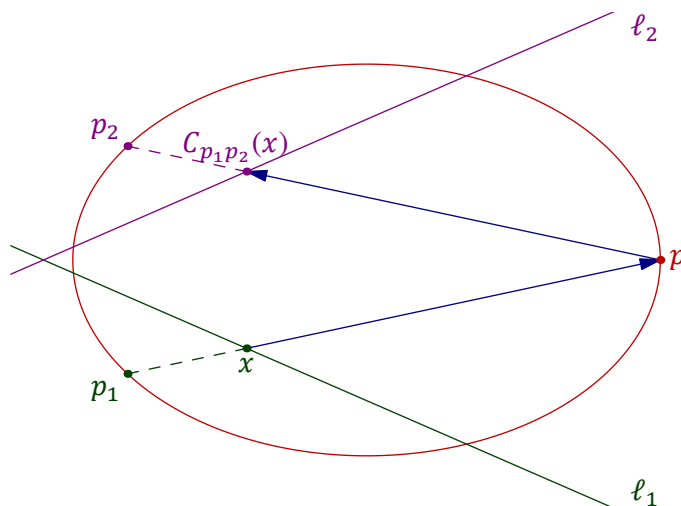


Рис. 18◊5. Гомография  $C_{p_2 p_1}: \ell_1 \rightarrow \ell_2$ .

<sup>1</sup>Которые могут совпадать, если гомография  $\varphi$  перспектива.

<sup>2</sup>См. формулу (17-10) на стр. 211.

**18.2.1. Трассировка коники линейкой.** Через любые пять точек  $p_1, p_2, q_1, q_2, q_3$ , никакие три из которых не коллинеарны, проходит единственная гладкая коника<sup>1</sup>  $C$ . Точки этой коники эффективно строятся одной линейкой. Для этого проведём прямые  $\ell_1 = (q_1q_3)$ ,  $\ell_2 = (q_2q_3)$  и отметим какую-нибудь точку  $c \notin \ell_1 \cup \ell_2$ , см. рис. 18◊6. Перспектива  $c : \ell_1 \simeq \ell_2$  действует на точки  $q_3, q_1$  и  $r = \ell_1 \cap (p_1q_2)$  прямой  $\ell_1$  точно также, как гомография  $C_{p_2p_1}$  из лем. 18.2. Поэтому каждая проходящая через точку  $c$  прямая  $\ell$  пересекает прямые  $\ell_1$  и  $\ell_2$  в таких точках  $t_1$  и  $t_2$ , что точка  $x(\ell) = (p_1t_1) \cap (p_2t_2)$  лежит на конике  $C$ .

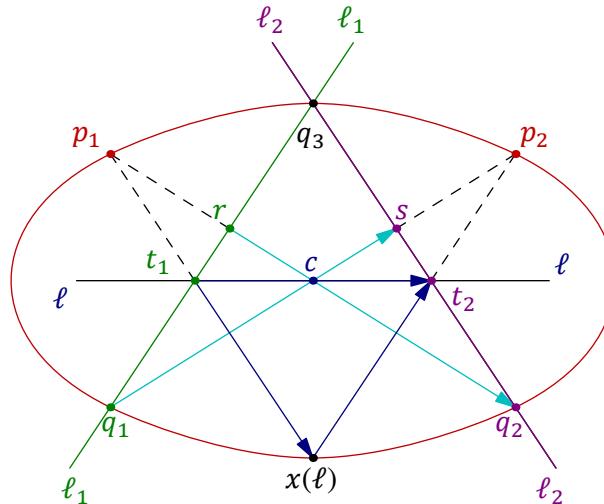


Рис. 18◊6. Трассировка коники линейкой.

Когда  $\ell$  пробежит пучок прямых с центром в  $c$ , точка  $x(\ell)$  нарисует конику  $C$ . Это наблюдение можно переформулировать следующим образом.

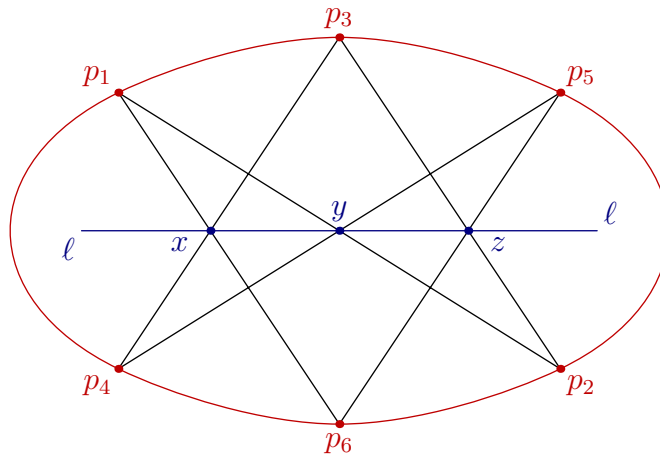


Рис. 18◊7. Гексограмма Паскаля.

**ТЕОРЕМА 18.3 (ТЕОРЕМА ПАСКАЛЯ)**

Точки  $p_1, \dots, p_6$ , никакие три из которых не коллинеарны, лежат на одной гладкой конике если и только если у «шестиугольника»  $p_1, \dots, p_6$  три точки  $x = (p_3p_4) \cap (p_6p_1)$ ,  $y = (p_1p_2) \cap (p_4p_5)$ ,  $z = (p_2p_3) \cap (p_5p_6)$  пересечений пар «противоположных сторон» коллинеарны, см. рис. 18◊7.

<sup>1</sup>См. предл. 17.4 на стр. 217.



Доказательство. Рассмотрим гладкую конику  $C$ , проходящую через первые пять заданных точек  $p_1, \dots, p_5$  и отождествим рис. 18◊7 с рис. 18◊6, полагая  $\ell_1 = (p_3p_4)$  и  $\ell_2 = (p_3p_2)$ . Если точки  $x, y, z$  коллинеарны, то  $z$  является образом  $x$  при перспективе  $y : (p_3p_4) \rightarrow (p_3p_2)$ , которая совпадает с гомографией  $C_{p_5p_1} = (p_5 : C \simeq (p_3p_2)) \circ (p_1 : (p_3p_4) \simeq C)$ . Поэтому  $p_6 = (p_5z) \cap (p_3x) \in C$ . Наоборот, если  $p_6 \in C$  и  $z = (p_3p_2) \cap (p_5p_6)$ , то  $z$  является образом  $x$  при гомографии  $C_{p_5p_1}$ , а значит, и при перспективе с центром в  $y$ , откуда  $z \in (xy)$ .  $\square$

**18.2.2. Гомографии между пучками прямых.** Пусть прямые  $\ell_1, \ell_2$  лежат на двойственной плоскости<sup>1</sup>  $\mathbb{P}_2^\times$ , т. е. представляют собою пучки прямых  $\ell_1 = p_1^\times, \ell_2 = p_2^\times$  с центрами в различных точках  $p_1, p_2 \in \mathbb{P}_2$ . Тогда лем. 18.1 и предл. 18.1 переформулируются в терминах исходной плоскости  $\mathbb{P}_2$  следующим образом.

Следствие 18.2

Пусть прямые  $\ell_1 \neq \ell_2$  независимо пробегают пучок прямых  $p_1^\times$  с центром в точке  $p_1 \in \mathbb{P}_2$ . Тогда для любой точки  $p_2 \neq p_1$  и любой гомографии  $\varphi : p_1^\times \simeq p_2^\times$  все прямые, соединяющие пары точек вида  $\ell_1 \cap \varphi(\ell_2)$  и  $\ell_2 \cap \varphi(\ell_1)$  пересекаются в одной точке, которая называется *перекрёстным центром* гомографии  $\varphi$  и лежит на прямых  $\varphi(p_1p_2)$  и  $\varphi^{-1}(p_1p_2)$ , совпадающих если и только если гомография  $\varphi$  является перспективой, и в этом случае  $\varphi(p_1p_2) = \varphi^{-1}(p_1p_2) = (p_1p_2)$ .  $\square$

Упражнение 18.4. Пусть гомография  $\varphi : p_1^\times \simeq p_2^\times$  переводит заданные три различные прямые  $\ell'_1, \ell'_2, \ell'_3 \ni p_1$  в заданные прямые  $\ell''_1, \ell''_2, \ell''_3 \ni p_2$ . Одной линейкой постройте образ  $\varphi(\ell)$  произвольной прямой  $\ell \ni p_1$ .

Предложение 18.2

Пусть гомография  $\varphi : p_1^\times \simeq p_2^\times$  переводит три различные прямые  $\ell'_1, \ell'_2, \ell'_3 \ni p_1$ , отличные от прямой  $(p_1p_2)$ , в прямые  $\ell''_1, \ell''_2, \ell''_3 \ni p_2$ , и пусть  $q_i = \ell'_i \cap \ell''_i$ , где  $i = 1, 2, 3$ . Тогда ГМТ пересечения соответственных прямых  $\ell \cap \varphi(\ell)$  представляет собою единственную конику, проходящую через пять точек  $p_1, p_2, q_1, q_2, q_3$ . Эта коника распадается если и только если гомография  $\varphi$  является перспективой<sup>2</sup>, а для неперспективной гомографии она гладкая:

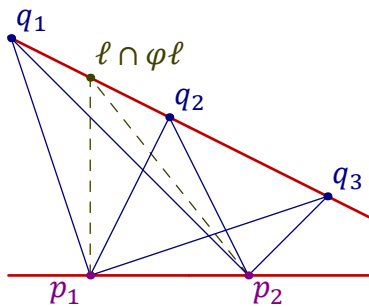


Рис. 18◊8. Перспектива  $\varphi : p_1^\times \rightarrow p_2^\times$ .

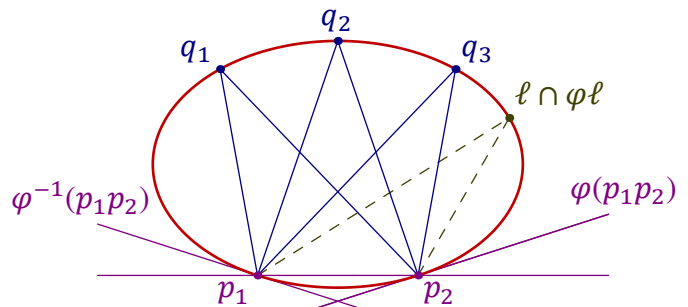


Рис. 18◊9. Неперспективная гомография  $\varphi : p_1^\times \rightarrow p_2^\times$ .

Наоборот, каждая гладкая коника  $C$ , содержащая точки  $p_1, p_2$  (соотв. каждая прямая  $L$ , не проходящая через  $p_1$  и  $p_2$ ) задаёт гомографию  $C : p_1^\times \rightarrow p_2^\times$  (соотв.  $L : p_1^\times \rightarrow p_2^\times$ ), которая переводит прямую  $\ell \ni p_1$  в прямую, соединяющую точку  $p_2$  с точкой  $\ell \cap C$  (соотв.  $\ell \cap L$ ). Гомография

<sup>1</sup>См. н° 17.2.2 на стр. 207.

<sup>2</sup>Что равносильно тому, что гомография  $\varphi$  переводит прямую  $(p_1p_2) = p_1^\times \cap p_2^\times$  в себя.

$L: p_1^\times \rightarrow p_2^\times$  переводит прямую  $(p_1 p_2) = p_1^\times \cap p_2^\times$  в себя и является перспективой. Образом и прообразом прямой  $(p_1 p_2)$  при гомографии  $C: p_1^\times \rightarrow p_2^\times$  являются касательные прямые  $T_{p_2}C$  и  $T_{p_1}C$  соответственно.

Доказательство. Из условия вытекает, что ни одна из точек  $q_i$  не лежит на прямой  $(p_1 p_2)$  и никакие четыре из пяти точек  $p_1, p_2, q_1, q_2, q_3$  не коллинеарны. По [предл. 17.4](#) на стр. 217 через них проходит единственная коника  $C$ . Если она гладкая, то отображение  $C: p_1^\times \rightarrow p_2^\times$ , переводящее прямую  $(p_1 p_2)$  в прямую  $(p_2, p_2)$  для каждой точки  $p \in C$ , является гомографией.

УПРАЖНЕНИЕ 18.5. Убедитесь в этом.

Поскольку эта гомография действует на тройку прямых  $l'_i$  точно также, как  $\varphi$ , она совпадает с  $\varphi$ , что доказывает предложение в случае, когда  $\varphi$  не является перспективой. Если коника  $C$  распадается в объединение двух прямых, то одна из этих прямых проходит через все точки  $q_i$ , а другая — через  $p_1$  и  $p_2$ . Тем самым, точки  $q_i$  коллинеарны, и гомография  $\varphi$  действует так, как показано на [рис. 18♦8](#). В частности, она переводит прямую  $(p_1 p_2)$  в себя, т. е. является перспективой.  $\square$

**18.3. Двойное отношение.** Рассмотрим проективную прямую  $\mathbb{P}_1 = \mathbb{P}(\mathbb{k}^2)$  со стандартными однородными координатами  $(x_0 : x_1)$  и стандартную аффинную карту  $U_1$  на ней с координатой  $x = x_0 / x_1$ . Разность аффинных координат  $a = a_0 / a_1$  и  $b = b_0 / b_1$  любых двух точек, лежащих в карте  $U_1$ , с точностью до ненулевого множителя совпадает с определителем однородных координат  $(a_0 : a_1)$  и  $(b_0 : b_1)$  этих же точек, поскольку

$$a - b = \frac{a_0}{a_1} - \frac{b_0}{b_1} = \frac{a_0 b_1 - a_1 b_0}{a_1 b_1} = \frac{\det(a, b)}{a_1 b_1}. \quad (18-3)$$

Для упорядоченной четвёрки различных точек  $p_1, p_2, p_3, p_4 \in \mathbb{P}_1$  число

$$[p_1, p_2, p_3, p_4] = \frac{(p_1 - p_3)(p_2 - p_4)}{(p_1 - p_4)(p_2 - p_3)} = \frac{\det(p_1, p_3) \cdot \det(p_2, p_4)}{\det(p_1, p_4) \cdot \det(p_2, p_3)} \quad (18-4)$$

называется *двойным отношением*<sup>1</sup> этих четырёх точек. Как мы видели в [прим. 18.3](#) на стр. 220, оно равно аффинной координате образа точки  $p_4$  при единственной гомографии, переводящей точки  $p_1, p_2, p_3$  в  $\infty, 0, 1$  с сохранением порядка. Тем самым, двойное отношение четырёх различных точек может принимать любые значения кроме  $\infty, 0$  и  $1$ .

Предложение 18.3

Две упорядоченных четвёрки точек тогда и только тогда переводятся одна в другую гомографией, когда их двойные отношения одинаковы.

Доказательство. Пусть гомографии  $\varphi_p$  и  $\varphi_q$  переводят упорядоченные тройки точек  $p_1, p_2, p_3$  и  $q_1, q_2, q_3$  в тройку  $\infty, 0, 1$ . Если  $[p_1, p_2, p_3, p_4] = [q_1, q_2, q_3, q_4]$ , то  $\varphi_p(p_4) = \varphi_q(q_4)$  и гомография  $\varphi_q^{-1} \circ \varphi_p$  переводит  $p_1, p_2, p_3, p_4$  в  $q_1, q_2, q_3, q_4$ . Наоборот, если существует гомография  $\psi$ , переводящая  $p_1, p_2, p_3, p_4$  в  $q_1, q_2, q_3, q_4$ , то гомография  $\varphi_p \circ \psi^{-1}$  переводит четвёрку  $q_1, q_2, q_3, q_4$  в четвёрку  $\infty, 0, 1, [p_1, p_2, p_3, p_4]$ , откуда  $[p_1, p_2, p_3, p_4] = [q_1, q_2, q_3, q_4]$ .  $\square$

<sup>1</sup>По-английски *cross-ratio*.

## Следствие 18.3

Правая часть равенства (18-4) не зависит от выбора однородных координат, а средняя часть, содержащая разности аффинных координат точек, не зависит ни от выбора аффинной карты, ни от выбора локальной аффинной координаты в ней, при условии, что эта карта содержит все четыре точки, т. е. значения  $p_1, p_2, p_3, p_4$  конечны.

Доказательство. Поскольку замена однородных координат является гомографией, первое утверждение следует из предл. 18.3. Второе утверждение является следствием первого.  $\square$

УПРАЖНЕНИЕ 18.6. Докажите сл. 18.3 прямым вычислением и убедитесь, что в аффинной карте с нулём в  $b$  и бесконечностью в  $a$  для точек  $c = b + \gamma a$  и  $d = b + \delta a$  с аффинными координатами  $\gamma, \delta \in \mathbb{k}$  двойное отношение  $[a, b, c, d] = \delta/\gamma$ .

## Предложение 18.4

Биекция  $\varphi : \mathbb{P}_1 \xrightarrow{\cong} \mathbb{P}_1$  является гомографией если и только если она сохраняет двойные отношения.

Доказательство. Пусть  $\varphi$  переводит точки  $a, b$  и  $c$  в  $\infty, 0$  и  $1$ . Если  $\varphi$  сохраняет двойные отношения, то каждая точка  $t \in \mathbb{P}_1 \setminus \{a, b, c\}$  переходит в точку

$$\varphi(t) = [a, b, c, t] = \frac{(t-b)(c-a)}{(t-a)(c-b)}.$$

Таким образом, преобразование  $\varphi$  дробно линейно.  $\square$

УПРАЖНЕНИЕ 18.7. Убедитесь, что подгруппа Клейна<sup>1</sup>  $V_4 \subset S_4$  сохраняет двойное отношение:

$$[p_1, p_2, p_3, p_4] = [p_2, p_1, p_4, p_3] = [p_3, p_4, p_1, p_2] = [p_4, p_3, p_2, p_1].$$

**18.3.1. Специальные четвёрки точек.** Из упр. 18.7 и прим. 18.2 на стр. 219 вытекает, что при перестановках точек  $p_i$  двойное отношение  $[p_1, p_2, p_3, p_4]$  может принимать самое большее 6 различных значений, и все их можно получить при помощи шести перестановок первых трёх точек. Пусть

$$[p_1, p_2, p_3, p_4] = [p_2, p_1, p_4, p_3] = [p_3, p_4, p_1, p_2] = [p_4, p_3, p_2, p_1] = t. \quad (18-5)$$

Это аффинная координата образа точки  $p_4$  при гомографии  $\varphi : (p_1, p_2, p_3) \mapsto (\infty, 0, 1)$ . Значение  $[p_2, p_1, p_3, p_4]$  равно координате образа точки  $p_4$  под действием композиции

$$(p_1, p_2, p_3) \mapsto (\infty, 0, 1) \mapsto (0, \infty, 1),$$

вторая стрелка которой действует по правилу  $t \mapsto 1/t$ . Тем самым,

$$[p_2, p_1, p_3, p_4] = [p_1, p_2, p_4, p_3] = [p_3, p_4, p_2, p_1] = [p_4, p_3, p_1, p_2] = 1/t \quad (18-6)$$

Аналогично,  $[p_3, p_2, p_1, p_4]$  и  $[p_1, p_3, p_2, p_4]$  суть образы  $p_4$  под действием композиций

$$(p_1, p_2, p_3) \mapsto (\infty, 0, 1) \mapsto (1, 0, \infty) \quad \text{и} \quad (p_1, p_2, p_3) \mapsto (\infty, 0, 1) \mapsto (\infty, 1, 0),$$

<sup>1</sup>См. прим. 18.2 на стр. 219.

вторые стрелки в которых суть  $t \mapsto t/(t-1)$  и  $t \mapsto 1-t$ . Поэтому

$$\begin{aligned} [p_3, p_2, p_1, p_4] &= [p_2, p_3, p_4, p_1] = [p_1, p_4, p_3, p_2] = [p_4, p_1, p_2, p_3] = t/(t-1) \\ [p_1, p_3, p_2, p_4] &= [p_3, p_1, p_4, p_2] = [p_2, p_4, p_1, p_3] = [p_4, p_2, p_3, p_1] = 1-t. \end{aligned} \quad (18-7)$$

Значения  $[p_2, p_3, p_1, p_4]$  и  $[p_3, p_1, p_2, p_4]$  получаются из  $[p_1, p_2, p_3, p_4]$  применением гомографий  $(\infty, 0, 1) \mapsto (1, \infty, 0)$  и  $(\infty, 0, 1) \mapsto (0, 1, \infty)$ , задаваемых правилами  $t \mapsto (t-1)/t$  и  $t \mapsto 1/(1-t)$ . Поэтому

$$\begin{aligned} [p_2, p_3, p_1, p_4] &= [p_3, p_2, p_4, p_1] = [p_1, p_4, p_2, p_3] = [p_4, p_1, p_3, p_2] = (t-1)/t \\ [p_3, p_1, p_2, p_4] &= [p_1, p_3, p_4, p_2] = [p_2, p_4, p_3, p_1] = [p_4, p_2, p_1, p_3] = 1/(1-t). \end{aligned} \quad (18-8)$$

Формулы (18-5)-(18-8) описывают все возможные значения двойного отношения, возникающие при 24 перестановках точек  $p_1, p_2, p_3, p_4$ . Если  $t \in \mathbb{k}$  таково, что все шесть значений

$$t, \quad 1/t, \quad t/(t-1), \quad 1-t, \quad (t-1)/t, \quad 1/(1-t) \quad (18-9)$$

различны, то никакую перестановку точек  $p_i$  кроме четырёх перестановок из группы Клейна невозможно осуществить дробно линейным преобразованием проективной прямой. Такие четвёрки точек называются *общими*.

При значениях  $t = -1, 2, 1/2$ , которые, соответственно, удовлетворяют равенствам  $t = 1/t$ ,  $t = t/(t-1)$ ,  $t = 1-t$ , двойное отношение  $[p_1, p_2, p_3, p_4] = t$  не меняется, соответственно, при транспозициях<sup>1</sup>  $(1, 2)$ ,  $(1, 3)$ ,  $(1, 4)$  и пробегает при всевозможных перестановках точек всего три различных значения. Если  $t$  является корнем уравнения<sup>2</sup>  $t^2 - t + 1 = 0$ , то  $t = (t-1)/t$  и  $t = 1/(1-t)$ , а двойное отношение не меняется при всех циклических перестановках точек  $p_1, p_2, p_3$ , принимая всего два различных значения при произвольных перестановках точек.

Четвёрка точек с двойным отношением, равным одному из пяти только что перечисленных специальных значений, называется *специальной*. Таким образом, при перестановках точек, образующих специальную четвёрку, двойное отношение принимает либо три, либо два различных значения. Геометрически, специальность четвёрки точек означает существование гомографии, осуществляющей перестановку этих точек, отличную от четырёх клейновских перестановок.

**18.3.2. Гармонические пары точек.** Четвёрка точек  $\{a, b; c, d\} \in \mathbb{P}_1$  называется *гармонической*, если двойное отношение  $[a, b, c, d] = -1$ . Геометрически это условие означает, что в аффинной карте, для которой точка  $a$  является бесконечностью, точка  $b$  является центром тяжести точек  $c$  и  $d$ . При его выполнении говорят также, что пары точек  $\{a, b\}$  и  $\{c, d\}$  *гармоничны* по отношению друг к другу. Выше мы видели, что гармоничность двух пар точек равносильна тому, что их двойное отношение не меняется при перестановке точек в одной из этих пар<sup>3</sup>. Так как двойное отношение не меняется при перестановке пар между собой как единого целого, гармоничность является симметричным бинарным отношением на множестве неупорядоченных пар точек на  $\mathbb{P}_1$ .

<sup>1</sup>А также остальных восьми перестановках из подгруппы, порождённой такой транспозицией и четырьмя клейновскими перестановками.

<sup>2</sup>Т. е. является отличным от  $-1$  кубическим корнем из  $-1$  в поле  $\mathbb{k}$ .

<sup>3</sup>См. формулу (18-6) на стр. 227.

Пример 18.4 (гармонические пары прямых в четырёхвершиннике, продолжение ПРИМ. 18.2)

Покажем, что в каждом из трёх пучков прямых с центрами в вершинах  $x, y, z$  треугольника, ассоциированного с четырёхвершинником  $abcd$ , пара сторон четырёхвершинника гармонична паре сторон треугольника  $xuz$ , см. рис. 18◊10. Для этого отождествим пучок прямых с центром в  $x$  с прямой  $(ad)$  и с прямой  $(bc)$  как в упр. 18.2 на стр. 221. Мы должны проверить, что прямая  $(xu)$  пересекает прямые  $(ad)$  и  $(bc)$  по таким точкам  $x'$  и  $x''$ , что  $[a, d, z, x'] = [b, c, z, x''] = -1$ . Поскольку центральные проекции из  $x$  и из  $y$  являются дробно линейными изоморфизмами между прямыми  $(ad)$  и  $(bc)$ , возникают следующие равенства двойных отношений соответственных точек:  $[a, d, z, x'] = [b, c, z, x''] = [d, a, z, x']$ . Так как при перестановке первых двух точек двойное отношение не поменялось, оно равно  $-1$ .

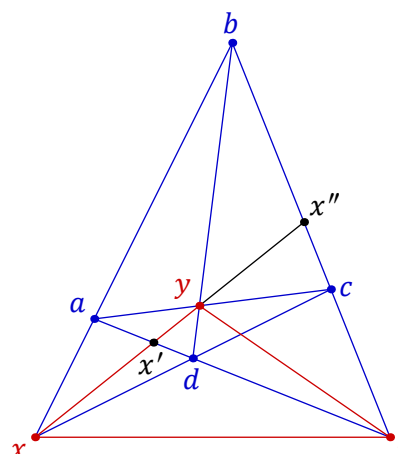


Рис. 18◊10.

**18.3.3. Двойное отношение на невырожденной конике.** Есть несколько разумных способов определить двойное отношение  $[p_1, p_2, p_3, p_4]_C$  четырёх точек  $p_1, p_2, p_3, p_4$  на невырожденной конике  $C \subset \mathbb{P}_2$ . Можно выбрать пятую точку  $p_5 \in C$ , отличную от четырёх данных, и положить  $[p_1, p_2, p_3, p_4]_C$  равным двойному отношению четырёх прямых  $(p_5 p_i)$ ,  $1 \leq i \leq 4$ , в пучке  $p_5^\times \subset \mathbb{P}_2^\times$  всех прямых, проходящих через точку  $p_5$ , или двойному отношению проекций точек  $p_1, p_2, p_3, p_4$  из точки  $p_5$  на какую-нибудь прямую  $\ell \subset \mathbb{P}_2$ . А можно, как в прим. 17.10 на стр. 216, изоморфно отобразить содержащую конику плоскость  $\mathbb{P}_2$  на плоскость  $\mathbb{P}(S^2 \mathbb{k}^2)$  неупорядоченных пар точек на  $\mathbb{P}_1 = \mathbb{P}(\mathbb{k}^2)$  так, чтобы коника  $C$  биективно отобразилась на состоящую из двойных точек конику Веронезе  $C_2 = \{a^2 \in S^2 \mathbb{k}^2 \mid a \in U\}$ . Если точки  $p_i \in C$  переходят при этом в квадраты  $a_i^2 \in C_2$  точек  $a_i \in \mathbb{P}_1 = \mathbb{P}(\mathbb{k}^2)$ , мы полагаем  $[p_1, p_2, p_3, p_4]_C = [a_1, a_2, a_3, a_4]$ . Покажем, что все эти способы корректны<sup>1</sup> и дают одинаковый результат, предполагая для простоты, что основное поле  $\mathbb{k}$  алгебраически замкнуто и имеет характеристику нуль<sup>2</sup>, чтобы можно было применять теор. 18.2 на стр. 220.

Прямые, проходящие через фиксированную точку  $p_5 \in \mathbb{P}_2$ , образуют прямую  $p_5^\times \subset \mathbb{P}_2^\times$ , и для любой прямой  $\ell \subset \mathbb{P}_2$  отображение  $p_5^\times \rightarrow \ell$ , переводящее прямую из пучка  $p_5^\times$  в точку её пересечения с прямой  $\ell$ , является гомографией по упр. 18.2 на стр. 221. Поскольку гомографии сохраняют двойное отношение, двойное отношение прямых  $(p_5 p_i)$  в пучке  $p_5^\times$  равно двойному отношению проекций точек  $p_i$  из точки  $p_5$  на любую прямую  $\ell$ . В частности, последнее одинаково для всех прямых  $\ell$ , не проходящих через точку  $p_5$ .

Для любых двух точек  $a, b \in C$  и не проходящей через них прямой  $\ell$  композиция проекции прямой  $\ell$  на конику  $C$  из точки  $a$  и проекции коники  $C$  обратно на прямую  $\ell$  из точки  $b$  биективна и в однородных координатах на прямой  $\ell$  задаётся рациональными функциями согласно форм. (17-10) на стр. 211. По теор. 18.2 эта композиция является гомографией и сохраняет двойные отношения. Таким образом, двойное отношение проекций точек  $p_i$  на прямую из

<sup>1</sup>Т. е. не зависят ни от выбора точки  $p_5 \in C \setminus \{p_1, p_2, p_3, p_4\}$ , ни от выбора прямой  $\ell$ , на которую проектируются точки  $p_i$ , ни от выбора линейного проективного изоморфизма данной коники  $C$  с коникой Веронезе  $C_2$ .

<sup>2</sup>В действительности, это верно для непустой неособой коники над любым полем характеристики  $\text{char } \mathbb{k} \neq 2$ .

точки  $p_5 \in C$  не зависит от выбора точки  $p_5$ .

Поскольку композиция вложения Веронезе  $v_2 : \mathbb{P}(\mathbb{k}^2) \rightarrow \mathbb{P}(S^2\mathbb{k}^2)$ ,  $a \mapsto a^2$ , с проекцией коники Веронезе  $C_2 = \text{im } v_2$  из любой точки  $a^2 \in C_2$  на любую прямую  $\ell \subset \mathbb{P}(S^2\mathbb{k}^2)$  биективна и задаётся в координатах рациональными функциями, она тоже является гомографией и сохраняет двойные отношения. Поэтому для коники Веронезе двойное отношение проекций любых четырёх двойных точек  $a_1^2, a_2^2, a_3^2, a_4^2 \in C_2$  на любую прямую  $\ell \subset \mathbb{P}(S^2\mathbb{k}^2)$  из любой точки на  $C_2$  совпадает с двойным отношением  $[a_1, a_2, a_3, a_4]$  самих точек  $a_i$  на прямой  $\mathbb{P}(\mathbb{k}^2)$ .

Наконец, пусть заданы два линейных проективных изоморфизма  $\varphi, \psi : \mathbb{P}_2 \xrightarrow{\simeq} \mathbb{P}(S^2\mathbb{k}^2)$ , биективно отображающих данную невырожденную конику  $C \subset \mathbb{P}_2$  на конику Веронезе и переводящих точки  $p_i \in C$  в точки  $a_i^2 = \varphi(p_i)$  и  $b_i^2 = \psi(p_i)$ . Композиция  $\eta = \varphi \circ \psi^{-1}$  является линейным проективным автоморфизмом пространства  $\mathbb{P}(S^2\mathbb{k}^2)$  и переводит конику Веронезе в себя. Ограничение автоморфизма  $\eta$  на любую прямую  $\ell$  является гомографией между прямыми  $\ell$  и  $\eta(\ell)$  и сохраняет двойные отношения. Если точки  $q_1, q_2, q_3, q_4 \in \ell$  являются образами точек  $b_1^2, b_2^2, b_3^2, b_4^2 \in C_2$  при проекции из точки  $c^2 \in C_2$ , то их образы  $\eta(q_i)$  суть образы точек  $a_i^2 = \eta(b_i^2)$  при проекции из точки  $\eta(c^2)$  на прямую  $\eta(\ell)$ . Поскольку двойное отношение точек  $q_i$  такое же, как и у точек  $\eta(q_i)$ , вычисленные любым из трёх описанных выше способов двойные отношения точек  $a_i^2$  и точек  $b_i^2$  на конике Веронезе тоже будут одинаковы.

#### Предложение 18.5

Гладкая коника  $C$ , проходящая через пять точек  $p_1, \dots, p_5$ , никакие три из которых не коллинеарны, представляет собою ГМТ  $p$ , таких что в пучке прямых с центром в  $p$  двойное отношение четырёх прямых  $(p, p_i)$ ,  $1 \leq i \leq 4$ , равно двойному отношению четырёх прямых  $(p_5, p_i)$ ,  $1 \leq i \leq 4$ , в пучке прямых с центром в точке  $p_5$ .

Доказательство. Мы уже видели выше, что все точки  $p \in C$  обладают требуемым свойством. Для любой другой точки  $p$ , обладающей этим свойством, обозначим через  $Q$  конику, проходящую через точки  $p, p_1, p_2, p_3$  и  $p_5$ . Гомография<sup>1</sup>  $Q : p^\times \rightarrow p_5^\times$ ,  $\forall q \in Q (pq) \mapsto (p_5q)$ , между пучками прямых с центрами в  $p$  и  $p_5$  переводит прямые  $(pp_i)$  в прямые  $(p_5p_i)$  для  $1 \leq i \leq 3$ . Поскольку  $[(p, p_1), (p, p_2), (p, p_3), (p, p_4)] = [(p_5, p_1), (p_5, p_2), (p_5, p_3), (p_5, p_4)]$ , прямая  $(pp_4)$  переходит в прямую  $(p_5p_4)$ , откуда  $p_4 \in Q$ . Но единственная коника, проходящая через пять точек  $p_1, \dots, p_5$ , это коника  $C$ . Поэтому  $Q = C$  и  $p \in C$ .  $\square$

**18.4. Гомографии на непустой гладкой конике.** Биективное преобразование  $\varphi : C \xrightarrow{\simeq} C$  невырожденной коники  $C$  называется *гомографией*, если оно сохраняет двойные отношения. Согласно [предл. 18.4](#) на стр. 227 это требование равносильно тому, что для некоторой сохраняющей двойные отношения биекции  $\psi : C \xrightarrow{\simeq} \mathbb{P}_1$  преобразование  $\psi\varphi\psi^{-1} : \mathbb{P}_1 \xrightarrow{\simeq} \mathbb{P}_1$  является гомографией на  $\mathbb{P}_1$ . Если это условие выполняется для какой-нибудь сохраняющей двойные отношения биекции между  $C$  и  $\mathbb{P}_1$ , то по тому же [предл. 18.4](#) оно выполняется для любых таких биекций.

Как и гомография на прямой, гомография на конике однозначно определяется своим действием на какие-нибудь три различные точки.

#### Пример 18.5 (инволюции)

Гомография  $\sigma : C \rightarrow C$  называется *инволюцией*, если она обратна самой себе, т. е.  $\sigma^2 = \text{Id}_C$ . Тожественная инволюция  $\sigma = \text{Id}_C$  называется *тривиальной*. Пусть точки  $a_1, a_2, b_1, b_2$  на конике  $C$  различны и инволюция  $\sigma : C \rightarrow C$  переставляет одноимённые точки  $a_1 \leftrightarrow a_2$  и  $b_1 \leftrightarrow b_2$

<sup>1</sup>См. [предл. 18.2](#) на стр. 225.

как на рис. 18◊11. Обозначим точку пересечения прямых  $(a_1 a_2)$  и  $(b_1 b_2)$  через  $s$ . Пучок прямых с центром в  $s$  задаёт биективное преобразование  $\sigma_s : C \simeq C$ , переставляющее точки пересечения коники  $C$  с каждой проходящей через  $s$  прямой.

УПРАЖНЕНИЕ 18.8. Убедитесь, что это преобразование рационально.

Следовательно,  $\sigma_s$  является гомографией, а значит, совпадает с инволюцией  $\sigma$ , поскольку действует на четыре точки  $a_1, a_2, b_1, b_2$  также, как и  $\sigma$ . В частности, неподвижными точками инволюции  $\sigma$  являются две точки, образующие видимый из точки  $s$  контур коники  $C$ .

Таким образом, над алгебраически замкнутым полем  $\mathbb{k}$  с  $\text{char}(\mathbb{k}) \neq 2$  каждая нетривиальная инволюция на проективной прямой или на невырожденной конике имеет ровно две различных неподвижных точки, и для любой пары различных точек  $c, d \in \mathbb{P}_1$  существует единственная инволюция  $\sigma_{cd} : \mathbb{P}_1 \rightarrow \mathbb{P}_1$ , для которой точки  $c$  и  $d$  являются неподвижными. Эта инволюция тогда и только тогда переставляет друг с другом точки  $a, b$ , когда точки  $a^2$  и  $b^2$  коники Веронезе  $C_2 \subset \mathbb{P}_2$  лежат на одной прямой с точкой  $cd \in \mathbb{P}_2$ .

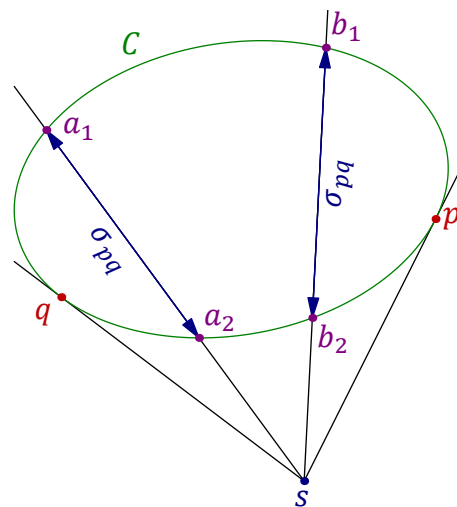


Рис. 18◊11. Инволюция на конике.

УПРАЖНЕНИЕ 18.9. Убедитесь, что  $\sigma_{cd}(a) = b$  для четырёх различных точек  $a, b, c, d$  если и только если точки  $a, b$  гармоничны точкам  $c, d$ , и что в аффинной карте, где  $d = \infty$ , инволюция  $\sigma_{cd}$  выглядит как центральная симметрия относительно  $c$ .

#### Следствие 18.4

Над алгебраически замкнутым полем для любых двух различных нетривиальных инволюций  $\sigma, \tau : \mathbb{P}_1 \simeq \mathbb{P}_1$  имеется ровно одна такая пара (возможно, совпадающих друг с другом) точек  $a, b \in \mathbb{P}_1$ , что  $\sigma(a) = b$  и  $\tau(a) = b$ .

Доказательство. Пусть точки  $u, w$  на  $\mathbb{P}_1 = \mathbb{P}(U)$  неподвижны относительно инволюции  $\sigma$ , а точки  $r, s$  — относительно инволюции  $\tau$ . Точки  $a, b$  тогда и только тогда удовлетворяют условиям  $\sigma(a) = b$  и  $\tau(a) = b$ , когда точки  $a^2$  и  $b^2$  коники Веронезе на  $\mathbb{P}_2 = \mathbb{P}(S^2 U)$  лежат на одной прямой с точками  $uw$  и  $rs$ . Но прямая  $(uw, rs)$  пересекает конику Веронезе ровно по двум, возможно совпадающим, точкам.  $\square$

#### Пример 18.6 (перекрёстная ось гомографии на конике)

Гомография  $\varphi : C \rightarrow C$ , переводящая три различные точки  $a_1, b_1, c_1 \in C$  в точки  $a_2, b_2, c_2 \in C$  является композицией проекций  $b_2 : C \rightarrow \ell$  и  $b_1 : \ell \rightarrow C$ , где прямая  $\ell$  соединяет точки пересечения  $(a_1 b_2) \cap (b_1 a_2)$  и  $(c_1 b_2) \cap (b_1 c_2)$  пар перекрёстных прямых на рис. 18◊12. Поскольку неподвижные точки гомографии  $\varphi$  суть точки пересечения  $\ell \cap C$ , прямая  $\ell$  не зависит от выбора точек  $a_1, b_1, c_1 \in C$ , а  $\varphi$  имеет либо ровно две неподвижные точки, либо ровно одну, причём последнее означает, что прямая  $\ell$  касается коники  $C$  в этой неподвижной точке. Таким образом, прямая  $\ell$  представляет собой ГМТ пересечения всех перекрёстных прямых  $(x, \varphi(y)) \cap (y, \varphi(x))$ , где  $x \neq y$  независимо пробегают конику  $C$ . Отсюда получается ещё одно доказательство теоремы Паскаля<sup>1</sup>: три точки пересечений пар противоположных сторон вписанного в  $C$  шестиуголь-

<sup>1</sup>См. теор. 18.3 на стр. 224.

ника  $a_1c_2b_1a_2c_1b_2$ , будучи точками пересечений перекрёстных прямых гомографии, которая переводит точки  $a_1, b_1, c_1$  в точки  $a_2, b_2, c_2$ , лежат на перекрёстной оси  $\ell$  этой гомографии.

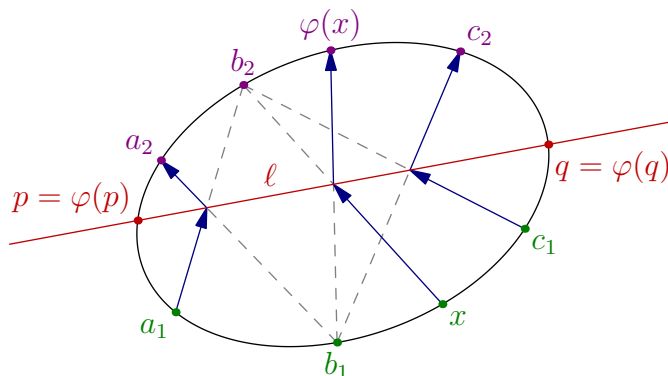


Рис. 18◊12. Перекрёстная ось гомографии на конике.

Перекрёстная ось гомографии  $\varphi : C \rightarrow C$  легко строится одной линейкой, если известно действие  $\varphi$  на какие-нибудь три точки. Это позволяет одной линейкой построить образ  $\varphi(z)$  любой точки  $z \in C$ , а также указать неподвижные точки гомографии  $\varphi$ . В частности, две касательные к невырожденной конике  $C \subset \mathbb{P}_2$ , опущенные из заданной точки  $s \in \mathbb{P}_2$ , тоже можно построить одной линейкой, найдя неподвижные точки инволюции  $\sigma_s : C \rightarrow C$ , задаваемой пучком прямых с центром в  $s$ , см. рис. 18◊13. Более простое построение можно извлечь из упр. 18.10.

УПРАЖНЕНИЕ 18.10 (построение Штейнера). Обоснуйте показанное на рис. 18◊14 построение<sup>1</sup> одной линейкой поляр<sup>2</sup>  $\ell(p)$  данной точки  $p$  относительно данной коники  $C$ .

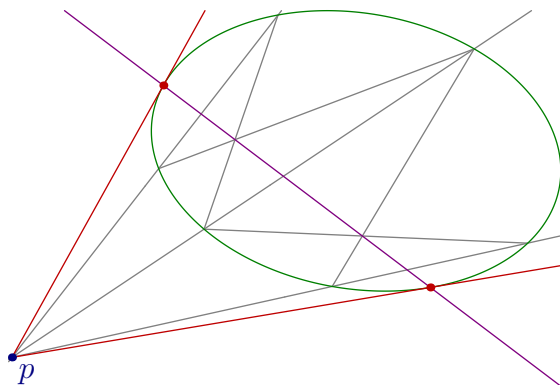


Рис. 18◊13. Построение касательных.

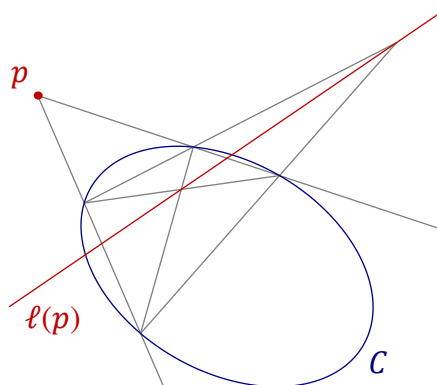


Рис. 18◊14. Построение поляр<sup>2</sup>.

<sup>1</sup>Принадлежащее Якобу Штейнеру (1796–1863), см. Я. Штейнер. «Геометрические построения, выполняемые с помощью прямой линии и неподвижного круга», Харьковская математическая библиотека, Харьков, 1910.

<sup>2</sup>См. формулу (17-4) на стр. 209.



## §19. Гладкие проективные квадрики

Всюду в этом параграфе мы по умолчанию считаем, что  $\text{char } \mathbb{k} \neq 2$ .

**19.1. Полярное преобразование относительно гладкой квадрики.** Напомню, что с каждой квадратичной формой  $q \in S^2V^*$  однозначно связаны симметричная билинейная форма<sup>1</sup>

$$\tilde{q} : V \times V \rightarrow \mathbb{k}, \quad \tilde{q}(u, w) = \frac{1}{2}(q(u+w) - q(u) - q(w)),$$

и линейное отображение корреляции<sup>2</sup>  $\hat{q} : V \xrightarrow{\simeq} V^*$ ,  $w \mapsto \hat{q}(w) : u \mapsto \tilde{q}(u, w)$ . Невырожденность формы  $q$  равносильна тому, что корреляция является линейным изоморфизмом векторных пространств. Индуцированное ею биективное проективное преобразование  $\bar{q} : \mathbb{P}(V) \xrightarrow{\simeq} \mathbb{P}_n(V^*)$  пространства  $\mathbb{P}_n = \mathbb{P}(V)$  в пространство  $\mathbb{P}_n^X = \mathbb{P}(V^*)$  гиперплоскостей в  $\mathbb{P}_n$  называется *полярным преобразованием* или *поляритетом* относительно гладкой квадрики  $Q = V(q) \subset \mathbb{P}_n$ . Поляритет сопоставляет каждой точке  $p \in \mathbb{P}_n$  её *полярную гиперплоскость*<sup>3</sup>  $\bar{q}(p) = \mathbb{P}(p^\perp)$ .

УПРАЖНЕНИЕ 19.1. Убедитесь, что при умножении квадратичной формы  $q$  на ненулевую константу поляритет не меняется.

Точка  $p$  и гиперплоскость  $\mathbb{P}(p^\perp)$  называются, соответственно, *полюсом* и *полярной* друг друга относительно квадрики  $Q$ . Геометрически, полярная точки  $p \notin Q$  представляет собою гиперплоскость, высекающую видимый из  $p$  контур<sup>4</sup> квадрики  $Q$ , а полярной точки  $p \in Q$  является касательная гиперплоскость  $T_p Q$  к квадрике  $Q$  в точке  $p$ . Таким образом, квадрика однозначно восстанавливается по своему поляритету как ГМТ, лежащих на своих полярах.

**19.1.1. Поляритеты над незамкнутыми полями.** Мы уже видели, что над алгебраически незамкнутыми полями могут быть анизотропные квадратичные формы, задающие пустые квадрики. Все эти квадрики автоматически невырождены, и их поляритеты являются вполне наблюдаемыми геометрическими преобразованиями точек в гиперплоскости. Пустота квадрики, задающей такое преобразование, означает лишь то, что никакая точка не лежит на своей поляре.

УПРАЖНЕНИЕ 19.2. Опишите полярное преобразование евклидовой плоскости  $\mathbb{R}^2$  относительно «мнимой окружности»  $x^2 + y^2 = -1$ .

Из теор. 18.1 на стр. 219 вытекает, что два поляритета  $\bar{q}_1, \bar{q}_2 : \mathbb{P}(V) \rightarrow \mathbb{P}(V^*)$  совпадают тогда и только тогда, когда задающие их квадратичные формы  $q_1, q_2 \in S^2(V^*)$  пропорциональны.

ТЕОРЕМА 19.1

Две непустые гладкие квадрики над бесконечным полем  $\mathbb{k}$  характеристики  $\text{char}(\mathbb{k}) \neq 2$  совпадают если и только если их уравнения пропорциональны.

Доказательство. При  $n = 1$  равенство  $V(q_1) = V(q_2) = \{a, b\}$  означает, что обе бинарные квадратичные формы  $q_1(x), q_2(x)$  от  $x = (x_0, x_1)$  пропорциональны  $\det(x, a) \det(x, b)$ .

УПРАЖНЕНИЕ 19.3. Покажите, что над бесконечным полем  $\mathbb{k}$  характеристики  $\text{char}(\mathbb{k}) \neq 2$  при  $n \geq 2$  на любой непустой гладкой квадрике  $Q \subset \mathbb{P}_n$  найдутся  $n + 2$  точки, никакие  $n + 1$  из которых не лежат в одной гиперплоскости.

<sup>1</sup>Которая называется *поляризацией* квадратичной формы  $q$ , см. н° 15.3 на стр. 183.

<sup>2</sup>См. н° 14.1.2 на стр. 169.

<sup>3</sup>Или *поляру*, см. н° 17.3.1 на стр. 209, особенно — формулу (17-4).

<sup>4</sup>См. н° 17.3.1 на стр. 209.

Так как поляритеты  $\bar{q}_1, \bar{q}_2 : \mathbb{P}_n \xrightarrow{\sim} \mathbb{P}_n^\times$  одинаково действуют на эти  $(n+2)$  точки, корреляции  $\hat{q}_1, \hat{q}_2 : V \xrightarrow{\sim} V^*$  пропорциональны по [упр. 19.3](#), а значит, формы  $q_1$  и  $q_2$  имеют пропорциональные матрицы Грама.  $\square$

**19.1.2. Сопряжение.** Поскольку условие  $\tilde{q}(a, b) = 0$  симметрично по  $a$  и  $b$ , точка  $a$  лежит на поляре точки  $b$  если и только если точка  $b$  лежит на поляре точки  $a$ . Такие точки  $a$  и  $b$  называются *сопряжёнными* относительно квадрики  $Q$ . Сопряжённость является симметричным бинарным отношением. Полярные сопряжённым точкам  $a$  и  $b$  гиперплоскости  $\mathbb{P}(a^\perp)$  и  $\mathbb{P}(b^\perp)$  тоже называются *сопряжёнными* относительно  $Q$ .

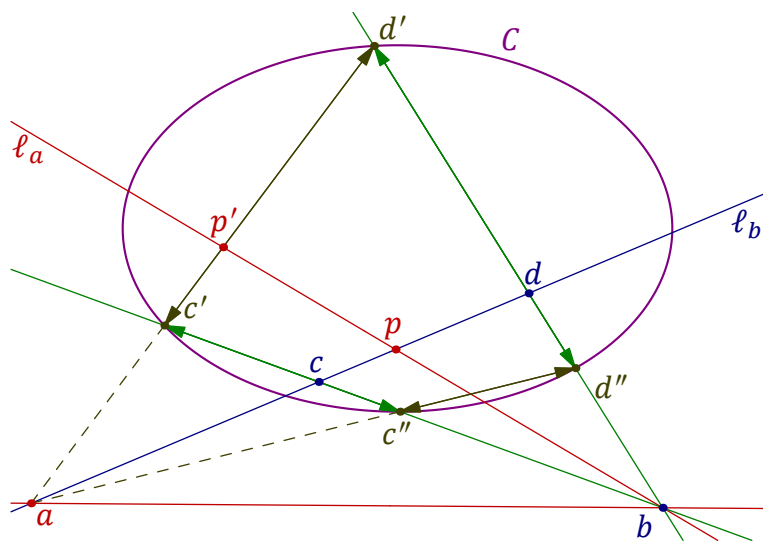
**Упражнение 19.4.** Одной линейкой постройте полярю данной точки и полюс данной прямой при полярном преобразовании евклидовой плоскости  $\mathbb{R}^2$  относительно данной окружности. Особое внимание уделите случаям, когда прямая не пересекает окружности, а точка лежит внутри очерчиваемого окружностью круга.

**Предложение 19.1**

Пусть прямая  $(ab)$  пересекает гладкую квадрику  $Q$  в двух различных точках  $c$  и  $d$ , отличных от  $a$  и  $b$ . Точки  $a, b$  тогда и только тогда сопряжены относительно квадрики  $Q$ , когда они гармоничны<sup>1</sup> точкам  $c, d$ .

**Доказательство.** Обозначим проходящую через точки  $a, b, c, d$  прямую через  $\ell$ . Сопряжение относительно квадрики  $Q$  задаёт на прямой  $\ell$  инволюцию  $\sigma_Q : \ell \rightarrow \ell, x \mapsto \ell \cap \mathbb{P}(x^\perp)$ , которая переводит точку  $x \in \ell$  в точку пересечения её поляры с прямой  $\ell$ . Так точки  $c$  и  $d$  неподвижны относительно этой инволюции,  $\sigma_Q$  меняет местами точки  $a$  и  $b$  если и только если  $[a, b, c, d] = -1$ , как мы видели в [упр. 18.9](#) на стр. 231.  $\square$

**Упражнение 19.5.** Дайте чисто алгебраическое доказательство [предл. 19.1](#).



**Рис. 19◊1.** Инволюции с центрами в сопряжённых точках перестановочны.

<sup>1</sup>См. п.° 18.3.2 на стр. 228.

Пример 19.1 (пары коммутирующих инволюций)

Покажем, что инволюции<sup>1</sup>  $\sigma_a, \sigma_b : C \simeq C$  гладкой коники  $C \subset \mathbb{P}_2$ , задаваемые двумя сопряжёнными относительно этой коники точками  $a, b \in \mathbb{P}_2 \setminus C$ , коммутируют друг с другом. Обозначим через  $\ell_a$  и  $\ell_b$  поляры точек  $a$  и  $b$ , см. рис. 19◊1. Точки  $c'$  и  $d'$ , отсекаемые из коники  $C$  произвольной прямой  $\ell' \ni a$ , гармоничны точкам  $a$  и  $p' = \ell' \cap \ell_a$ . Поскольку перспектива  $b : \ell_b \simeq \ell'$  сохраняет двойные отношения, равенство  $\sigma_a(c') = d'$  на прямой  $\ell'$  равносильно тому, что точки  $c = \ell_b \cap (bc')$  и  $d = \ell_b \cap (bd')$  переводятся друг в друга инволюцией  $\sigma_{ap} : \ell_b \simeq \ell_b$  с неподвижными точками  $a$  и  $p = \ell_b \cap \ell_a$ . Пусть  $c'' = C \cap (bc')$  и  $\ell'' = (ac'')$ . Тогда прямая  $\ell''$  пересекает конику  $C$  и прямую  $(bd')$  в одной и той же точке  $d''$ , однозначно характеризующей тем, что  $[a, p'', c'', d''] = -1$ , где  $p'' = \ell'' \cap \ell_a$ . Тем самым, одновременное выполнение равенств  $\sigma_a(c') = d'$  и  $\sigma_a(c'') = d''$  равносильно одновременному выполнению равенств  $\sigma_b(c') = c''$  и  $\sigma_b(d') = d''$ .

Упражнение 19.6. Убедитесь, что и наоборот, центры  $a, b \in \mathbb{P}_2$  любых двух перестановочных друг с другом инволюций  $\sigma_a, \sigma_b : C \simeq C$  непустой гладкой коники  $C \subset \mathbb{P}_2$  сопряжены друг другу относительно  $C$ .

**19.1.3. Двойственная квадрика.** Полярное преобразование  $\bar{g} : \mathbb{P}_n \simeq \mathbb{P}_n^\times$  относительно гладкой квадрики  $G = V(g) \subset \mathbb{P}_n$  с матрицей Грама  $\Gamma$  переводит всякую квадратичку  $F = V(f) \subset \mathbb{P}_n$  с матрицей Грама  $\Phi$  в квадратичку  $F_G^\times \subset \mathbb{P}_n^\times$  того же ранга, что и квадратичка  $F$ , имеющую в двойственном базисе пространства  $\mathbb{P}_n^\times$  матрицу Грама  $\Gamma^{-1}\Phi\Gamma^{-1}$ . В самом деле, квадратичка  $F_G^\times$  состоит из всех таких ковекторов  $\xi = \Gamma x$ , что  $x^t \Phi x = 0$ . Подставляя в последнее равенство  $x = \Gamma^{-1}\xi$  и учитывая, что  $\Gamma^t = \Gamma$ , получаем  $F_G^\times = \{\xi \in \mathbb{P}_n^\times \mid \xi^t \Gamma^{-1} \Phi \Gamma^{-1} \xi = 0\}$ . Применяя это наблюдение к самой квадрике  $G$ , т. е. полагая  $\Phi = \Gamma$ , получаем

Предложение 19.2 (двойственная квадрика)

Касательные пространства к гладкой квадрике  $G \subset \mathbb{P}_n$  образуют в  $\mathbb{P}_n^\times$  гладкую квадратичку  $G^\times$ . Матрицы Грама квадратик  $G$  и  $G^\times$  в двойственных базисах пространств  $\mathbb{P}_n$  и  $\mathbb{P}_n^\times$  обратны друг другу.  $\square$

Следствие 19.1

Две гиперплоскости  $\Pi_1, \Pi_2 \subset \mathbb{P}_n$  тогда и только тогда сопряжены<sup>2</sup> относительно гладкой квадрики  $Q \subset \mathbb{P}_n$ , когда они гармоничны в порождённом ими пучке гиперплоскостей<sup>3</sup> двум касательным гиперплоскостям к квадрике  $Q$ , проходящим через  $\Pi_1 \cap \Pi_2$ .

Доказательство. Это утверждение проективно двойственно к предл. 19.1 на стр. 234.  $\square$

Следствие 19.2 (теорема Брианшона)

Шестиугольник  $p_1, p_2, \dots, p_6$  тогда и только тогда описан вокруг некоторой гладкой коники, когда его главные диагонали  $(p_1 p_4), (p_2 p_5), (p_3 p_6)$  пересекаются в одной точке, см. рис. 19◊3 на стр. 236.

Доказательство. Это утверждение проективно двойственно к теореме Паскаля<sup>4</sup>.  $\square$

<sup>1</sup>См. прим. 18.5 на стр. 230.

<sup>2</sup>Напомним, что это означает, что каждая из них содержит полюс другой, см. н° 19.1.2 на стр. 234.

<sup>3</sup>Т. е. в пучке гиперплоскостей, проходящих через  $(n - 2)$ -мерную плоскость  $\Pi_1 \cap \Pi_2$ .

<sup>4</sup>См. теор. 18.3 на стр. 224 и прим. 18.6 на стр. 231.

Пример 19.2 (коника, касающаяся пяти прямых)

Из [предл. 17.4](#) на стр. 217 вытекает, что каждые пять прямых, никакие три из которых не пересекаются в одной точке, касаются единственной гладкой коники. Эта коника двойственна к гладкой конике, проходящей через пять точек двойственной плоскости, двойственных к заданным пяти прямым.

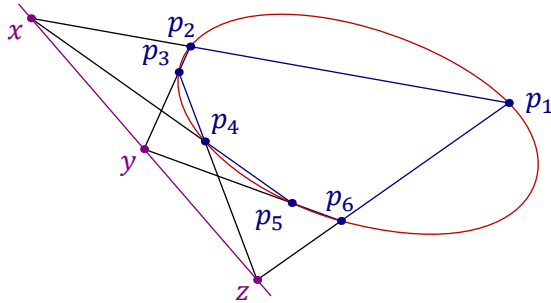


Рис. 19◊2. Вписанный шестиугольник.

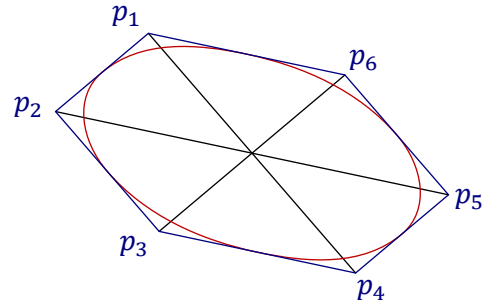


Рис. 19◊3. Описанный шестиугольник.

Пример 19.3 (задание гомографии касательными к конике)

Пусть гомография  $\varphi : \ell_1 \xrightarrow{\sim} \ell_2$  между двумя различными прямыми  $\ell_1, \ell_2 \subset \mathbb{P}^2$  переводит три различные точки  $a_1, b_1, c_1 \in \ell_1$ , отличные от точки  $q = \ell_1 \cap \ell_2$ , соответственно, в точки  $a_2, b_2, c_2 \in \ell_2$ . При этом возникают две возможности, показанные на [рис. 19◊4](#) и [рис. 19◊5](#): либо соединяющие соответственные точки три прямые  $(a_1, a_2), (b_1, b_2), (c_1, c_2)$  пересекаются в одной точке  $p$ , либо нет. Первое означает, что гомография  $\varphi$  является перспективой<sup>1</sup> с центром в  $p$ , и это равносильно равенству  $\varphi(q) = q$ . Во втором случае никакие три из пяти прямых  $\ell_1, \ell_2, (a_1, a_2), (b_1, b_2), (c_1, c_2)$  не пересекаются в одной точке и, как мы видели в [прим. 19.2](#), существует единственная гладкая коника  $C$ , касающаяся всех этих пяти прямых. Преобразование  $C : \ell_1 \xrightarrow{\sim} \ell_2$ , переводящее точку  $x \in \ell_1$  в точку пересечения прямой  $\ell_2$  с отличной от  $\ell_1$  касательной, опущенной из  $x$  на  $C$ , является гомографией, ибо оно биективно и рационально. В самом деле, коэффициенты уравнений касательных, опущенных из  $x$  на  $C$ , суть координаты точек пересечения двойственной коники  $C^\times \subset \mathbb{P}_2^\times$  с прямой  $x^\times = \text{Ann}(x)$ . Одна из этих точек, задающая прямую  $\ell_1$ , известна. Поэтому вторая рационально через неё выражается. Поскольку  $C$  и  $\varphi$  одинаково действуют на  $a_1, b_1, c_1$ , гомография  $C : \ell_1 \xrightarrow{\sim} \ell_2$  совпадает  $\varphi$ . Образом и прообразом точки  $q = \ell_1 \cap \ell_2$  в этом случае являются точки пересечения  $\ell_2 \cap C$  и  $\ell_1 \cap C$  соответственно.

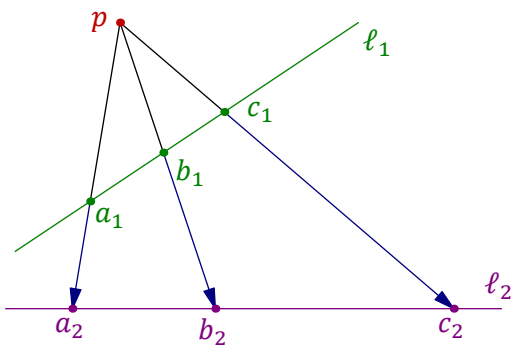


Рис. 19◊4. Перспектива  $p : \ell_1 \rightarrow \ell_2$ .

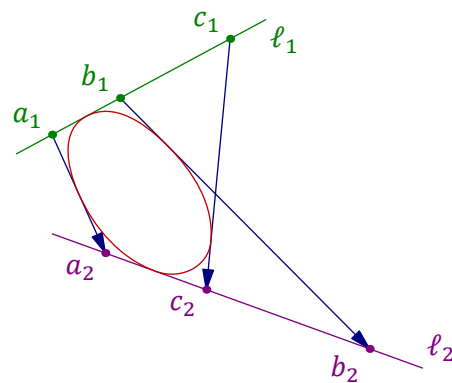


Рис. 19◊5. Гомография  $C : \ell_1 \rightarrow \ell_2$ .

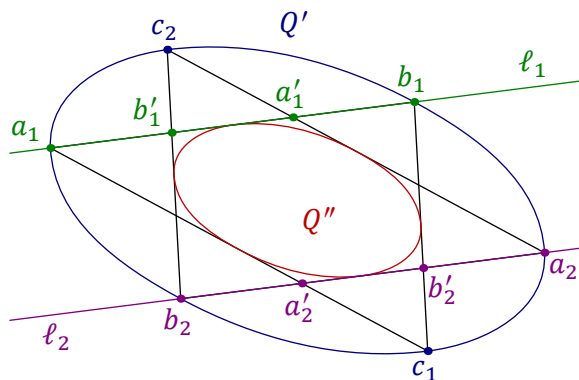
<sup>1</sup>См. [прим. 18.1](#) на стр. 219.

Итак, каждая гомография  $\ell_1 \simeq \ell_2$  либо является перспективой, либо высекается семейством касательных к некоторой гладкой конике. Обратите внимание, что это описание двойственно [предл. 18.2](#) на стр. 225, и что центр перспективы  $p$  и коника  $C$  однозначно определяются гомографией  $\varphi : \ell_1 \simeq \ell_2$ .

**Предложение 19.3 (теорема о вписанно-описанных треугольниках)**

Два треугольника  $a_1 b_1 c_1$  и  $a_2 b_2 c_2$  вписаны в одну и ту же гладкую конику  $C'$  если и только если они описаны вокруг одной и той же гладкой коники  $C''$ .

**Доказательство.** Пусть точки  $a_1, b_1, c_1, a_2, b_2, c_2$  лежат на конике  $C'$ , как на [рис. 19◊6](#). Рассмотрим прямые  $\ell_1 = (a_1 b_1), \ell_2 = (a_2 b_2)$  и обозначим через  $c_2 : \ell_1 \simeq C'$  и  $c_1 : C' \simeq \ell_2$  проекцию прямой  $\ell_1$  из точки  $c_2$  на конику  $C'$  и проекцию коники  $C'$  на прямую  $\ell_2$  из точки  $c_1$ . Их композиция  $c_1 \circ c_2 : \ell_1 \simeq \ell_2$  переводит  $a_1 \mapsto a'_2, b'_1 \mapsto b_2, a'_1 \mapsto a_2, b_1 \mapsto b'_2$  и является неперспективной гомографией, а значит, задаётся семейством касательных к некоторой гладкой конике  $C''$ , вписанной в оба треугольника  $a_1 b_1 c_1$  и  $a_2 b_2 c_2$ . Обратная импликация проективно двойственна доказанной.  $\square$



**Рис. 19◊6.** Вписанно-описанные треугольники.

**Следствие 19.3 (поризм Понселе для треугольников)**

Если пара коник  $C'$  и  $C''$  такова, что существует треугольник  $a_1 b_1 c_1$ , одновременно вписанный в  $C'$  и описанный около  $C''$ , то аналогичный треугольник  $a_2 b_2 c_2$ , одновременно вписанный в  $C'$  и описанный около  $C''$ , можно нарисовать стартовав с любой точки  $a_2 \in C'$ , из которой можно опустить две касательные на конику  $C''$ .

**Доказательство.** В самом деле, проведём из  $a_2$  две касательные  $(a_2 b_2)$  и  $(a_2 c_2)$  к конике  $C''$  до их пересечения с  $C'$  в точках  $b_2, c_2 \in C'$ , как на [рис. 19◊6](#). По [предл. 19.3](#), треугольники  $a_1 b_1 c_1$  и  $a_2 b_2 c_2$  описаны вокруг некоторой коники, а поскольку существует лишь одна коника, касающаяся пяти прямых  $(ab), (bc), (ca), (a_2 b_2), (a_2 c_2)$ , эта коника и есть  $C''$ .  $\square$

**19.1.4. Гармонически описанная квадрика.** Скажем, что набор из  $(n + 1)$  точек

$$p_0, p_1, \dots, p_n \in \mathbb{P}_n$$

является *автополярным симплексом* гладкой квадрики  $Q \subset \mathbb{P}_n$ , если полярой каждой из точек  $p_i$  является гиперплоскость, порождённая остальными  $n$  точками  $p_v$  с  $v \neq i$ . На алгебраическом языке это означает, что векторы  $p_i$  образуют ортогональный базис квадратичной формы  $q$ , задающей квадрикой  $Q$ . Квадрика  $Q'$  называется *гармонически описанной* около гладкой квадрики  $Q$ , если она проходит через вершины какого-нибудь автополярного симплекса квадрики  $Q$ .

## ТЕОРЕМА 19.2

Пусть основное поле  $\mathbb{k}$  алгебраически замкнуто. Квадрика  $Q' = V(f)$  с матрицей Грама  $F$  гармонически описана около гладкой квадрики  $Q = V(g)$ , имеющей в том же базисе матрицу Грама  $G$ , если и только если  $\text{tr}(G^{-1}F) = 0$ , и в этом случае каждая точка  $p \in Q' \setminus Q$  является вершиной автополярного относительно  $Q$  симплекса, вписанного в квадрику  $Q'$ .

Доказательство. Пусть  $\mathbb{P}_n = \mathbb{P}(V)$ . Матрица  $G^{-1}F$  является матрицей такого единственного линейного оператора  $\varphi : V \rightarrow V$ , что  $\tilde{f}(u, w) = \tilde{g}(u, \varphi w)$  для всех  $u, w \in V$ , см. н° 14.2.4 на стр. 174. Поэтому  $\text{tr}(G^{-1}F)$  зависит только от квадратичных форм  $f$  и  $g$ , а не от базиса, в котором пишутся матрицы Грама. В базисе из векторов  $p_i$ , образующих вершины автополярного относительно  $Q$  симплекса, вписанного в  $Q'$ , матрица Грама  $G$  формы  $g$  диагональна с ненулевыми диагональными элементами, а все диагональные элементы матрицы Грама  $F$  формы  $f$  нулевые. Поэтому все диагональные элементы матрицы  $G^{-1}F$  тоже нулевые, и  $\text{tr}(G^{-1}F) = 0$ .

Покажем индукцией по  $n$ , что при выполнении условия  $\text{tr}(G^{-1}F) = 0$  выполняется последнее утверждение теоремы. При  $n = 1$  выберем в  $V$  базис  $e_0, e_1$  с  $f(e_0) = 0$  и  $\tilde{g}(e_0, e_1) = 0$ . Тогда

$$G = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix}, \quad F = \begin{pmatrix} 0 & b \\ b & c \end{pmatrix},$$

и условие  $\text{tr}(G^{-1}F) = 0$  влечёт равенство  $c = 0$ , откуда  $f(x_0, x_1) = 2bx_0x_1$  и  $Q' = \{e_0, e_1\}$ , как и требуется. При  $n \geq 2$  рассмотрим точку  $e_0 \in Q' \setminus Q$  и обозначим через  $H \simeq \mathbb{P}_{n-1}$  полару этой точки относительно квадрики  $Q$ . Для любого базиса  $e_1, \dots, e_n$  в  $H$  матрицы Грама форм  $f$  и  $g$  в базисе  $e_0, e_1, \dots, e_n$  имеют вид

$$G = \begin{pmatrix} c & 0 & \dots & 0 \\ 0 & & & \\ \vdots & & G_H & \\ 0 & & & \end{pmatrix}, \quad F = \begin{pmatrix} 0 & * & \dots & * \\ * & & & \\ \vdots & & F_H & \\ * & & & \end{pmatrix},$$

где  $F_H$  и  $G_H$  суть матрицы Грама квадратик  $Q' \cap H$  и  $Q \cap H$  в базисе  $e_1, \dots, e_n$ . Следовательно, число  $c$  и матрица  $G_H$  обратимы, квадрика  $Q \cap H$  гладкая, а

$$G^{-1} = \begin{pmatrix} c^{-1} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & & & \\ \vdots & & G_H^{-1} & \\ 0 & & & \end{pmatrix}.$$

Поэтому равенство  $\text{tr}(G^{-1}F) = 0$  влечёт равенство  $\text{tr}(G_H^{-1}F_H) = 0$ , и по индукции любая точка  $p_1 \in (Q' \cap H) \setminus (Q \cap H)$  является вершиной автополярного относительно  $Q \cap H$  симплекса  $p_1 p_2 \dots p_n$ , вписанного в  $Q' \cap H$ . Симплекс  $e_0 p_1 p_2 \dots p_n$  автополярен относительно  $Q$  и вписан в  $Q'$ .  $\square$

## ПРИМЕР 19.4 (ОБЩИЕ ГИПЕРПЛОСКОСТИ В ПРОСТРАНСТВЕ КВАДРИК)

Всякая гиперплоскость в пространстве  $\mathbb{P}(S^2V^*)$  квадрик на  $\mathbb{P}_n = \mathbb{P}(V)$  задаётся однородным линейным уравнением вида

$$0 = \sum_{ij} a_{ij} b_{ij} = \text{tr} AB, \quad (19-1)$$

где  $A = (a_{ij})$  — постоянная симметрическая матрица коэффициентов уравнения гиперплоскости, а  $B = (b_{ij})$  переменная симметрическая матрица координат в пространстве  $S^2V^*$ . Матрицу  $A$  можно воспринимать как матрицу Грама некоей фиксированной квадрики  $Q_A \subset \mathbb{P}^n$ . Если эта квадрика гладкая<sup>1</sup>, то уравнение (19-1) задаёт гиперплоскость, состоящую из всех квадрик, гармонически описанных около квадрики  $Q_A^\times$  с матрицей Грама  $A^{-1}$ .

**19.2. Подпространства, лежащие на гладкой квадрике.** Ортогональная группа невырожденной квадратичной формы  $q \in S^2V^*$  действует на проективном пространстве  $\mathbb{P}(V)$ , переводя гладкую квадрику  $Q = V(q)$  в себя. Согласно сл. 15.2 на стр. 183, это действие позволяет перевести любое проективное подпространство  $L \subset Q$  в любое другое подпространство  $L' \subset Q$  той же размерности. В частности, ортогональная группа транзитивно действует на точках квадрики и для любых точек  $p_1, p_2 \in Q$  биективно отображает множество  $k$ -мерных подпространств  $L \subset Q$ , проходящих через  $p_1$ , в аналогичное множество  $k$ -мерных подпространств  $L' \subset Q$ , проходящих через  $p_2$ .

**19.2.1. Планарность.** Размерность максимального по включению проективного пространства, целиком лежащего на гладкой квадрике  $Q$ , называется *планарностью* квадрики  $Q$ . Планарность пустой квадрики, задаваемой анизотропной квадратичной формой, по определению полагается равной  $-1$ . Квадрики планарности  $0$  суть непустые квадрики, не содержащие прямых. Через каждую точку  $m$ -планарной квадрики можно провести  $m$ -мерное проективное подпространство, целиком лежащее на квадрике, и никакое  $(m + 1)$ -мерное проективное подпространство на такой квадрике не лежит.

Согласно сл. 15.3 на стр. 184, уравнение гладкой квадрики  $Q = V(q)$  в  $\mathbb{P}^n = \mathbb{P}(V)$  в подходящих однородных координатах записывается в виде

$$x_0x_1 + x_2x_3 + \dots + x_{2m}x_{2m+1} = \alpha(x_{2m+2}, \dots, x_n), \quad (19-2)$$

где  $-1 \leq m \leq (n + 1)/2$ ,

где  $\alpha$  — анизотропная квадратичная форма от  $n - 2m - 1$  переменных, а число  $2m + 2$  равно размерности гиперболического слагаемого в разложении пространства  $V$  в прямую ортогональную относительно формы  $\tilde{q}$  сумму гиперболического и анизотропного подпространств. Таким образом, максимум размерностей изотропных относительно формы  $\tilde{q}$  векторных подпространств в  $V$  равен  $m + 1$  и, стало быть, планарность квадрики (19-2) равна  $m$ . В частности, квадрики вида (19-2) с разными  $m$  не могут быть переведены одна в другую проективным преобразованием.

Пример 19.5 (квадрики максимальной планарности)

Максимально возможная планарность квадрики  $Q \subset \mathbb{P}^n$  равна  $(n - 1)/2$  при нечётном  $n$  и  $(n - 2)/2$  при чётном  $n$ . Над алгебраически замкнутым полем все невырожденные квадрики имеют максимальную планарность. Над любым полем уравнение квадрики максимальной планарности в  $\mathbb{P}^n$  в подходящих однородных координатах записывается в виде

$$0 = x_0x_1 + x_2x_3 + \dots + x_{2m}x_{2m+1} \text{ при } n = 2m + 1, \quad (19-3)$$

$$x_0^2 = x_1x_{m+1} + x_2x_{m+2} + \dots + x_mx_{2m} \text{ при } n = 2m. \quad (19-4)$$

Поэтому все квадрики максимальной планарности переводятся друг в друга проективными преобразованиями. Например, все непустые гладкие коники на  $\mathbb{P}^2$  проективно конгруэнтны.

<sup>1</sup>Что так в общем случае.

## Предложение 19.4

Сечение гладкой квадрики  $Q \subset \mathbb{P}_n$  произвольной гиперплоскостью  $\Pi$  либо является гладкой квадрикой в этой гиперплоскости, либо имеет единственную особую точку  $p \in \Pi \cap Q$ . Последнее равносильно тому, что  $\Pi = T_p Q$  касается квадрики в точке  $p$ , и в этом случае  $Q \cap T_p$  является конусом с вершиной в  $p$  над гладкой квадрикой на единицу меньшей планарности и на два меньшей размерности, чем у  $Q$ , расположенной в  $(n - 2)$ -мерной плоскости, дополнительной к  $p$  внутри  $T_p Q$ .

Доказательство. Пусть  $\mathbb{P}_n = \mathbb{P}(V)$ ,  $\Pi = \mathbb{P}(W)$  и  $Q = V(q)$ . Ядро ограничения оператора корреляции  $\hat{q}: V \rightarrow V^*$  на подпространство  $W \subset V$  является пересечением  $W$  с одномерным подпространством  $W^\perp \subset V$ . Это пересечение либо нулевое, либо является точкой  $p \in \Pi$ . В первом случае квадрика  $Q \cap \Pi$  невырождена, а во втором случае — имеет единственную особую точку  $p$ , причём  $\Pi = \mathbb{P}(p^\perp)$  является касательным пространством<sup>1</sup> к  $Q$  в точке  $p$ . Согласно теор. 17.1 на стр. 209, особая квадрика  $Q \cap \Pi$  в пространстве  $\Pi \simeq \mathbb{P}_{n-1}$  является линейным соединением точки  $p$  и неособой квадрики, лежащей в любой не проходящей через  $p$  гиперплоскости  $\mathbb{P}(U) \simeq \mathbb{P}_{n-2} \subset \Pi$ . Так как ограничение квадратичной формы  $q$  на подпространство  $U \subset V$  невырождено, имеется ортогональное разложение  $V = U \oplus U^\perp$ . Ограничение формы  $q$  на двумерное пространство  $U^\perp$  невырождено, и в  $U^\perp$  есть изотропная прямая  $p \subset U^\perp$ . Следовательно,  $U^\perp \simeq H_2$  является гиперболической плоскостью, и размерность гиперболической составляющей ограничения  $q|_U$  на два меньше, чем у самой формы  $q$  на  $V$ , т. е. планарность гладкой квадрики  $Q \cap \mathbb{P}(U)$  на единицу меньше, чем у  $Q$ .  $\square$

**19.3. Классификация проективных квадрик.** Две квадрики называются *проективно конгруэнтными*, если одна переводится в другую линейным проективным автоморфизмом объемлющего пространства. Поскольку над алгебраически замкнутым полем уравнение квадрики  $Q \subset \mathbb{P}_n$  всегда приводится линейной заменой координат к виду

$$x_0^2 + x_1^2 + \dots + x_{r-1}^2 = 0, \quad \text{где } r = \text{rk } Q = n - \dim \text{Sing } Q,$$

мы заключаем, что над алгебраически замкнутым полем две квадрики проективно конгруэнтны тогда и только тогда, когда у них одинаковый ранг.

В теор. 17.1 на стр. 209 мы видели, что над любым полем каждая квадрика  $Q \subset \mathbb{P}_n$  является линейным соединением своего пространства особых точек  $\text{Sing } Q$  и неособой квадрики  $Q \cap L$  в любом дополнительном к  $\text{Sing } Q$  проективном подпространстве  $L \subset \mathbb{P}_n$ ,  $L \cap \text{Sing } Q = \emptyset$ ,  $\dim L = \text{rk } Q - 1$ . Так как любая пара дополнительных подпространств переводится в любую другую такую пару проективным автоморфизмом, классификация квадрик над произвольным полем сводится к классификации гладких квадрик.

Гладкие квадрики разной планарности, очевидно, не могут быть проективно конгруэнтны. В прим. 19.5 мы видели, что над произвольным полем все квадрики максимально возможной в  $\mathbb{P}_n$  планарности  $[(n - 1)/2]$  проективно конгруэнтны. Уравнение непустой квадрики не максимальной планарности  $m$  в подходящих координатах приводится к виду (19-2):

$$x_0 x_1 + x_2 x_3 + \dots + x_{2m} x_{2m+1} = \alpha(x_{2m+2}, \dots, x_n),$$

где  $\alpha$  — ненулевая анизотропная форма, и классификация таких квадрик над произвольным полем  $\mathbb{k}$  требует описания имеющихся над  $\mathbb{k}$  анизотропных квадратичных форм. Для многих

<sup>1</sup>См. формулу (17-5) на стр. 209.



полей, например, для поля  $\mathbb{Q}$ , множество классов анизотропных форм с точностью до изоморфизма представляется на сегодняшний день совершенно необозримым. Но над теми полями, где есть эффективное описание анизотропных форм, можно дать и полную классификацию проективных квадрик.

**19.3.1. Вещественные квадрики.** Над полем  $\mathbb{R}$  при каждом  $k \in \mathbb{N}$  есть единственная с точностью до изометрии и умножения на константу анизотропная форма от  $k$  переменных:

$$\alpha(x_1, x_2, \dots, x_k) = x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_k^2.$$

Поэтому каждая гладкая вещественная квадрика размерности  $n$ , лежащая в  $(n + 1)$ -мерном пространстве  $\mathbb{P}_{n+1}(\mathbb{R})$ , в подходящих однородных координатах задаётся уравнением

$$x_0x_1 + x_2x_3 + \dots + x_{2m}x_{2m+1} = x_{2m+2}^2 + x_{2m+3}^2 + \dots + x_{n+1}^2, \quad (19-5)$$

где  $-1 \leq m \leq n/2$ .

При разных  $m$  эти уравнения задают проективно неконгруэнтные квадрики разной планарности. Поэтому формула (19-5) доставляет полный список парно неконгруэнтных гладких вещественных квадрик. Мы будем обозначать квадрику (19-5) через  $Q_{n,m}$  и называть вещественной  $m$ -планарной квадрикой размерности  $n$ . Планарность  $m$ , размерность  $n$  и абсолютная величина индекса<sup>1</sup>  $\iota$  квадратичной формы, задающей вещественную квадрику, связаны равенством

$$n = 2m + \iota.$$

В ортогональном базисе уравнение квадрики  $Q_{n,m}$  принимает вид

$$t_0^2 + t_1^2 + \dots + t_m^2 = t_{m+1}^2 + t_{m+2}^2 + \dots + t_{n+1}^2.$$

Гиперболические координаты  $x_\nu$  связаны с ортогональными координатами  $t_\nu$  формулами

$$x_{2i} = t_{m+i} + t_i, \quad x_{2i+1} = t_{m+i} - t_i \quad \text{при } 0 \leq i \leq m$$

и  $x_j = t_j$  при  $2m + 2 \leq j \leq n + 1$ .

Квадрика планарности 0 задаётся в ортогональных координатах уравнением

$$t_0^2 = t_1^2 + t_2^2 + \dots + t_n^2$$

и называется *эллиптической*. Она непуста и не содержит прямых. Квадрики положительной планарности традиционно называют *гиперболическими*, не смотря на то, что гиперболической формой задаётся всего одна из них — чётномерная квадрика максимальной планарности  $Q_{2k,k}$ . Все  $(-1)$ -планарные квадрики пусты. Из предл. 19.4 на стр. 240 вытекает

**Следствие 19.4**

Пересечение гладкой вещественной  $n$ -мерной  $m$ -планарной квадрики  $Q_{n,m}$  с касательной гиперплоскостью в точке  $p$  является конусом с вершиной в  $p$  над гладкой квадрикой  $Q_{n-2,m-1}$  размерности  $n - 2$  и планарности  $m - 1$ .  $\square$

<sup>1</sup>См. н° 15.5 на стр. 187.

**19.4. Квадратичные поверхности.** Особая квадратичная поверхность минимального ранга 1 в подходящих координатах задаётся уравнением  $x_0^2 = 0$  и называется *двойной плоскостью*.

Особая квадрика  $Q \subset \mathbb{P}_3$  ранга 2 является линейным соединением вершинной прямой  $\text{Sing } Q$  и гладкой квадрики на любой дополнительной прямой. Если эта гладкая квадрика пуста, то  $Q = \text{Sing } Q$  — это прямая, целиком состоящая из особых точек. Такая квадрика называется *двойной прямой*. Над  $\mathbb{R}$  двойная прямая задаётся уравнением  $x_0^2 + x_1^2 = 0$ , а над алгебраически замкнутыми полями таких квадрик не бывает. Если квадрика  $Q$  пересекает дополнительную к  $\text{Sing } Q$  прямую по двум точкам, то она является объединением двух различных плоскостей, пересекающихся по прямой  $\text{Sing } Q$ . Такая квадрика называется *распавшейся*. Уравнение распавшейся квадрики является произведением двух различных линейных форм и в подходящих координатах имеет вид  $x_0 x_1 = 0$ .

Особая квадрика  $Q \subset \mathbb{P}_3$  ранга 3 имеет единственную особую точку  $s = \text{Sing } Q$  и является линейным соединением этой точки с гладкой коникой в произвольной не проходящей через  $s$  плоскости  $\Pi \subset \mathbb{P}_3$ . Если эта коника пуста, квадрика  $Q$  состоит из единственной точки  $s$  и называется *двойной точкой*. Над  $\mathbb{R}$  двойная точка задаётся уравнением  $x_0^2 + x_1^2 + x_2^2 = 0$ , над алгебраически замкнутым полем таких квадрик нет. Если гладкая коника  $Q \cap \Pi$  непуста, квадрика  $Q$  называется *простым конусом* с вершиной в  $p$ . Над любым полем уравнение такой квадрики приводится к виду  $x_1^2 = x_0 x_2$ , и её вершина в этих координатах находится в точке  $(0 : 0 : 0 : 1)$ .

**Упражнение 19.7.** Покажите, что каждая лежащая на простом конусе прямая проходит через его вершину.

Гладкая квадратичная поверхность  $Q \subset \mathbb{P}_3$  либо пуста, либо 0-планарна, либо 1-планарна. Не содержащая прямых непустая квадрика планарности нуль задаётся уравнением

$$x_0 x_1 = \alpha(x_2, x_3),$$

где  $\alpha$  — анизотропная квадратичная форма от двух переменных. Классификация таких квадрик требует описания бинарных анизотропных квадратичных форм над полем  $\mathbb{k}$ . Над  $\mathbb{R}$  такая квадрика ровно одна — это эллиптическая квадрика  $Q_{2,0}$ , уравнение которой можно записать в виде  $x_0 x_1 = x_2^2 + x_3^2$  или, если угодно, в виде  $t_0^2 = t_1^2 + t_2^2 + t_3^2$ .

**19.4.1. Гладкая квадратичная поверхность планарности один.** Над любым полем все гладкие квадратичные поверхности планарности 1 проективно конгруэнтны. Удобной геометрической моделью такой поверхности является *квадрика Сегре* в проективном пространстве

$$\mathbb{P}_3 = \mathbb{P}(\text{Mat}_{2 \times 2}(\mathbb{k})),$$

задаваемая квадратным уравнением  $\det(A) = 0$  и состоящая из матриц ранга 1:

$$Q_S \stackrel{\text{def}}{=} \left\{ \left( \begin{array}{cc} \alpha_{00} & \alpha_{01} \\ \alpha_{10} & \alpha_{11} \end{array} \right) \neq 0 \mid \det \begin{pmatrix} \alpha_{00} & \alpha_{01} \\ \alpha_{10} & \alpha_{11} \end{pmatrix} = \alpha_{00} \alpha_{11} - \alpha_{01} \alpha_{10} = 0 \right\}. \quad (19-6)$$

Каждый оператор  $F : U \rightarrow U$  ранга 1 на двумерном векторном пространстве  $U$  имеет одномерный образ, который является точкой на  $\mathbb{P}_1 = \mathbb{P}(U)$ , и одномерное ядро, аннулятор которого является точкой на  $\mathbb{P}_1^\times = \mathbb{P}(U^*)$ . Наоборот, любые ненулевые вектор  $v \in U$  и ковектор  $\xi \in U^*$  задают на  $U$  линейный оператор ранга 1

$$v \otimes \xi : U \rightarrow U, \quad u \mapsto v \cdot \xi(u), \quad (19-7)$$

образ которого порождается вектором  $v$ , а аннулятор ядра — ковектором  $\xi$ . Оператор (19-7) называется *тензорным произведением* вектора  $v$  и ковектора  $\xi$ . При умножении  $v$  и  $\xi$  на ненулевые константы, оператор  $v \otimes \xi$  умножается на произведение этих констант. Мы получаем биекцию между точками квадрики Сегре и точками  $(v, \xi) \in \mathbb{P}_1 \times \mathbb{P}_1^\times$ . Вложение

$$s : \mathbb{P}(U) \times \mathbb{P}(U^*) \hookrightarrow \mathbb{P}(\text{End}(U)), \quad (v, \xi) \mapsto v \otimes \xi, \quad (19-8)$$

образом которого является квадрика Сегре, называется *вложением Сегре*.

**Упражнение 19.8.** Покажите, что касательное пространство к квадрике Сегре в точке  $v \otimes \xi$  состоит из таких линейных операторов  $f : U \rightarrow U$ , что  $f(\text{Ann } \xi) \subset \mathbb{k} \cdot v$ .

Для координатного пространства  $U = \mathbb{k}^2$ , вектора  $x \in \mathbb{k}^2$  с координатами  $(x_0 : x_1)$  и ковектора  $\xi \in \mathbb{k}^{2*}$  с координатам  $(\xi_0 : \xi_1)$  в двойственном базисе оператор  $x \otimes \xi$  имеет в стандартном базисе пространства  $\mathbb{k}^2$  матрицу

$$\begin{pmatrix} \xi_0 x_0 & \xi_1 x_0 \\ \xi_0 x_1 & \xi_1 x_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \end{pmatrix} \cdot (\xi_0 \quad \xi_1). \quad (19-9)$$

Точки  $(x_0 : x_1) \in \mathbb{P}_1$  и  $(\xi_0 : \xi_1) \in \mathbb{P}_1^\times$  восстанавливаются по заданной матрице ранга 1 как отношение между её строками и отношение между её столбцами соответственно, и для любых двух заданных таких отношений матрица (19-9) является единственной с точностью до пропорциональности матрицей, в которой эти отношения реализуются.

**Упражнение 19.9.** Обязательно убедитесь во всём этом этом!

Матрицы с предписанным отношением строк  $x = (x_0 : x_1)$  составляют двумерное векторное подпространство в  $\text{Mat}_{2 \times 2}(\mathbb{k})$ . Его проективизация является образом «вертикальной» координатной прямой  $x \times \mathbb{P}_1^\times \subset \mathbb{P}_1 \times \mathbb{P}_1^\times$  при вложении (19-8) и представляет собою лежащую на квадрике Сегре прямую в  $\mathbb{P}_3$ . Аналогично, каждая «горизонтальная» координатная прямая  $\mathbb{P}_1 \times \xi \subset \mathbb{P}_1 \times \mathbb{P}_1^\times$  переводится вложением (19-8) в лежащую на квадрике Сегре прямую, образованную классами пропорциональных матриц ранга 1 с фиксированным отношением столбцов  $\xi = (\xi_0 : \xi_1)$ . Поскольку отображение (19-8) является биекцией между  $\mathbb{P}_1 \times \mathbb{P}_1^\times$  и квадратикой Сегре, мы приходим к следующему заключению.

**Предложение 19.5**

Квадратичная поверхность планарности 1 в  $\mathbb{P}_3$  над произвольным полем  $\mathbb{k}$  замечается двумя семействами прямых так, что любые две прямые из одного семейства не пересекаются, любые две прямые из разных семейств пересекаются, каждая точка квадрики является точкой пересечения двух прямых из разных семейств, и каждая лежащая на квадрике прямая принадлежит ровно одному из семейств.

**Доказательство.** Проверки требует лишь последнее утверждение, означающее, что на квадрике Сегре не лежит никаких других прямых кроме образов координатных прямых произведения  $\mathbb{P}_1 \times \mathbb{P}_1^\times$  при отображении (19-8). Лежащая на квадрике  $Q_S$  прямая  $\ell$  содержится в пересечении этой квадрики с касательной плоскостью  $T_p Q_S$ , построенной в любой точке  $p \in \ell$ . Пересечение  $Q_S \cap T_p Q_S$  является коникой в плоскости  $T_p Q_S$  и содержит пару проходящих через  $p$  прямых из разных семейств. Тем самым, это распавшаяся коника, состоящая ровно из этих двух прямых, и прямая  $\ell$  — одна из них.  $\square$

УПРАЖНЕНИЕ 19.10. Покажите, что гомография  $\varphi : \mathbb{P}_1 \simeq \mathbb{P}_1$ , задаваемая не лежащей на квадрике  $Q_S$  точкой  $\varphi \in \mathbb{P}(\text{End}(U))$ , переводит точку  $p \in \mathbb{P}(U)$  в такую точку  $q \in \mathbb{P}(U)$ , что плоскость, порождённая точкой  $\varphi$  и прямолинейной образующей  $\mathbb{P}_1 \times p^\times \subset Q_S$ , пересекает квадрику  $Q_S$  по этой образующей и образующей  $q \times \mathbb{P}_1^\times$ .

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 19.6

Любые три прямые  $\ell_1, \ell_2, \ell_3 \subset \mathbb{P}_3$  лежат на некоторой квадрике. Если прямые попарно не пересекаются, то проходящая через них квадрика единственна, невырождена, 1-планарна и является объединением всех прямых, пересекающих каждую из прямых  $\ell_1, \ell_2, \ell_3$ .

Доказательство. Квадрики в  $\mathbb{P}_3 = \mathbb{P}(V)$  образуют проективное пространство  $\mathbb{P}_9 = \mathbb{P}(S^2V^*)$ . Так как любые 9 гиперплоскостей в  $\mathbb{P}_9$  пересекаются, через любые 9 точек в  $\mathbb{P}_3$  можно провести квадрику. Выбирая на каждой из прямых по 3 различные точки и проводя через эти точки квадрику, заключаем, что она целиком содержит все три прямые, а также любую прямую, пересекающую каждую из прямых  $\ell_i$  в трёх разных своих точках. Поскольку ни на какой особой квадрике нет трёх попарно непересекающихся прямых, построенная квадрика гладкая и 1-планарная, если  $\ell_i \cap \ell_j = \emptyset$  для всех  $i \neq j$ . В этом случае все три прямые  $\ell_i$  лежат в одном семействе прямолинейных образующих, и каждая прямая из второго семейства образующих пересекает каждую из прямых  $\ell_i$ .  $\square$

УПРАЖНЕНИЕ 19.11. Сколько прямых в  $\mathbb{P}_3$  пересекает каждую из четырёх заданных прямых? Перечислите все возможные над полями  $\mathbb{R}$  и  $\mathbb{C}$  ответы. Какие из них устойчивы к малым шевелениям заданных прямых?

**19.5. Квадрика Плюккера в  $\mathbb{P}_5$  и прямые в  $\mathbb{P}_3$ .** Множество всех  $k$ -мерных векторных подпространств в фиксированном  $n$ -мерном векторном пространстве называется *грассманианом*  $\text{Gr}(k, n)$ . Например, проективное пространство  $\mathbb{P}_n = \text{Gr}(1, n+1)$ , а двойственное ему пространство гиперплоскостей  $\mathbb{P}_n^\times = \text{Gr}(n, n+1)$ . Простейшим отличным от проективного пространства грассманианом является  $\text{Gr}(2, 4)$ . Его точки суть двумерные векторные подпространства в векторном пространстве  $V \simeq \mathbb{K}^4$  или, что то же самое, проективные прямые в  $\mathbb{P}_3 = \mathbb{P}(V)$ . Он вкладывается в проективное пространство  $\mathbb{P}_5 = \mathbb{P}(\Lambda^2V)$  отображением Плюккера

$$\mathbb{P} : \text{Gr}(2, 4) \hookrightarrow \mathbb{P}(\Lambda^2V), \quad U \mapsto \Lambda^2U, \quad (19-10)$$

которое переводит прямую  $(ab) \subset \mathbb{P}_3$ , являющуюся проективизацией двумерного векторного подпространства  $U \subset V$  с базисом  $a, b$ , в одномерное подпространство  $\Lambda^2U \subset \Lambda^2V$ , порождённое грассмановым произведением  $a \wedge b$ .

УПРАЖНЕНИЕ 19.12. Убедитесь, что отображение (19-10) инъективно.

Согласно сл. 16.2 на стр. 195, разложимость грассмановой квадратичной формы  $\omega \in \Lambda^2V$  на два линейных множителя равносильна тому, что  $\omega \wedge \omega = 0$ . Это соотношение задаёт в пространстве  $\mathbb{P}_5 = \mathbb{P}(\Lambda^2V)$  квадрику Плюккера

$$P = V(q) = \{ \omega \in \Lambda^2V \mid \omega \wedge \omega = 0 \}, \quad (19-11)$$

которая является множеством изотропных векторов билинейной формы  $\tilde{q} : \Lambda^2V \times \Lambda^2V \rightarrow \mathbb{K}$ , однозначно с точностью до пропорциональности определяемой тем, что для всех  $\omega_1, \omega_2 \in \Lambda^2V$  в одномерном векторном пространстве  $\Lambda^4V$  выполняется равенство

$$\omega_1 \wedge \omega_2 = \tilde{q}(\omega_1, \omega_2) \cdot e_1 \wedge e_2 \wedge e_3 \wedge e_4, \quad (19-12)$$

где  $e_1, e_2, e_3, e_4$  — произвольный базис в  $V$ . Поскольку однородные грассмановы многочлены степени два коммутируют друг с другом, эта билинейная форма симметрична.

Упражнение 19.13. Убедитесь, что задаваемая равенством (19-12) форма  $\tilde{q}$  билинейна и невырождена, а при выборе другого базиса в  $V$  она умножается на ненулевую константу. Напишите её матрицу Грама в стандартном базисе из шести мономов  $e_{ij} = e_i \wedge e_j$ .

В координатах  $x_{ij}$  относительно стандартного базиса из мономов  $e_{ij} = e_i \wedge e_j$ ,  $1 \leq i < j \leq 4$ , равенство  $\omega \wedge \omega = 0$  для бивектора  $\omega = \sum_{ij} x_{ij} e_{ij}$  принимает вид

$$x_{12}x_{34} - x_{13}x_{24} + x_{14}x_{23} = 0, \quad (19-13)$$

а отображение (19-10) переводит прямую  $(ab)$ , порождённую векторами  $a, b$ , строки координат которых в базисе  $e_1, e_2, e_3, e_4$  составляют  $2 \times 4$  матрицу

$$\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \\ b_1 & b_2 & b_3 & b_4 \end{pmatrix},$$

в грассманову квадратичную форму  $a \wedge b$  с координатами  $x_{ij} = \det \begin{pmatrix} a_i & a_j \\ b_i & b_j \end{pmatrix}$ , равными  $2 \times 2$  минорам этой матрицы.

Упражнение 19.14. Убедитесь в этом и выясните, существует ли комплексная  $2 \times 4$ -матрица, шесть  $2 \times 2$ -миноров которой, выписанные в случайном порядке, суть а)  $\{2, 3, 4, 5, 6, 7\}$  б)  $\{3, 4, 5, 6, 7, 8\}$ ? Если да, то предъявите такую матрицу явно.

Поскольку квадратичная форма (19-13) гиперболическая, квадрика (19-11) 2-планарна. Таким образом, любая 2-планарная квадрика в  $\mathbb{P}_5$  над любым полем отличной от 2 характеристики может восприниматься как множество прямых в подходящем пространстве  $\mathbb{P}_3$ .

Лемма 19.1

Две прямые  $\ell_1, \ell_2 \subset \mathbb{P}_3$  пересекаются если и только если их плюккеровы образы ортогональны относительно квадратичной формы (19-12).

Доказательство. Если  $\ell_1 \cap \ell_2 = \emptyset$ , то в  $V$  существует такой базис  $e_1, e_2, e_3, e_4$ , что  $\ell_1 = (e_1 e_2)$ , а  $\ell_2 = (e_3 e_4)$ . Тогда  $\mathbb{p}(\ell_1) \wedge \mathbb{p}(\ell_2) = e_1 \wedge e_2 \wedge e_3 \wedge e_4 \neq 0$ . Если  $\ell_1$  и  $\ell_2$  пересекаются в точке  $a$ , то  $\ell_1 = (ab)$ , а  $\ell_2 = (ac)$  для некоторых  $b, c \in V$ , и  $\mathbb{p}(\ell_1) \wedge \mathbb{p}(\ell_2) = a \wedge b \wedge a \wedge c = 0$ .  $\square$

Следствие 19.5

Для любой точки  $p = \mathbb{p}(\ell) \in P$  пересечение  $P \cap T_p P = \{\mathbb{p}(\ell') \mid \ell' \cap \ell \neq \emptyset\}$ .

**19.5.1. Связки и пучки прямых в  $\mathbb{P}_3$ .** Множество прямых в  $\mathbb{P}_3$  называется *связкой*, если его плюккеров образ является двумерной плоскостью. Каждая такая плоскость  $\pi \subset P$  линейно порождается тройкой неколлинеарных точек  $p_i = \mathbb{p}(\ell_i)$ ,  $i = 1, 2, 3$ . При этом

$$\pi = T_{p_1} P \cap T_{p_2} P \cap T_{p_3} P \subset P.$$

По лем. 19.1 и сл. 19.5 соответствующая связка прямых состоит из всех прямых, пересекающих каждую из трёх попарно пересекающихся прямых  $\ell_1, \ell_2, \ell_3$  в  $\mathbb{P}_3$ . Три прямые в  $\mathbb{P}_3$  попарно пересекаются ровно в двух случаях: когда они лежат в одной плоскости или когда они проходят через одну точку. Таким образом, есть два геометрически разных типа связок прямых на  $\mathbb{P}_3$ :

$\alpha$ -плоскость  $\pi_\alpha(O) \subset P$ , состоящая из всех прямых, проходящих через данную точку  $O \in \mathbb{P}_3$

$\beta$ -плоскость  $\pi_\beta(\Pi) \subset P$ , состоящая из всех прямых, лежащих в данной плоскости  $\Pi \in \mathbb{P}_3$ .

Мы заключаем, что пюккерова квадрика заматается двумя семействами плоскостей разного типа так, что любые две плоскости одного типа всегда пересекаются ровно по одной точке

$$\begin{aligned}\pi_\beta(\Pi_1) \cap \pi_\beta(\Pi_2) &= \mathbb{P}(\Pi_1 \cap \Pi_2) \\ \pi_\alpha(O_1) \cap \pi_\alpha(O_2) &= \mathbb{P}((O_1 O_2)),\end{aligned}$$

а две плоскости  $\pi_\beta(\Pi)$ ,  $\pi_\alpha(O)$  разных типов не пересекаются при  $O \notin \Pi$ , а при  $O \in \Pi$  пересекаются по прямой, которая является пюккеровым образом пучка прямых, лежащих в плоскости  $\Pi$  и проходящих через точку  $O \in \Pi$ . Покажем, что все прямые, лежащие на квадрике Пюккера, имеют такой вид. Для этого рассмотрим конус  $C = P \cap T_p P$  с вершиной  $p$ , образованный всеми лежащими на квадрике  $P$  прямыми, проходящими через точку  $p$ , и зафиксируем какое-нибудь не содержащее  $p$  трёхмерное проективное подпространство  $H \subset T_p P$ , см. рис. 19◊7. Пересечение  $G = C \cap H$  является гладкой 1-планарной квадрикой в  $H$ , и любая проходящая через  $p$  прямая на  $P$  имеет вид  $(pp') = \pi_\alpha \cap \pi_\beta$  для некоторой точки  $p' \in G$  и плоскостей  $\pi_\alpha, \pi_\beta$  натянутых на точку  $p$  и пару проходящих через  $p'$  прямолинейных образующих квадрики  $G$ .

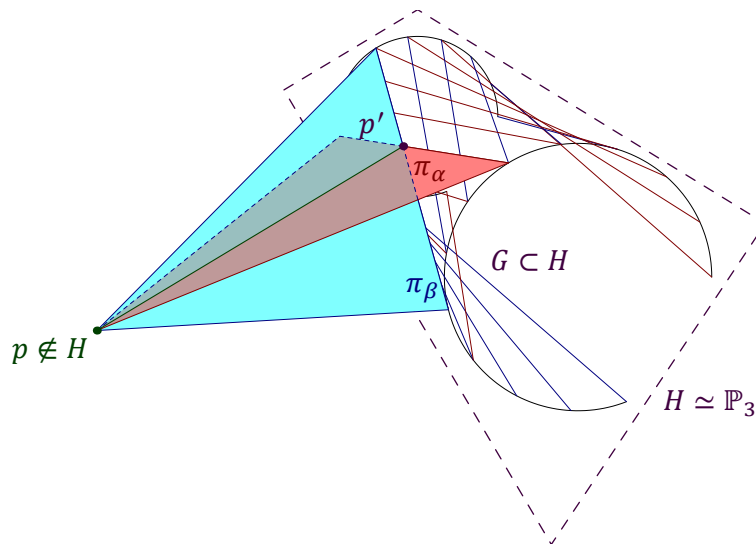


Рис. 19◊7. Конус  $C = P \cap T_p P$ .

## §20. Пучки квадратик

В этом параграфе мы по умолчанию считаем, что поле  $\mathbb{k}$  алгебраически замкнуто и  $\text{char } \mathbb{k} \neq 2$ .

**20.1. Базисное множество и спектр.** Напомню<sup>1</sup>, что прямые в пространстве квадратик  $\mathbb{P}(S^2V^*)$  на  $\mathbb{P}_n = \mathbb{P}(V)$  называются *пучками квадратик*. Такой пучок  $(Q_0, Q_1) \subset \mathbb{P}(S^2V^*)$  однозначно задаётся любой парой различных лежащих в нём квадратик  $Q_0 = V(q_0)$ ,  $Q_1 = V(q_1)$  и состоит из всех квадратик вида

$$Q_\lambda = V(\lambda_0 q_0 + \lambda_1 q_1) = \{v \in \mathbb{P}(V) \mid \lambda_0 q_0(v) + \lambda_1 q_1(v) = 0\}, \quad (20-1)$$

где  $\lambda = (\lambda_0 : \lambda_1) \in \mathbb{P}_1 = \mathbb{P}(\mathbb{k}^2)$ .

Пересечение базисных квадратик  $B = Q_0 \cap Q_1$  называется *базисным множеством* пучка. Поскольку каждая квадратика из пучка (20-1) проходит через  $B$ , базисное множество является пересечением всех квадратик пучка и не зависит от выбора базисных квадратик  $Q_0, Q_1$  на прямой  $(Q_0, Q_1)$ . Многочлен

$$\chi_{(q_0, q_1)}(t_0, t_1) \stackrel{\text{def}}{=} \det(t_0 q_0 + t_1 q_1) \in \mathbb{k}[t_0, t_1] \quad (20-2)$$

называется *характеристическим многочленом* пучка (20-1). Это однородный многочлен степени  $n + 1$  от  $t = (t_0 : t_1)$ . В отличие от базисного множества, характеристический многочлен (20-2) *зависит* от выбора базисных квадратик  $Q_0, Q_1$ , и даже их уравнений  $q_0, q_1$ . При переходе к другим двум базисным квадратикам в том же самом пучке или умножении их уравнений на константы переменные  $(t_0 : t_1)$  подвергаются обратимому линейному преобразованию. Поэтому алгебраическим инвариантом пучка является не сам многочлен (20-2), а только его класс по модулю обратимой линейной замены переменных.

Пучок квадратик называется *невыврожденным*, если в нём есть хоть одна гладкая квадратика. Это означает, что характеристический многочлен (20-2) отличен от нуля хотя бы в одной точке на  $\mathbb{P}_1$  и, в частности, является ненулевым многочленом. Поэтому в невырожденном пучке квадратик на  $\mathbb{P}_n$  может быть не более  $n + 1$  особых квадратик, причём вершинные подпространства никаких двух из них не пересекаются, так вектор, лежащий в ядре сразу двух корреляций  $\hat{q}_0, \hat{q}_1$ , лежит в ядре и любой их линейной комбинации  $\lambda_0 \hat{q}_0 + \lambda_1 \hat{q}_1$ , что означает вырожденность сразу всех квадратик пучка.

Множество вырожденных квадратик в невырожденном пучке (20-1) называют *спектром* этого пучка. Квадратичные формы  $\lambda_0 q_0 + \lambda_1 q_1$ , задающие квадратик из спектра, биективно соответствуют корням  $\lambda = (\lambda_0 : \lambda_1)$  характеристического многочлена (20-2). Будем называть *кратностью*  $\text{mult} Q_\lambda$  вырожденной квадратик  $Q_\lambda$ , отвечающей корню  $\lambda$  характеристического многочлена (20-2), кратность  $\text{mult}(\lambda)$  этого корня, т. е. максимальное такое  $k \in \mathbb{N}$ , что многочлен (20-2) делится в кольце многочленов  $\mathbb{k}[t_0, t_1]$  на  $\det^k(\lambda, t) = (t_1 \lambda_0 - t_0 \lambda_1)^k$ . Также положим по определению кратности всех гладких квадратик пучка равными нулю.

Над алгебраически замкнутым полем спектр невырожденного пучка квадратик на  $\mathbb{P}_n$  состоит ровно из  $n + 1$  квадратик с учётом их кратностей. Рассматриваемый как неупорядоченный набор из  $n + 1$  не обязательно различных точек на  $\mathbb{P}_1$  с точностью до дробно линейного автоморфизма  $\mathbb{P}_1$ , он не зависит от выбора базиса в пучке.

Лемма 20.1

Кратность  $\text{mult} S$  каждой особой квадратик  $S$  из невырожденного пучка строго больше размерности  $\dim \text{Sing } S$  пространства её особых точек.

---

<sup>1</sup>См. н° 17.6 на стр. 217.

Доказательство. Пусть квадратика  $G \subset \mathbb{P}^n$  неособа, а квадратика  $S \subset \mathbb{P}^n$  имеет  $\dim \text{Sing } S = k$ . Это означает, что её матрица Грама имеет  $\text{rk } S = (n + 1) - (k + 1) = n - k$ , и все миноры порядка  $n - k + 1$  и выше в ней — нулевые. Согласно прим. 9.2 на стр. 118, характеристический многочлен

$$\det(t_0 S + t_1 G) = \sum_{m=0}^{n+1} t_0^m t_1^{n+1-m} \cdot \sum_{\#I=\#J=m} s_{IJ} g_{ij} \tag{20-3}$$

делится на  $t_1^{k+1}$ . Поэтому кратность задающей  $S$  точки  $t = (1 : 0) \in \mathbb{P}_1$  не менее  $k + 1$ .  $\square$

**20.2. Невырожденные пучки коник.** Над алгебраически замкнутым полем  $\mathbb{k}$  невырожденный пучок коник на  $\mathbb{P}_2 = \mathbb{P}(V)$  может содержать 1, 2 или 3 различных особых коники, а его базисное множество конечно и может состоять из 1, 2, 3 или 4 различных точек. Если в пучке есть двойная прямая, то все его базисные точки лежат на этой прямой. Если в пучке есть распавшаяся коника  $\ell_1 \cup \ell_2$ , то все базисные точки такого пучка лежат на  $\ell_1 \cup \ell_2$ , причём на каждой из прямых  $\ell_1, \ell_2$  должна быть хотя бы одна базисная точка, так как любая гладкая коника пучка пересекает каждую из этих прямых.

**20.2.1. Пучок с одной базисной точкой.** Если базисное множество пучка состоит из единственной точки  $p$ , особой коникой в нём может быть лишь двойная прямая, касающаяся любой гладкой коники пучка в точке  $p$ . Наоборот, любая гладкая коника  $C$  и касающаяся её в произвольной точке  $p \in C$  двойная прямая  $\ell$  задают регулярный пучок коник с единственной базисной точкой  $p$ , и единственной особой коникой — двойной прямой  $\ell$ . Все гладкие коники этого пучка пересекаются друг с другом по единственной точке  $p$  и имеют в ней общую касательную см. рис. 20◊1.

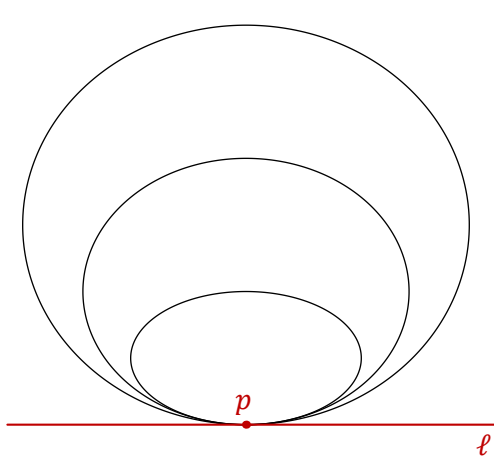


Рис. 20◊1. Пучок с одной базисной точкой ( $a = b = c = d = p$ ).

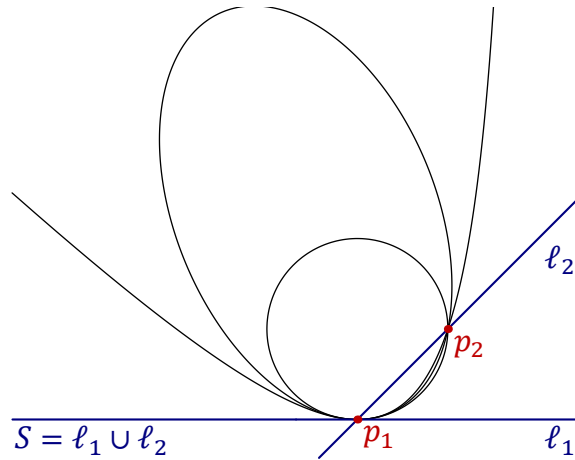


Рис. 20◊2. Пучок с двумя базисными точками  $p_1 = a = b = c, p_2 = d$  и одной вырожденной коникой  $S$ .

**20.2.2. Пучки с двумя базисными точками.** Если базисное множество пучка состоит из двух точек  $p_1, p_2$ , то вырожденными кониками в нём могут или двойная прямая  $\ell = (p_1 p_2)$  или такая распавшаяся коника  $\ell_1 \cup \ell_2$ , что  $p_1 \in \ell_1, p_2 \in \ell_2$ . Второй случай разделяется на два подслучая: либо обе точки  $p_1, p_2$  отличны от особой точки  $\ell_1 \cap \ell_2$ , как на рис. 20◊3, либо точка  $p_1 = \ell_1 \cap \ell_2$ , а точка  $p_2 \neq \ell_1 \cap \ell_2$ , как на рис. 20◊2.



Если имеет место последнее, то распавшаяся коника  $\ell_1 \cap \ell_2$  является единственной особой коникой в пучке, а каждая гладкая коника пучка касается прямой  $\ell_1$  в точке  $p_1$  и проходит через точку  $p_2$ , см. рис. 20◊2. В частности, любые две гладкие коники в таком пучке пересекаются ровно по двум точкам  $p_1, p_2$  и имеют в точке  $p_1$  общую касательную.

Двойная прямая  $\ell = (p_1 p_2)$  и распавшаяся коника  $\ell_1 \cup \ell_2$  с  $p_1 \in \ell_1 \setminus \ell_2, p_2 \in \ell_2 \setminus \ell_1$  возникают в пучке с двумя базисными точками  $p_1, p_2$  только одновременно в силу следующей леммы.

ЛЕММА 20.2

Коника, касающиеся двух заданных прямых  $\ell_1, \ell_2$  в двух заданных точках  $p_1 \in \ell_1, p_2 \in \ell_2$ , отличных от  $\ell_1 \cap \ell_2$ , составляют пучок. Этот пучок содержит ровно две вырожденные коники: двойную прямую  $\ell = (p_1 p_2)$  и распавшуюся конику  $\ell_1 \cup \ell_2$ , причём прямые  $\ell_1$  и  $\ell_2$  однозначно восстанавливаются по двойной прямой  $(p_1 p_2)$  и любой гладкой конике  $C$  из пучка как касательные к  $C$  в точках пересечения  $C$  с  $(p_1 p_2)$ .

Доказательство. Каждый ненулевой вектор  $p \in V$  задаёт сюръективное линейное отображение

$$S^2 V^* \rightarrow V^*, \quad q \mapsto \hat{q}(p), \quad (20-4)$$

переводящее квадратичную форму  $q$  в ковектор

$$\hat{q}(p) : V \rightarrow \mathbb{k}, \quad v \mapsto \tilde{q}(v, p).$$

Так как  $\dim V = 3$ , ядро отображения (20-4) имеет размерность  $\dim S^2 V^* - \dim V^* = 3$ . Поэтому полный прообраз любого одномерного подпространства  $\xi \subset V^*$  при отображении (20-4) имеет размерность 4, а его проективизация имеет коразмерность 2 в пространстве коник. Беря вектор  $p$  на прямой  $\ell = \text{Ann } \xi$ , мы заключаем, что коники, касающиеся этой прямой в точке  $p$ , образуют в  $\mathbb{P}_5 = \mathbb{P}(S^2 V^*)$  проективное подпространство коразмерности 2. Два таких подпространства, отвечающие  $p_1 \in \ell_1$  и  $p_2 \in \ell_2$ , пересекаются как минимум по прямой. Если бы их пересечение содержало плоскость, то в пространстве коник, касающихся  $\ell_1$  и  $\ell_2$  в точках  $p_1$  и  $p_2$ , нашлась бы коника, проходящая через любые две наперёд заданные точки. Но такая коника, проходящая через отличную от  $p_1$  и  $p_2$  точку прямой  $\ell$  и ещё какую-нибудь точку вне прямых  $\ell, \ell_1, \ell_2$ , распадается в объединение прямой  $\ell$  и ещё одной прямой  $\ell'$ , отличной от  $\ell, \ell_1, \ell_2$ . Поэтому она не может пересекать прямые  $\ell_1, \ell_2$  с кратностью 2 одновременно и в  $p_1$ , и в  $p_2$ . Это доказывает первое утверждение леммы. Остальные утверждения очевидны из рис. 20◊3.  $\square$

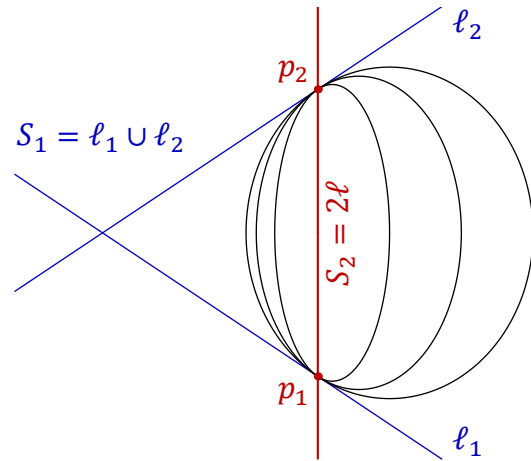


Рис. 20◊3. Пучок с двумя базисными точками  $p_1 = a = b, p_2 = c = d$  и двумя вырожденными кониками  $S_1, S_2$ .

**20.2.3. Пучок с тремя базисными точками.** Если базисное множество пучка коник состоит из трёх точек  $p_1, p_2, p_3$ , то они не коллинеарны<sup>1</sup>. В частности, такой пучок не содержит двойных прямых. Кроме того, ни одна из точек  $p_i$  не может быть особой одновременно для двух

<sup>1</sup>Иначе содержащая базисные точки прямая пересекала бы любую гладкую конику пучка по трём точкам.

распавшихся коник из пучка<sup>1</sup>. Каждая распавшаяся коника  $\ell_1 \cup \ell_2$  из такого пучка проходит через базисные точки либо так, что  $p_1 = \ell_1 \cap \ell_2$ ,  $p_2 \in \ell_1 \setminus \ell_2$ ,  $p_3 \in \ell_2 \setminus \ell_1$ , либо так, что  $p_1 \in \ell_1 \setminus \ell_2$ , а  $p_2, p_3 \in \ell_2 \setminus \ell_1$ . На рис. 20◊4 ниже первое отвечает прямым  $\ell'_1, \ell'_2$ , второе — прямым  $\ell''_1, \ell''_2$ . Во втором случае любая гладкая коника  $C$  из пучка касается прямой  $\ell_1$  в точке  $p_1$ .

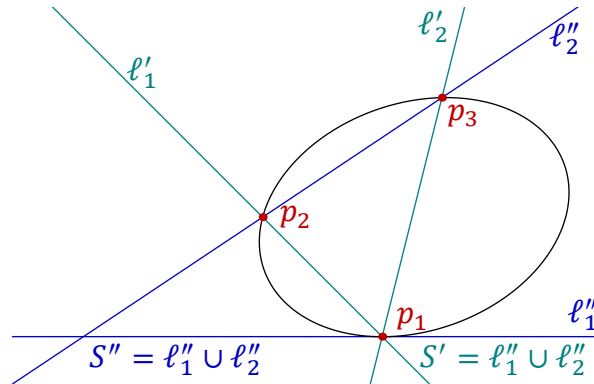


Рис. 20◊4. Пучок с тремя базисными точками  $p_1 = a = b$ ,  $p_2 = c$ ,  $p_3 = d$  и двумя вырожденными кониками  $S_1, S_2$ .

В первом случае все гладкие коники пучка имеют в точке  $p_1$  общую касательную, поскольку проходящая через  $p_1$  прямая  $\ell$ , касающаяся фиксированной гладкой коники  $C$  из пучка в точке  $p_1 \in C$ , соприкасается в точке  $p_1$  с каждой коникой пучка, порождённой коникой  $C$  и распавшейся коникой  $\ell'_1 \cup \ell'_2$ , которая тоже касается прямой  $\ell$  в точке  $p_1 = \ell'_1 \cap \ell'_2$ .

УПРАЖНЕНИЕ 20.1. Убедитесь в этом и покажите, что множество всех коник  $C \subset \mathbb{P}_2$ , касающихся заданной прямой  $\ell$  в заданной точке  $p \in \ell$  и проходящих через две другие различные заданные точки  $c, d \notin \ell$ , составляют пучок, содержащий ровно две вырожденные коники:  $(cd) \cup \ell$  и  $(pc) \cup (pd)$ .

**20.2.4. Простой пучок коник.** Пучок коник, спектр которого состоит из трёх разных точек, называется *простым*. По лем. 20.1 все точки спектра простого пучка имеют кратность 1, и по предыдущему базисное множество такого пучка состоит из четырёх различных точек  $a, b, c, d$ , никакие 3 из которых не коллинеарны.

УПРАЖНЕНИЕ 20.2. Покажите, что множество всех коник, проходящих через четыре различные точки  $a, b, c, d$ , никакие три из которых не коллинеарны, представляет собою простой пучок, три особые коники которого суть пары противоположных сторон четырёхугольника  $abcd$ , как на рис. 20◊5.

Таким образом, простой пучок коник однозначно определяется своими базисными точками  $a, b, c, d$ . В однородных координатах  $x = (x_0 : x_1 : x_2)$  на  $\mathbb{P}_2$  уравнения его коник имеют вид

$$\frac{\det(x, a, b) \cdot \det(x, c, d)}{\det(x, a, d) \cdot \det(x, b, c)} = \frac{\lambda_0}{\lambda_1},$$

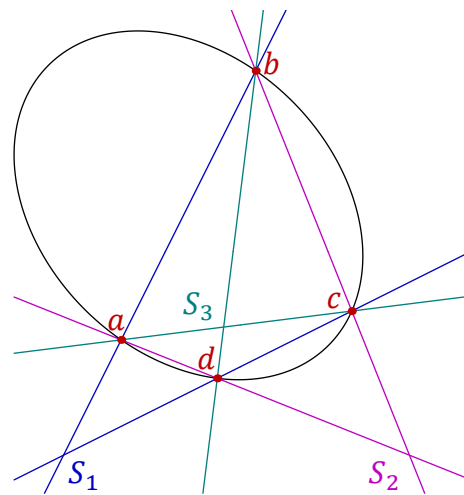


Рис. 20◊5. Три особые коники простого пучка с базисными точками  $a, b, c, d$ .

<sup>1</sup>Иначе все коники пучка были бы особы в этой точке, см. н° 20.1.

где  $\lambda = (\lambda_0 : \lambda_1)$  пробегает  $\mathbb{P}_1$ . Все предыдущие примеры являются вырождениями простого пучка и получаются из него, когда некоторые из базисных точек слипаются друг с другом. А именно, пучок на рис. 20◊4 возникает при  $a, b \rightarrow p_1, c = p_2, d = p_3$ , пучок на рис. 20◊3 — когда  $a, b \rightarrow p_1, c, d \rightarrow p_2$ , пучок на рис. 20◊2 — если  $a, b, c \rightarrow p_1, d = p_2$ , а на рис. 20◊1 все четыре базисные точки схлопываются в одну.

Предложение 20.1

Ассоциированный с четырёхвершинником  $abcd$  треугольник  $xuz$  автополярен относительно всех гладких коник, описанных около этого четырёхвершинника.

Доказательство (по В. С. Жгуну). Каждая описанная около четырёхвершинника  $abcd$  коника  $C = V(q)$  лежит в простом пучке, порождённом любыми двумя из трёх распавшихся коник  $S_x = V(f_x) = (ab) \cup (cd)$ ,  $S_y = V(f_y) = (ad) \cup (bc)$ ,  $S_z = V(f_z) = (ac) \cup (bd)$ . Поскольку  $x = \text{Sing } S_x = \ker \hat{f}_x$ , мы имеем равенства  $\tilde{f}_x(y, x) = \tilde{f}_x(z, x) = 0$ . Аналогично,  $\tilde{f}_y(x, y) = \tilde{f}_y(z, y) = 0$  и  $\tilde{f}_z(x, z) = \tilde{f}_z(y, z) = 0$ . Так как билинейная форма  $\tilde{q}$  является линейной комбинацией билинейных форм  $\tilde{f}_x$  и  $\tilde{f}_y$ , из равенств  $\tilde{f}_x(x, y) = \tilde{f}_y(x, y) = 0$  вытекает равенство  $\tilde{q}(x, y) = 0$ . Аналогично получаем равенства  $\tilde{q}(x, z) = 0$  и  $\tilde{q}(y, z) = 0$ , см. рис. 20◊6.

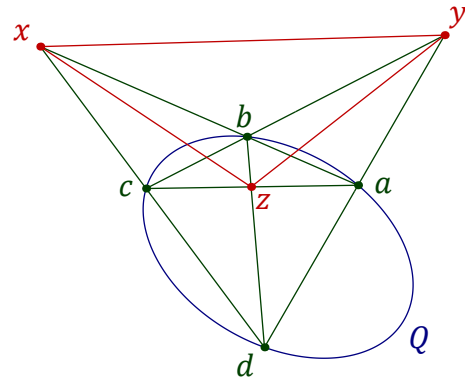


Рис. 20◊6. Автополярный  $\Delta xuz$ .

□

УПРАЖНЕНИЕ 20.3. Получите из предл. 20.1 обоснование построения Штейнера<sup>1</sup>.

Пример 20.1 (инволюция Дезарга)

Будем называть прямую  $\ell \subset \mathbb{P}_2 = \mathbb{P}(V)$  *общей* по отношению к невырожденному пучку коник  $L \subset \mathbb{P}(S^2V^*)$ , если она не проходит через базисные точки пучка и не содержится ни в одной из особых коник пучка. Каждый невырожденный пучок коник  $L$  задаёт на любой общей по отношению к нему прямой  $\ell$  инволюцию Дезарга  $\sigma_L : \ell \simeq \ell$ , переставляющую точки  $s, t \in \ell$  если и только если в пучке  $L$  имеется такая коника  $C$ , что  $C \cap \ell = \{s, t\}$ . В самом деле, для любой точки  $t \in \ell$  в пучке  $L$  имеется ровно одна коника  $C$ , проходящая через  $t$ , причём коэффициенты её уравнения рационально зависят от координат точки  $t$ , и она пересекает прямую  $\ell$  по одной или двум точкам. Таким образом, точка  $s$  определяется точкой  $t$  однозначно, а её координаты рационально зависят от координат точки  $t$ , и наоборот. Точка  $p \in \ell$  неподвижна относительно инволюции Дезарга если и только если в пучке  $L$  имеется коника, касающаяся прямой  $\ell$  в точке  $p$ . Следовательно, над алгебраически замкнутым полем в любом пучке коник имеется ровно две коники, касающиеся заданной общей по отношению к этому пучку прямой.

Если  $L$  — простой пучок с базисными точками  $a, b, c, d$ , как на рис. 20◊6, то беря в качестве прямой  $\ell$  сторону  $uz$  ассоциированного с четырёхвершинником  $abcd$  треугольника  $xuz$ , мы получаем на прямой  $\ell$  инволюцию с неподвижными точками  $y$  и  $z$ , которые являются точками касания  $\ell$  с особыми кониками  $(ad) \cup (cb)$  и  $(ac) \cup (bd)$  соответственно. Эта инволюция переставляет между собою точки пересечения прямой  $\ell$  со сторонами  $(ad)$  и  $(bc)$  четырёхвер-

<sup>1</sup>См. упр. 18.10 на стр. 232.

шинника  $abcd$ . Мы получили альтернативное доказательство того, что в пучке прямых, проходящих через  $x$  стороны треугольника гармоничны сторонам четырёхвершинника<sup>1</sup>.

Пример 20.2 (коника полюсов и коника одиннадцати точек)

Каждая точка  $a \in \mathbb{P}_2 = \mathbb{P}(V)$ , которая не является особой ни для какой коники из невырожденного пучка  $L \subset \mathbb{P}(S^2V^*)$ , задаёт линейное вложение  $a : L \hookrightarrow \mathbb{P}_2^\times = \mathbb{P}(V^*)$ , переводящее конику  $Q = V(q) \in L$  в поляр  $\bar{q}(a)$  точки  $a$  относительно этой коники. На языке линейной алгебры это вложение является проективизацией инъективного линейного отображения<sup>2</sup>, переводящего квадратичную форму  $q$  из двумерного пространства, проективизацией которого является пучок  $L$ , в линейную форму  $\hat{q}(a) : V \rightarrow \mathbb{k}$ ,  $v \mapsto \tilde{q}(v, a)$ , где  $a \in V$  — произвольно зафиксированный ненулевой вектор, представляющий точку  $a \in \mathbb{P}(V)$ . Аннулятором двумерного образа такого отображения является одномерное подпространство  $a_L \subset V$  — центр пучка прямых, полярных точке  $a$  относительно всевозможных коник из  $L$ . На геометрическом языке точка  $a_L \in \mathbb{P}(V)$  — это единственная точка плоскости, сопряжённая точке  $a$  сразу относительно всех коник из  $L$ . Отображение  $a : L \xrightarrow{\sim} a_L^\times$  задаёт гомографию между пучком коник  $L$  и пучком прямых  $a_L^\times$  на  $\mathbb{P}_2 = \mathbb{P}(V)$ .

Если прямая  $\ell = (st)$  не проходит через особые точки коник из пучка  $L$ , то полюса этой прямой относительно коник из  $L$  суть точки пересечения пар соответственных прямых из пучков  $s_L^\times$  и  $t_L^\times$  при гомографии  $ts^{-1} : s_L^\times \xrightarrow{\sim} t_L^\times$ , которая является композицией гомографии  $t : L \xrightarrow{\sim} t_L^\times$  и гомографии, обратной к  $s : L \xrightarrow{\sim} s_L^\times$ . Согласно предл. 18.2 на стр. 225 ГМТ пересечения таких соответственных прямых является коникой, проходящей через точки  $s_L$  и  $t_L$ . Мы будем называть её *коникой полюсов* прямой  $\ell$  относительно пучка коник  $L$  и обозначать  $C(\ell, L)$ .

Упражнение 20.4. Убедитесь, что если прямая  $\ell$  не проходит через особые точки коник пучка  $L$ , то коника полюсов  $C(\ell, L)$  является гладкой.

Для простого пучка  $L$  с базисными точками  $a, b, c, d$  и прямой  $\ell$ , которая не проходит через базисные точки и вершины ассоциированного с ними треугольника  $xuz$ , коника полюсов  $C(\ell, L)$  — это единственная гладкая коника, описанная вокруг  $\Delta xuz$  и проходящая через две неподвижные точки инволюции Дезарга<sup>3</sup>  $\sigma_L : \ell \xrightarrow{\sim} \ell$ , задаваемой пучком  $L$  на прямой  $\ell$ . Кроме этих пяти точек, коника полюсов проходит через такую точку  $p_{ab} \in (ab)$ , что  $[p_{ab}, \ell \cap (ab), a, b] = -1$  на прямой  $(ab)$ , так как эта точка по предл. 19.1 на стр. 234 сопряжена на прямой  $(ab)$  точке  $\ell \cap (ab)$  относительно любой гладкой коники, проходящей через  $a$  и  $b$ , и потому именно она является второй, отличной от  $x$  точкой пересечения прямой  $(ab)$  с коникой полюсов прямой  $\ell$ . По той же причине  $C(\ell, L)$  проходит ещё через пять аналогичных  $p_{ab}$  точек  $p_{uw} \in (uw)$ , отвечающих всевозможным двухэлементным подмножествам  $\{u, w\} \subset \{a, b, c, d\}$ . Поэтому такую конику полюсов называют ещё и *коникой одиннадцати точек* прямой  $\ell$  и четырёхвершинника  $abcd$ .

**20.3. Касательное пространство к проективной гиперповерхности.** Рассмотрим проективную гиперповерхность  $V(f) \subset \mathbb{P}_n$ , заданную однородным многочленом  $f$  степени  $d$ , и не лежащую на ней прямую  $(ab) \subset \mathbb{P}_n$ , проходящую через точку  $a \in V(f)$ . Ограничение многочлена  $f$  на прямую  $(ab)$  является ненулевым однородным многочленом степени  $d$

$$f_{ab}(\lambda, \mu) \stackrel{\text{def}}{=} f(\lambda a + \mu b)$$

<sup>1</sup>Ср. с н° 18.3.2 на стр. 228.

<sup>2</sup>Ср. с доказательством лем. 20.2 на стр. 249.

<sup>3</sup>См. прим. 20.1 на стр. 251.

от однородной координаты  $(\lambda : \mu)$  на прямой  $(ab)$ , и точка  $a = (1 : 0)$  является его корнем. Кратность этого корня называется *кратностью пересечения* прямой  $(ab)$  с гиперповерхностью  $V(f)$  в точке  $a$ . Над алгебраически замкнутым полем  $\mathbb{k}$  каждая не лежащая на гиперповерхности  $V(f)$  прямая пересекает эту гиперповерхность ровно по  $d$  точкам, учитываемым с кратностями, равными кратностям пересечения прямой и гиперповерхности в этих точках.

Прямая  $(ab)$  называется *касательной* к гиперповерхности  $V(f)$  в точке  $a \in V(f)$ , если она лежит на этой гиперповерхности или пересекает её в точке  $a$  с кратностью  $\geq 2$ . Объединение всех прямых, касающихся гиперповерхности  $V(f)$  в точке  $a \in V(f)$ , называется *касательным пространством* к гиперповерхности  $f$  в точке  $a$  и обозначается  $T_a V(f)$ .

Минимальная из кратностей пересечений гиперповерхности  $V(f)$  со всевозможными проходящими через точку  $a \in V(f)$  прямыми называется *кратностью точки  $a$*  на гиперповерхности  $V(f)$ . Если она равна единице, точка  $a$  называется *гладкой*, если больше единицы — *особой*. Таким образом, особость точки  $a \in V(f)$  равносильна тому, что  $T_a V(f) = \mathbb{P}_n$ .

ЛЕММА 20.3

Точка  $a \in V(f)$  особа если и только если все частные производные от многочлена  $f$  зануляются в точке  $a$ . Если точка  $a$  не особа, то касательное пространство  $T_a V(f)$  является проективным подпространством коразмерности 1 и задаётся однородным линейным уравнением

$$\sum_{i=0}^n \frac{\partial f}{\partial x_i}(a) \cdot x_i = 0.$$

Доказательство. По формуле Тейлора ограничение многочлена  $f$  на прямую  $(ab)$  имеет в аффинной окрестности точки  $a$  вид

$$f(a + tb) = f(a) + t \cdot \sum_{i=0}^n \frac{\partial f}{\partial x_i}(a) \cdot b_i + \text{члены, делящиеся на } t^2.$$

Точке  $a$  отвечает корень  $t = 0$ . Он кратный тогда и только тогда, когда  $\sum \frac{\partial f}{\partial x_i}(a) \cdot b_i = 0$ .  $\square$

УПРАЖНЕНИЕ 20.5. Убедитесь, что для квадратик критерий гладкости и описание касательного пространства из лем. 20.3 согласуются с определением гладкости из н° 17.3 на стр. 208 и описанием касательного пространства из н° 17.3.1.

**20.4. Гиперповерхность особых квадратик.** Множество всех особых квадратик на  $\mathbb{P}_n = \mathbb{P}(V)$  образует в пространстве квадратик  $\mathbb{P}(S^2 V^*)$  алгебраическую гиперповерхности степени  $(n + 1)$

$$\Sigma = V(\det) = \{q \in S^2 V^* \mid \det(q) = 0\}. \quad (20-5)$$

Предложение 20.2

Особая квадратика  $S \in \Sigma$  является гладкой точкой гиперповерхности  $\Sigma$  если и только если сама квадратика  $S \subset \mathbb{P}(V)$  имеет единственную особую точку  $s \in S$ , и в этом случае касательное пространство  $T_s \Sigma \subset \mathbb{P}(S^2 V^*)$  состоит из всех квадратик  $Q \subset \mathbb{P}(V)$ , проходящих через точку  $s$ .

Доказательство. Пусть  $S = V(f)$ . Для любой квадратик  $Q = V(q) \subset \mathbb{P}(V)$  ограничение многочлена  $\det$  на прямую  $(SQ) \subset \mathbb{P}(S^2 V^*)$  имеет в аффинной окрестности точки  $S$  вид<sup>1</sup>

$$0 = \det(f + tq) = \det(f) + t \cdot \sum_{ij} q_{ij} f_{ij}^\vee + \text{члены, делящиеся на } t^2,$$

<sup>1</sup>См. прим. 9.2 на стр. 118.

где  $f_{ij}^\vee$  означает алгебраическое дополнение к  $(ij)$ -тому элементу матрицы Грама квадратичной формы  $f$ . Квадрика  $S$  отвечает корню  $t = 0$ . Он кратный тогда и только тогда, когда

$$\sum_{ij} q_{ij} f_{ij}^\vee = 0. \quad (20-6)$$

Это линейное уравнение на  $q$  нетривиально если и только если в матрице Грама  $F = (f_{ij})$  имеется хоть один ненулевой минор порядка  $n$ , т. е. когда  $\dim \ker F = 1$ . Каждый столбец и каждая строка присоединённой матрицы  $F^\vee = (f_{ij}^\vee)$  лежит в ядре матрицы  $F$ , поскольку  $F F^\vee = F^\vee F = \det(F) E = 0$ . Таким образом,  $\text{rk } F^\vee = 1$ , и все строки и все столбцы симметричной матрицы  $F^\vee$  пропорциональны однородным координатам особой точки

$$s = (s_0 : s_1 : \dots : s_n) = (f_{i0}^\vee : f_{i1}^\vee : \dots : f_{in}^\vee) = (f_{0j}^\vee : f_{1j}^\vee : \dots : f_{nj}^\vee)$$

квадрики  $S$ . Это означает, что с точностью до умножения на независимую от  $i, j$  константу  $f_{ij}^\vee = s_i s_j$ , и условие касания (20-6) превращается в равенство  $\sum_{ij} q_{ij} s_i s_j = q(s) = 0$ , т. е. в условие прохождения квадрики  $Q$  через точку  $s$ .  $\square$

#### Следствие 20.1

Прямая  $(PQ) \subset \mathbb{P}(S^2 V^*)$  касается гиперповерхности особых квадратик  $\Sigma$  в точке  $Q \in \Sigma$  если и только если  $P \cap \text{Sing } Q \neq \emptyset$ . Если же  $\text{Sing } P \cap \text{Sing } Q \neq \emptyset$ , то прямая  $(PQ)$  лежит на  $\Sigma$ .

Доказательство. Если  $Q$  является гладкой точкой гиперповерхности  $\Sigma$ , то первое утверждение является переформулировкой предл. 20.2. Если точка  $Q \in \Sigma$  особа, то  $\dim \text{Sing } Q \geq 1$ , и любая лежащая в  $\text{Sing } Q$  прямая пересекает любую квадрику  $P$ , а любая прямая  $(PQ)$  касается гиперповерхности  $\Sigma$  в точке  $Q$ , т. е. первое утверждение является в этом случае тавтологией. Если  $\text{Sing } P \cap \text{Sing } Q \neq \emptyset$ , то все квадрики пучка  $(PQ)$  особые в точках пересечения  $\text{Sing } P \cap \text{Sing } Q$ , поскольку ненулевой вектор, лежащий в ядре корреляций, отвечающих квадрикам  $P$  и  $Q$ , лежит в ядре и любой линейной комбинации этих корреляций.  $\square$

УПРАЖНЕНИЕ 20.6. Приведите пример пучка  $L$  особых коник, в котором  $\text{Sing } P \cap \text{Sing } Q = \emptyset$  для всех  $P, Q \in L$ .

#### Пример 20.3 (классификация невырожденных пучков коник)

При  $n = 2$  особые коники на  $\mathbb{P}_2 = \mathbb{P}(V)$  образуют кубическую гиперповерхность в  $\mathbb{P}_5 = \mathbb{P}(S^2 V^*)$

$$\Sigma = \{q \in \mathbb{P}_5 \mid \det q = 0\}.$$

Гладкими точками гиперповерхности  $\Sigma$  являются распавшиеся коники, а особыми точками гиперповерхности  $\Sigma$  являются двойные прямые. Прямая общего положения  $L \subset \mathbb{P}_5$  трансверсально пересекает гиперповерхность  $\Sigma$  в трёх её гладких точках и представляет собою простой пучок коник, как на рис. 20◊5 на стр. 250. Если прямая  $L$  касается  $\Sigma$  в гладкой точке  $S = \ell_1 \cup \ell_2$ , то она либо больше нигде не пересекает  $\Sigma$ , и в этом случае кратность пересечения  $\Sigma$  с  $L$  в точке  $S$  равна 3, либо пересекает  $\Sigma$  с кратностью 1 ещё ровно в одной, автоматически гладкой точке. Эти случаи реализуются пучками коник, представленными на рис. 20◊2 на стр. 248 и рис. 20◊4 на стр. 250, причём точке касания  $L$  с  $\Sigma$  всегда отвечает распавшаяся коника с особенностью в базисной точке пучка. Если прямая  $L$  проходит через особую точку  $S = 2\ell$  гиперповерхности  $\Sigma$ , возникает та же альтернатива: если кратность пересечения  $\Sigma$  и  $L$  в точке  $S$  равна 3, то  $L$  больше нигде не пересекает  $\Sigma$  и выгладит как на рис. 20◊1 на стр. 248, если же эта кратность 2, то  $L$  пересекает  $\Sigma$  ещё ровно в одной гладкой точке с кратностью 1, как на рис. 20◊3 на стр. 249.

**20.5. Регулярные пучки квадратик.** Невырожденный пучок квадратик  $(Q_0, Q_1)$  на  $\mathbb{P}_n$  называется *регулярным*, если кратность каждой точки его спектра ровно на единицу больше размерности пространства особых точек отвечающей этой точке особой квадратике, т. е. когда

$$\dim \text{Sing}(Q_\lambda) = \text{mult}(\lambda) - 1 \quad \text{для всех } \lambda = (\lambda_0 : \lambda_1) \in \mathbb{P}_1.$$

Это означает, что ранг матрицы Грама  $\lambda_0 q_0 + \lambda_1 q_1$  в каждой точке  $\lambda \in \mathbb{P}_1$  падает в точности на кратность корня  $t = \lambda$  характеристического многочлена  $\chi_{q_0, q_1}(t_0, t_1) = \det(t_0 q_0 + t_1 q_1)$ . Из всех рассмотренных в н° 20.2 невырожденных пучков коник регулярными являются только пучки, представленные на рис. 20◊5 и рис. 20◊3.

**ТЕОРЕМА 20.1**

Над алгебраически замкнутым полем  $\mathbb{k}$  для любого регулярного пучка квадратик в  $\mathbb{P}(V)$  найдётся такой базис пространства  $V$ , в котором матрицы Грама всех квадратик из пучка одновременно диагональны.

*Доказательство.* Пусть пучок порождается квадратиками  $V(g)$  и  $V(f)$ , где форма  $g$  неособа. Следуя рецепту из н° 14.2.4 на стр. 174, сопоставим форме  $f$  автодуальный<sup>1</sup> относительно скалярного произведения  $\tilde{g}$  на  $V$  линейный оператор  $\varphi = \hat{g}^{-1} \hat{f} : V \rightarrow V$ , однозначно задающийся тем, что  $\tilde{g}(u, \varphi w) = \tilde{f}(u, w)$  для всех  $u, w \in V$ . Поскольку матрица  $\Phi$  оператора  $\varphi$  выражается через матрицы Грама  $G, F$  квадратичных форм  $g, f$  по формуле  $\Phi = G^{-1}F$ , характеристический многочлен  $\chi_\varphi(t) = \det(tE - \Phi) = \det(tE - G^{-1}F) = \det G^{-1} \det(tG - F)$  оператора  $\varphi$  связан с характеристическим многочленом  $\chi_{(gf)}(t_0, t_1) = \det(t_0 G + t_1 F)$  пучка квадратик по формуле

$$\chi_\varphi(t) = \det G^{-1} \cdot \chi_{(fg)}(-t_0/t_1, 1).$$

Поэтому квадратичная форма  $F - \lambda G$  вырождена если и только если число  $\lambda \in \mathbb{k}$  является собственным значением оператора  $\varphi$ . Так как ранг матрицы  $\lambda G - F$  равен рангу матрицы  $\lambda E - \Phi = G^{-1}(\lambda G - F)$ , размерность собственного подпространства  $V_\lambda = \ker(\lambda E - \Phi)$  оператора  $\varphi$  совпадает с размерностью ядра квадратичной формы  $F - \lambda G$ , которая по условию теоремы в точности равна кратности корня  $(t_0 : t_1) = (-\lambda : 1)$  многочлена  $\chi_{(gf)}(t_0, t_1)$ . Таким образом, сумма размерностей собственных подпространств  $V_\lambda$  оператора  $\varphi$  равна  $\dim V$ . Поскольку по упр. 15.7 на стр. 191 все собственные подпространства самосопряжённого оператора ортогональны друг другу относительно скалярного произведения  $\tilde{g}$ , пространство  $V$  является  $\tilde{g}$ -ортогональной прямой суммой собственных подпространств  $V_\lambda$  оператора  $\varphi$ . Выбирая в каждом подпространстве  $V_\lambda$  ортогональный базис квадратичной формы  $g$ , мы получаем в  $V$  базис, где обе формы  $g$  и  $f$  имеют диагональные матрицы Грама, причём на диагонали матрицы  $F$  будут стоять собственные значения оператора  $f$  или, что то же самое, взятые с обратным знаком характеристические числа  $t_0/t_1$  пучка  $(GF)$ . Все формы  $\lambda g + \mu f$  также будут диагональны в этом базисе.  $\square$

**Следствие 20.2 (из доказательства теор. 20.1)**

Если квадратичная форма  $f$  на векторном пространстве  $V$  над произвольным полем  $\mathbb{k}$  характеристики  $\text{char } \mathbb{k} \neq 2$  имеет диагональную матрицу Грама в ортонормальном базисе невырожденной квадратичной формы  $g$ , то диагональные элементы этой матрицы суть собственные числа линейного оператора  $\varphi = \hat{g}^{-1} \hat{f} : V \rightarrow V$ , который однозначно задаётся тем, что

<sup>1</sup>См. н° 15.6 на стр. 191.

$\tilde{f}(u, w) = \tilde{g}(u, \varphi w)$  для всех  $u, w \in V$ . При этом сам базис состоит из собственных векторов оператора  $\varphi$ , и количество появлений каждого собственного числа на диагонали матрицы Грама равно размерности соответствующего собственного подпространства. В частности, диагональная матрица Грама формы  $f$  с точностью до перестановки диагональных элементов не зависит от выбора базиса, одновременно ортонормального для  $g$  и ортогонального для  $f$ .

**ТЕОРЕМА 20.2**

Два регулярных пучка квадратик в  $\mathbb{P}_n$  над алгебраически замкнутым полем  $\mathbb{k}$  переводятся один в другой линейным проективным автоморфизмом<sup>1</sup>  $\mathbb{P}_n$  если и только если их спектры, понимаемые как неупорядоченные множества из  $n$  не обязательно различных точек на  $\mathbb{P}_1$ , переводятся друг в друга дробно линейным автоморфизмом  $\mathbb{P}_1$ .

**Доказательство.** Выберем в первом пучке гладкую квадратичку  $V(g')$  и рассмотрим в  $V$  базис  $e'$ , в котором все квадратички первого пучка имеют диагональные матрицы Грама, причём нормируем его так, чтобы матрица Грама формы  $g'$  стала единичной. Рассмотрим любую отличную от  $g'$  форму  $f'$  из первого пучка и обозначим через  $F'$  её матрицу Грама в базисе  $e'$ . В доказательстве теор. 20.1 мы видели, что диагональные элементы матрицы  $F'$  являются корнями многочлена  $\det(tE - F')$ , т. е. составляют в точности спектр первого пучка. Поскольку он совпадает со спектром второго пучка, во втором пучке квадратичных форм имеется базис из таких форм  $g''$ ,  $f''$ , что корни многочлена  $\chi_{g''f''}(t, 1)$  совпадают с корнями многочлена  $\det(tE - F')$ . Из этого вытекает, что форма  $g''$  невырождена, и в пространстве  $V$  существует базис  $e''$ , в котором матрица Грама формы  $g''$  единичная, а форма  $f''$  имеет диагональную матрицу  $F''$  с диагональными элементами, равными корням многочлена  $\det(tE - F')$ . Таким образом, матрица  $F''$  в базисе  $e''$  совпадает с матрицей  $F'$  в базисе  $e'$ . Проективный изоморфизм  $\mathbb{P}_n \simeq \mathbb{P}_n$ , переводящий базис  $e'$  в базис  $e''$ , преобразует базисные квадратичные формы  $g'$ ,  $f'$  первого пучка в базисные квадратичные формы  $g''$ ,  $f''$  второго. Следовательно, он преобразует каждую форму  $\lambda g' + \mu f'$  первого пучка в форму  $\lambda g'' + \mu f''$  второго.  $\square$

**ПРИМЕР 20.4 (простые пучки)**

Пучок квадратик на  $\mathbb{P}_n$  называется *простым*, если его спектр состоит из  $(n + 1)$  различных точек на  $\mathbb{P}_1$ . Таким образом, каждая особая квадратичка простого пучка имеет ровно одну особую точку и единичную кратность в спектре. В частности, каждый простой пучок регулярен, и все квадратички в нём одновременно диагонализуются в некотором базисе. Два простых пучка переводятся один в другой проективным преобразованием тогда и только тогда, когда  $n + 1$  точек на  $\mathbb{P}_1$ , отвечающих особым квадратичкам первого пучка, переводятся дробно линейным автоморфизмом  $\mathbb{P}_1$  в  $n + 1$  точек, отвечающих особым квадратичкам второго.

**ТЕОРЕМА 20.3**

Пучок квадратик  $(PQ)$  над алгебраически замкнутым полем прост если и только если его базисные квадратички пересекаются трансверсально, т. е.  $\text{codim } T_a P \cap T_a Q = 2$  в каждой точке  $a \in P \cap Q$ .

**Доказательство.** Рассмотрим в пространстве квадратик  $\mathbb{P}_N = \mathbb{P}(S^2 V^*)$  на  $\mathbb{P}_n = \mathbb{P}(V)$  гиперповерхность особых квадратик<sup>2</sup>  $\Sigma = V(\det) \subset \mathbb{P}_N$ . Прямая  $(PQ) \subset \mathbb{P}_N$  пересекает гиперповерхность  $\Sigma$  меньше, чем по  $n + 1$  точкам, если и только если она касается  $\Sigma$  в одной из точек  $S \in (PQ) \cap \Sigma$ .

<sup>1</sup>Т. е. существует такой линейный проективный автоморфизм  $\mathbb{P}_n$ , который биективно отображает квадратички одного пучка на квадратички второго.

<sup>2</sup>См. формулу (20-5) на стр. 253.



Нетрансверсальность пересечения квадрик  $P = V(f)$  и  $Q = V(q)$  в точке  $a \in P \cap Q$  означает, что ковекторы  $\hat{f}(a)$  и  $\hat{q}(a)$  пропорциональны<sup>1</sup>. В этом случае все ковекторы  $\hat{h}(a)$  с  $\hat{h} = \lambda\hat{p} + \mu\hat{q}$  пропорциональны друг другу, т. е. любые две квадрики из пучка  $(PQ)$  пересекаются в точке  $a$  не трансверсально, и пучок содержит квадрику  $S = V(h)$  с  $\hat{h}(a) = \lambda\hat{f}(a) + \mu\hat{q}(a) = 0$ , т. е. с  $a \in \text{Sing } S$ . Тогда  $P \cap \text{Sing } S \neq \emptyset$  и прямая  $(PQ)$  касается гиперповерхности  $\Sigma$  в точке  $S$  по сл. 20.1. Значит, пучок не прост. Наоборот, если прямая  $(PQ)$  касается гиперповерхности  $\Sigma$  в точке  $S$ , то  $P \cap \text{Sing } S \neq \emptyset$  и пересечение  $P \cap S$  не трансверсально во всех точках из  $P \cap \text{Sing } S$ . Но тогда и пересечение  $P \cap Q$  тоже не трансверсально в этих же точках в силу сделанного выше замечания.  $\square$

---

<sup>1</sup>При этом один из них (но не оба) может обратиться в нуль — это означает, что одна из квадрик особа в точке  $a$ .

## §21. Конформная геометрия вещественных коник

**21.1. Комплексная проективизация вещественной плоскости.** Всюду в этом параграфе мы рассматриваем координатную плоскость  $V = \mathbb{R}^2$  со стандартными координатами  $(x_1, x_2)$  как множество вещественных точек комплексной координатной плоскости  $V_{\mathbb{C}} = \mathbb{C}^2$ , вложенной в качестве стандартной аффинной карты  $U_0 = e_0 + V_{\mathbb{C}}$  в проективную плоскость  $\mathbb{P}_2 = \mathbb{P}(\mathbb{C}^3)$  с однородными координатами  $(x_0 : x_1 : x_2)$ . Бесконечно удалённую прямую  $x_0 = 0$  карты  $U_0$  мы называем *бесконечностью* и обозначаем  $\ell_{\infty} = \mathbb{P}(V_{\mathbb{C}})$ . Точками этой прямой являются ненулевые векторы пространства  $V_{\mathbb{C}}$ , рассматриваемые с точностью до умножения на ненулевые комплексные константы. Мы будем называть их *комплексными направлениями* в карте  $U_0$ , поскольку выпущенная из произвольной точки  $p \in U_0$  вдоль вектора  $v \in V_{\mathbb{C}}$  комплексная аффинная прямая  $\{p + tv \mid t \in \mathbb{C}\}$  представляет собою видимую в карте  $U_0$  часть проективной прямой  $(pv) \subset \mathbb{P}_2$ , соединяющей точку  $p$  с бесконечно удалённой точкой  $v \in \ell_{\infty} = \mathbb{P}(V_{\mathbb{C}}) \subset \mathbb{P}_2$ .

На комплексной проективной плоскости  $\mathbb{P}_2$  имеется комплексно полулинейная<sup>1</sup> инволюция *комплексного сопряжения*  $\sigma : (x_0 : x_1 : x_2) \leftrightarrow (\bar{x}_0 : \bar{x}_1 : \bar{x}_2)$ . Она переводит прямые в прямые, а коники — в коники и сохраняет стандартную аффинную карту  $U_0 \subset \mathbb{P}_2$ , действуя на ней комплексно полуаффинным<sup>2</sup> вещественно аффинным преобразованием. Точки, прямые и коники, переводящиеся комплексным сопряжением в себя, называются *вещественными*. Например, бесконечно удалённая прямая  $x_0 = 0$  и коника  $x_0^2 + x_1^2 + x_2^2 = 0$  вещественны. Обратите внимание, что у вещественной фигуры может не быть ни одной вещественной точки.

Поскольку линейное уравнение, задающее прямую, и квадратичное уравнение, задающее гладкую конику, однозначно с точностью до умножения на ненулевое комплексное число определяются этими геометрическими фигурами, вещественность прямой или коники означает, что каждый коэффициент  $a$  её уравнения удовлетворяют соотношению  $\bar{a} = \lambda a$  с одним и тем же для всех коэффициентов  $a$  ненулевым множителем  $\lambda \in \mathbb{C}$ . Так как  $|\bar{a}| = |a|$ , мы заключаем, что  $|\lambda| = 1$ . Полагая  $\lambda = \vartheta^2$ , видим, что  $\vartheta \bar{a} = \vartheta^{-1} a = \vartheta a \in \mathbb{R}$ . Таким образом, вещественность прямой или коники на  $\mathbb{P}_2$  равносильна тому, что в стандартных координатах  $(x_0 : x_1 : x_2)$  эти фигуры можно задать уравнениями с вещественными коэффициентами.

**21.1.1. Конформная структура.** Евклидово скалярное произведение на  $V = \mathbb{R}^2$ , рассматриваемое с точностью до умножения на ненулевую вещественную константу, называется *конформной структурой* на вещественной плоскости  $V$ . Конформная структура не позволяет сказать, что такое длина вектора, но даёт возможность определить угол  $\vartheta = \sphericalangle(u, w) \in [0, \pi/2]$  между вещественными прямыми с направляющими векторами  $u, w \in V$  по формуле

$$\cos \vartheta = \frac{e^{i\vartheta} + e^{-i\vartheta}}{2} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{|(u, w)|}{\sqrt{(u, u)(w, w)}}, \quad (21-1)$$

правая часть которой не меняется ни при замене скалярного произведения на пропорциональное, ни при умножении векторов на ненулевые вещественные константы. Геометрически, это наименьший из двух смежных углов между вещественными прямыми, параллельными векторам  $u$  и  $w$ .

С токи зрения комплексной проективной плоскости  $\mathbb{P}_2$  конформная структура представляет собою гладкую вещественную квадрику  $I = \{v \in V_{\mathbb{C}} \mid (v, v) = 0\}$  на бесконечно удалённой

<sup>1</sup>Т.е.  $\sigma(u + w) = \sigma(u) + \sigma(w)$  для всех  $u, w \in \mathbb{C}^3$ , но  $\sigma(zv) = \bar{z}\sigma(v)$  для всех  $z \in \mathbb{C}$  и  $v \in \mathbb{C}^3$ , ср. с предл. 2.8 на стр. 33.

<sup>2</sup>См. п° 2.4 на стр. 32.

прямой  $\ell_\infty = \mathbb{P}(V_\mathbb{C})$ , где  $(*, *) : V_\mathbb{C} \times V_\mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  означает продолжение евклидова скалярного произведения на  $V$  до комплексной билинейной формы на  $V_\mathbb{C}$ .

УПРАЖНЕНИЕ 21.1. Убедитесь, что такое продолжение существует и единственно.

Поскольку евклидово скалярное произведение анизотропно над  $\mathbb{R}$ , квадрика  $I$  не имеет вещественных точек и состоит из двух различных комплексно сопряжённых точек. Мы будем называть квадриту  $I$  *абсолютом* конформной структуры. Всюду далее мы предполагаем, что конформная структура такова, что стандартный базис в  $\mathbb{R}^2$  является для неё ортогональным. В этом случае абсолютом  $I$  задаётся в стандартных однородных координатах  $(x_1 : x_2)$  на  $\ell_\infty = \mathbb{P}(V_\mathbb{C})$  уравнением  $x_1^2 + x_2^2 = 0$  и состоит из двух точек

$$\iota_+ = (i : 1) = (1 : -i) \quad \text{и} \quad \iota_- = (-i : 1) = (1 : i), \quad (21-2)$$

которые мы будем называть *абсолютными направлениями*.

**21.1.2. Евклидова перпендикулярность.** Сопоставление направлению  $v$  евклидово перпендикулярного направления  $v^\perp$  задаёт на прямой  $\ell_\infty$  инволютивную гомографию с неподвижными точками  $\iota_\pm$ , которая называется *перпендикулярностью*. В частности, равенство  $(u, w) = 0$  в  $V_\mathbb{C}$  равносильно гармоничности направлений  $u, w \in \ell_\infty$  абсолютным направлениям (21-2).

ПРИМЕР 21.1 (УГОЛ КАК ДВОЙНОЕ ОТНОШЕНИЕ)

Любые два отличных от  $\iota_\pm$  направления  $u, w \in \ell_\infty$  однозначно записываются в виде  $u = \iota_+ + \lambda \iota_-$ ,  $w = \iota_+ + \mu \iota_-$  с ненулевыми  $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$ . Так как  $(\iota_+, \iota_+) = (\iota_-, \iota_-) = 0$ , а  $(\iota_+, \iota_-) = (\iota_-, \iota_+) = 2$ , из форм. (21-1) на стр. 258 вытекает, что угол  $\vartheta = \angle(u, w)$  удовлетворяет соотношению

$$\frac{e^{i\vartheta} + e^{-i\vartheta}}{2} = \frac{\lambda + \mu}{2\sqrt{\lambda\mu}} = \frac{\sqrt{\lambda/\mu} + \sqrt{\mu/\lambda}}{2}.$$

Так как  $\mu/\lambda = [u, w, \iota_+, \iota_-]$  по упр. 18.6 на стр. 227, и для вещественных  $u, w \in \mathbb{R}^2$

$$\overline{[u, w, \iota_+, \iota_-]} = [\bar{u}, \bar{w}, \bar{\iota}_+, \bar{\iota}_-] = [u, w, \iota_-, \iota_+] = [u, w, \iota_+, \iota_-]^{-1},$$

мы заключаем, что для вещественных направлений  $u, w$  двойное отношение  $[u, w, \iota_+, \iota_-]$  лежит на единичной окружности в  $\mathbb{C}$  и равно  $[u, w, \iota_+, \iota_-] = \mu/\lambda = e^{2i\vartheta}$ . Таким образом, евклидов угол  $\vartheta \in [0, \pi/2]$  между вещественными направлениями  $u, w \in \ell_\infty$  равен половине абсолютной величины аргумента их двойного отношения с абсолютными направлениями:

$$\vartheta = \frac{1}{2} |\operatorname{Arg}[u, w, \iota_+, \iota_-]| = \frac{1}{2} |i \ln[u, w, \iota_+, \iota_-]|.$$

**21.2. Гладкие непустые вещественные коники.** Гладкая непустая вещественная коника называется *параболой*, если она касается прямой  $\ell_\infty$ , и называется *гиперболой* или *эллипсом*, если она пересекает прямую  $\ell_\infty$  по двум различным, соответственно, вещественным или комплексно сопряжённым друг другу точкам. Точки пересечения  $\{a', a''\}$  коники с бесконечностью называются *асимптотическими направлениями* этой коники. Таким образом, парабола имеет ровно одно, автоматически вещественное асимптотическое направление, которое также называют *направлением оси параболы*. Это же направление является полюсом прямой  $\ell_\infty$  относительно параболы, см. рис. 21♦1. Гипербола имеет два различных вещественных асимптотических направления, а эллипс — два различных комплексно сопряжённых друг другу асимптотических направления, см. рис. 21♦2.

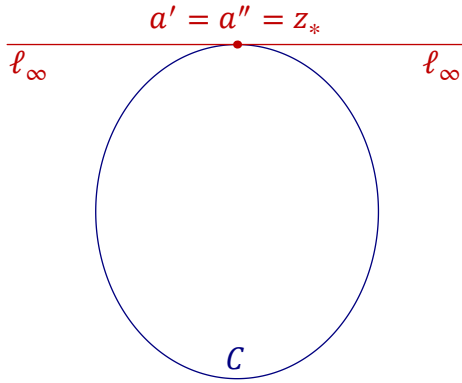


Рис. 21◊1. Парабола.

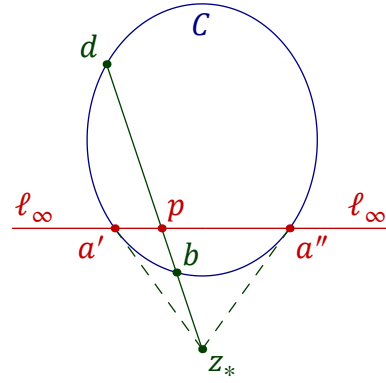


Рис. 21◊2. Центральная коника.

Полус  $z_*$  прямой  $\ell_\infty$  относительно не являющейся параболой коники  $C$  называется *центром* коники  $C$ . Он лежит в евклидовой плоскости  $\mathbb{R}^2$  и является центром симметрии аффинной части коники, так как по [предл. 19.1](#) на стр. 234 на любой проходящей через  $z_*$  прямой, пересекающей конику в точках  $b, d$ , а бесконечность в точке  $p$ , двойное отношение  $[p, z_*, b, d] = -1$ , т. е.  $z_*$  является серединой отрезка  $[b, d]$  в аффинной карте, для которой  $p = \infty$ . По этой причине эллипсы и гиперболы в совокупности называются *центральной кониками*. Проходящие через центр прямые называются *диаметрами* центральной коники  $C$ . Касательные диаметры  $(z_*a')$  и  $(z_*a'')$ , идущие из центра в асимптотических направлениях, называются *асимптотами*. Гипербола имеет вещественные асимптоты, эллипс — невещественные комплексно сопряжённые.

**УПРАЖНЕНИЕ 21.2.** Покажите, что любой диаметр центральной коники делит пополам все хорды, параллельные<sup>1</sup> сопряжённому диаметру.

Если коника  $C$  задаётся в стандартном ортонормальном базисе в  $\mathbb{R}^2$  неоднородным уравнением

$$f(x_1, x_2) = \beta_{11}x_1^2 + 2\beta_{12}x_1x_2 + \beta_{22}x_2^2 + 2\beta_{01}x_1 + 2\beta_{02}x_2 + \beta_{00} = 0, \quad (21-3)$$

то её проективное замыкание<sup>2</sup> имеет в однородных координатах  $(x_0 : x_1 : x_2)$  на  $\mathbb{P}_2$  матрицу Грама

$$B = \begin{pmatrix} \beta_{00} & \beta_{01} & \beta_{02} \\ \beta_{01} & \beta_{11} & \beta_{12} \\ \beta_{02} & \beta_{12} & \beta_{22} \end{pmatrix}. \quad (21-4)$$

Невырожденность коники  $C$  означает, что  $\det B \neq 0$ , а непустота — что сигнатура отлична от  $(3, 0)$  и  $(0, 3)$ , т. е. что последовательность знаков главных нижних угловых миноров

$$\Delta_2 \stackrel{\text{def}}{=} \beta_{22}, \quad \Delta_{12} \stackrel{\text{def}}{=} \beta_{11}\beta_{22} - \beta_{12}^2, \quad \Delta_{012} \stackrel{\text{def}}{=} \det B$$

отлична от  $+++$  и  $+-$ . Асимптотические направления  $\{a', a''\} = C \cap \ell_\infty$  коники  $C$  суть корни однородной квадратной формы от  $(x_1, x_2)$  с матрицей Грама

$$B_\infty = \begin{pmatrix} \beta_{11} & \beta_{12} \\ \beta_{12} & \beta_{22} \end{pmatrix}. \quad (21-5)$$

<sup>1</sup>По определению, прямые *параллельные* данной  $\ell \subset \mathbb{P}_2$  суть все прямые из пучка с центром в точке  $\ell \cap \ell_\infty$ , за исключением самих прямых  $\ell$  и  $\ell_\infty$ .

<sup>2</sup>См. п.° 17.4.3 на стр. 213.

Гладкая непустая вещественная коника  $C$  является эллипсом, параболой или гиперболой если и только если определитель<sup>1</sup>  $\Delta_{12} = \det B_\infty$ , соответственно, положителен, равен нулю или отрицателен. Однородные координаты полюса  $z_* = (z_0 : z_1 : z_2)$  бесконечно удалённой прямой  $x_0 = 0$  удовлетворяет уравнению  $(z_0 : z_1 : z_2)B = (1 : 0 : 0)$ , т. е. пропорциональны первой строке присоединённой матрицы  $B^V$  к матрице Грама  $B$  коники  $C$ :

$$(z_0 : z_1 : z_2) = (\Delta_{12} : \beta_{12}\beta_{02} - \beta_{01}\beta_{22} : \beta_{01}\beta_{12} - \beta_{11}\beta_{02}). \quad (21-6)$$

Для центральной коники эта формула позволяет найти аффинные координаты центра в карте  $U_0$ :

$$(z_1, z_2) = \left( \frac{\beta_{12}\beta_{02} - \beta_{01}\beta_{22}}{\Delta_{12}}, \frac{\beta_{01}\beta_{12} - \beta_{11}\beta_{02}}{\Delta_{12}} \right). \quad (21-7)$$

Для параболы  $\Delta_{12} = 0$ , и формула (21-7) даёт координаты направления оси параболы:

$$(x_1 : x_2) = (\beta_{12}\beta_{02} - \beta_{01}\beta_{22} : \beta_{01}\beta_{12} - \beta_{11}\beta_{02}). \quad (21-8)$$

**21.2.1. Окружности.** Сопряжение<sup>2</sup> относительно центральной коники  $C$  задаёт на бесконечности инволюцию, неподвижными точками которой являются асимптотические направления коники  $C$ . Если эта инволюция совпадает с перпендикулярностью<sup>3</sup>, что равносильно совпадению асимптотических направлений коники  $C$  с абсолютными направлениями<sup>4</sup>  $\iota_\pm$ , то коника  $C$  называется *окружностью*. Это определение согласуется со школьным: проективное замыкание «школьной» окружности радиуса  $r$  с центром в точке  $c = (c_1, c_2) \in \mathbb{R}^2$  задаётся на  $\mathbb{P}_2$  однородным уравнением  $(x_1 - c_1x_0)^2 + (x_2 - c_2x_0)^2 = r^2x_0^2$  и пересекает бесконечно удалённую прямую  $x_0 = 0$  в точности по абсолютности  $x_1^2 + x_2^2 = 0$ ; наоборот, выбирая на непустой гладкой вещественной конике  $C$  три неколлинеарных вещественных точки  $p_1, p_2, p_3$ , видим, что если такая коника проходит через точки  $\iota_\pm$ , то она совпадает со «школьной» окружностью, проходящей через точки  $p_1, p_2, p_3$ , поскольку через пять точек проходит ровно одна гладкая коника.

**21.2.2. Главные оси центральной коники.** Если центральная коника  $C$  не является окружностью, то согласно сл. 18.4 на стр. 231 существуют ровно два направления  $x_*, y_* \in \ell_\infty$ , одновременно перпендикулярные друг другу и сопряжённые относительно коники  $C$ . Эти направления автоматически различны, поскольку равенство  $x_* = y_*$  означает, что эта точка совпадает с одной из точек  $\iota_\pm$ , а вещественная коника, проходящая через одну из точек  $\iota_\pm$  автоматически проходит и через комплексно сопряжённую ей вторую точку  $\iota_\mp$ , а значит, является окружностью. Перпендикулярные сопряжённые друг другу относительно  $C$  направления называются *главными осями* коники  $C$ . Их легко найти явно: если  $x_* = (x_1 : x_2)$ , то  $y_* = (-x_2 : x_1)$  в силу перпендикулярности, а сопряжённость относительно  $C$  означает, что

$$0 = (x_1, x_2) \begin{pmatrix} \beta_{11} & \beta_{12} \\ \beta_{12} & \beta_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -x_2 \\ x_1 \end{pmatrix} = \beta_{12}x_1^2 - (\beta_{11} - \beta_{22})x_1x_2 - \beta_{12}x_2^2, \quad (21-9)$$

откуда

$$x_* = (\beta_{11} - \beta_{22} + \sqrt{D} : 2\beta_{12}), \quad y_* = (\beta_{11} - \beta_{22} - \sqrt{D} : 2\beta_{12}), \quad (21-10)$$

где  $D = (\beta_{11} - \beta_{22})^2 + 4\beta_{12}^2$ .

<sup>1</sup>Противоположный по знаку дискриминанту бинарной квадратичной формы с матрицей Грама  $B_\infty$ , см. прим. 15.1 на стр. 185 и прим. 17.6 на стр. 208.

<sup>2</sup>См. п° 19.1.2 на стр. 234.

<sup>3</sup>См. п° 21.1.2 на стр. 259.

<sup>4</sup>См. формулу (21-2) на стр. 259.

УПРАЖНЕНИЕ 21.3. Убедитесь, что  $x_*$  и  $y_*$  являются собственными векторами симметричной матрицы  $B_\infty$  из формулы (21-5) с собственными числами, соответственно, равными<sup>1</sup>

$$(\beta_{11} + \beta_{22} + \sqrt{D})/2 \quad \text{и} \quad (\beta_{11} + \beta_{22} - \sqrt{D})/2.$$

Поскольку центр  $z_*$  является полюсом прямой  $\ell_\infty = (x_*y_*)$ , треугольник  $\Delta x_*y_*z_*$  автополярен относительно коники  $C$ . Таким образом, матрица Грама коники  $C$  в базисе  $x_*, y_*, z_*$  диагональна, и в аффинном координатном репере карты  $U_0$  с началом в точке  $z_*$  и евклидово перпендикулярными базисными векторами  $x_*$  и  $y_*$  коника  $C$  задаётся неоднородным уравнением вида

$$\alpha x^2 + \beta y^2 = 1$$

где  $\alpha = -f(x_*) / f(z_*)$ ,  $\beta = -f(y_*) / f(z_*)$ , а  $f(x_1, x_2)$  — исходный неоднородный многочлен (21-3), задающий конику  $C$ .

**21.3. Геометрия центральных коник.** Точка  $f \in \mathbb{P}_2 \setminus \ell_\infty$  называется *фокусом* центральной коники  $C \subset \mathbb{P}_2$ , если обе прямые  $(f\iota_+)$  и  $(f\iota_-)$  касаются коники  $C$ . Поляры фокусов относительно коники  $C$  называются *директрисами* этой коники. Таким образом, центральная коника имеет четыре различных фокуса, см. рис. 21◊3.

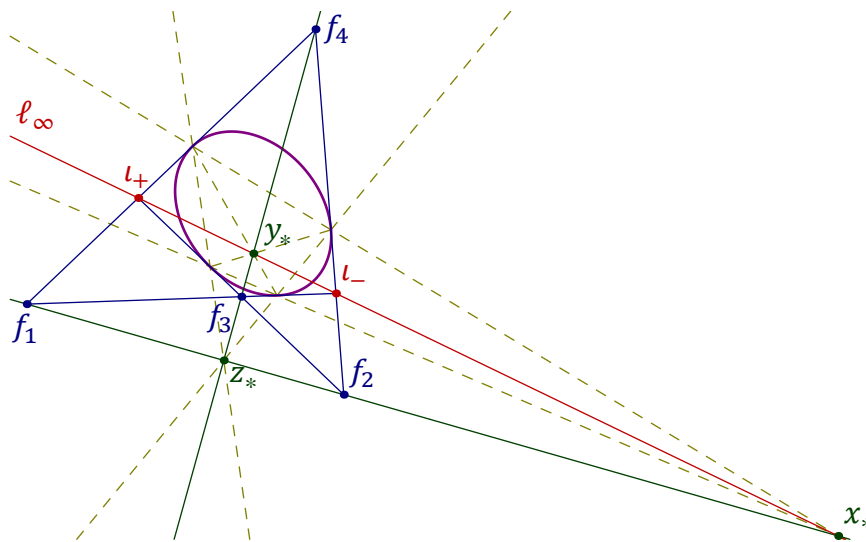


Рис. 21◊3. Фокусы, директрисы и главные оси центральной коники.

Комплексное сопряжение переставляет между собою абсолютные направления  $\iota_\pm$  и переводит касательные  $\ell_1, \ell_2$ , опущенные на  $C$  из  $\iota_+$ , в касательные  $\bar{\ell}_1, \bar{\ell}_2$ , опущенные из  $\iota_- = \bar{\iota}_+$ . Поэтому фокусы  $f_1 \stackrel{\text{def}}{=} \ell_1 \cap \bar{\ell}_1$  и  $f_2 \stackrel{\text{def}}{=} \ell_2 \cap \bar{\ell}_2$  вещественны, а фокусы  $f_3 \stackrel{\text{def}}{=} \ell_1 \cap \bar{\ell}_2$  и  $f_4 \stackrel{\text{def}}{=} \ell_2 \cap \bar{\ell}_1$  невещественны и комплексно сопряжены друг другу. Обозначим через  $\Delta x_*y_*z_*$  треугольник, ассоциированный с вписанным в конику  $C$  четырёхвершинником, который образован точками касания с коникой четырёх фокальных касательных, опущенных из точек  $\iota_\pm$ . Согласно предл. 20.1 на стр. 251 этот треугольник автополярен относительно коники  $C$ . Поскольку точка  $x_*$  лежит на

<sup>1</sup>Эти числа суть корни характеристического многочлена  $\lambda^2 - (\beta_{11} + \beta_{22})\lambda + \Delta_{12}$  матрицы  $B_\infty$ . Обратите внимание, что он имеет тот же дискриминант  $D = (\beta_{11} + \beta_{22})^2 - 4(\beta_{11}\beta_{22} - \beta_{12}^2) = (\beta_{11} - \beta_{22})^2 + 4\beta_{12}^2$ , что и многочлен (21-9).

полярах фокусов  $f_3$  и  $f_4$ , прямая  $(f_3f_4)$  является полярной точки  $x_*$  и, значит, совпадает с прямой  $(y_*z_*)$ . По той же причине прямая  $(f_1f_2)$  совпадает с прямой  $(x_*z_*)$ , а прямая  $(l_+l_-) = l_\infty$  — с прямой  $(x_*y_*)$ , см. рис. 21◊3. Таким образом, прямые  $(f_1f_2)$  и  $(f_3f_4)$  пересекаются в центре  $z_*$  коники  $C$  и пересекают бесконечность в точках  $x_* = l_\infty \cap (f_1f_2)$  и  $y_* = l_\infty \cap (f_2f_3)$ , которые являются главными осями коники  $C$ , ибо  $[x_*, y_*, l_+, l_-] = -1$ , так как в пучке прямых с центром в фокусе  $f_1$  касательные прямые  $(f_1l_+)$  и  $(f_1l_-)$  гармоничны сопряжённым относительно  $C$  прямым<sup>1</sup>  $(f_1x_*)$  и  $(f_1, y_*)$ .

УПРАЖНЕНИЕ 21.4. Покажите, что пересекающиеся в точке  $y_*$  пунктирные прямые на рис. 21◊3 проходят через фокусы  $f_1$  и  $f_2$ .

#### ПРИМЕР 21.2

Выясним тип коники  $C$ , задаваемой в стандартных координатах на  $\mathbb{R}^2$  уравнением

$$-2x_1^2 + 12x_1x_2 - x_2^2 + 10x_1 - 6x_2 = 4, \quad (21-11)$$

и найдём её центр, асимптоты и главные оси. Проективное замыкание коники  $C$  задаётся в  $\mathbb{P}_2$  однородным уравнением  $-4x_0^2 + 10x_0x_1 - 6x_0x_2 - 2x_1^2 + 12x_1x_2 - x_2^2 = 0$  с матрицей Грама

$$B = \begin{pmatrix} -4 & 5 & -3 \\ 5 & -2 & 6 \\ -3 & 6 & -1 \end{pmatrix}. \quad (21-12)$$

По форм. (21-7) на стр. 261 однородные координаты центра суть

$$\left( \det \begin{pmatrix} -2 & 6 \\ 6 & 1 \end{pmatrix} : -\det \begin{pmatrix} 5 & -3 \\ 6 & -2 \end{pmatrix} : \det \begin{pmatrix} 5 & -3 \\ -2 & 6 \end{pmatrix} \right) = (-10 : -13 : 24),$$

откуда аффинные координаты центра в стандартном базисе  $\mathbb{R}^2$  равны  $(z_1, z_2) = (13/10, 12/5)$ . Пересечение коники  $C$  с бесконечно удалённой прямой  $x_0 = 0$  задаётся уравнением

$$2x_1^2 - 12x_1x_2 + x_2^2 = 0,$$

которое имеет два вещественных корня  $(x_1 : x_2) = (2 : 6 \pm \sqrt{34})$ . Поэтому коника  $C$  является гиперболой, и её асимптоты задаются в стандартных координатах на  $\mathbb{R}^2$  уравнениями  $(6 \pm \sqrt{34})(x_1 - 13/10) = 2(x_2 - 12/5)$ . Направления главных осей коники  $C$  являются корнями уравнения из форм. (21-10) на стр. 261:  $6x_1^2 + x_1x_2 - 6x_2^2 = 0$  и равны  $(12 : -1 \pm \sqrt{145})$ .

#### ПРИМЕР 21.3

Центр и главные оси центральной коники, заданной аффинным уравнением

$$\alpha x^2 + \beta y^2 = 1, \quad \text{где } \alpha > 0, \quad (21-13)$$

имеют однородные координаты  $z_* = (1 : 0 : 0)$ ,  $x_* = (0 : 1 : 0)$ ,  $y_* = (0 : 0 : 1)$ . Точка  $f = z_* + tx_* \in (z_*x_*)$  является фокусом если и только если ограничение однородного уравнения коники на прямую  $(fl_+)$  вырождено. Это ограничение имеет в базисе  $f, l_+$  матрицу Грама

$$\begin{pmatrix} 1 & t & 0 \\ 0 & i & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha & 0 \\ 0 & 0 & \beta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ t & i \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha t^2 - 1 & i\alpha t \\ i\alpha t & \beta - \alpha \end{pmatrix}$$

<sup>1</sup>См. сл. 19.1 на стр. 235.

с определителем  $\alpha\beta t^2 + \beta - \alpha$ , который зануляется при  $t = \pm\sqrt{\alpha^{-1} - \beta^{-1}}$ . Таким образом, два лежащих на оси  $(z_*x_*)$  фокуса коники (21-13) имеют аффинные координаты  $(\pm\sqrt{\alpha^{-1} - \beta^{-1}}, 0)$ . Симметричным образом, два лежащих на перпендикулярной оси  $(z_*y_*)$  фокуса имеют аффинные координаты  $(0, \pm\sqrt{\beta^{-1} - \alpha^{-1}})$ . При  $\beta > \alpha$  или  $\beta < 0$  первые два фокуса вещественны, а вторые — чисто мнимы и комплексно сопряжены, при  $0 < \beta < \alpha$  всё наоборот. При  $\beta < 0$  коника (21-13) является гиперболой, при  $0 < \beta < \alpha$  и  $\beta > \alpha$  — эллипсом. При  $\alpha = \beta$  коника превращается в окружность и все четыре фокуса сливаются с её центром. У эллипса и гиперболы, заданных на евклидовой плоскости своими стандартными аффинными уравнениями

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad \text{и} \quad \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1, \quad \text{в которых } \alpha = \frac{1}{a^2}, \beta = \frac{1}{b^2}, a, b \in \mathbb{R},$$

вещественные фокусы располагаются так, как показано на рис. 21◊4 и рис. 21◊5.

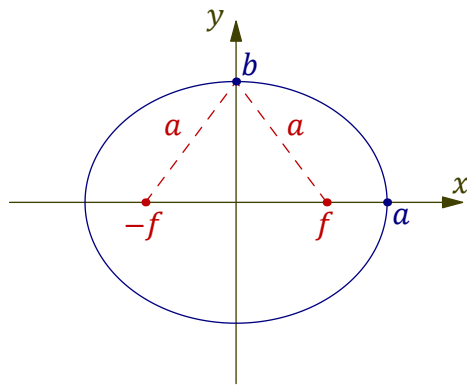


Рис. 21◊4. Вещественные фокусы эллипса.

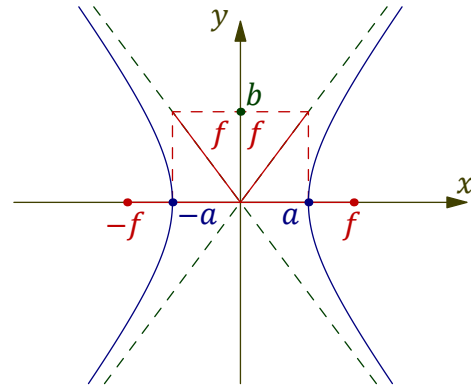


Рис. 21◊5. Вещественные фокусы гиперболы.

**21.3.1. Директор центральной коники.** Сопряжение относительно центральной коники  $C$  задаёт гомографию  $\delta_C : l_+^\times \simeq l_-^\times$  между пучками прямых с центрами в точках  $l_\pm$ . Она переводит прямую  $\ell \ni l_+$  в сопряжённую ей относительно  $C$  прямую  $\delta_C(\ell) \ni l_-$ , см. рис. 21◊6.

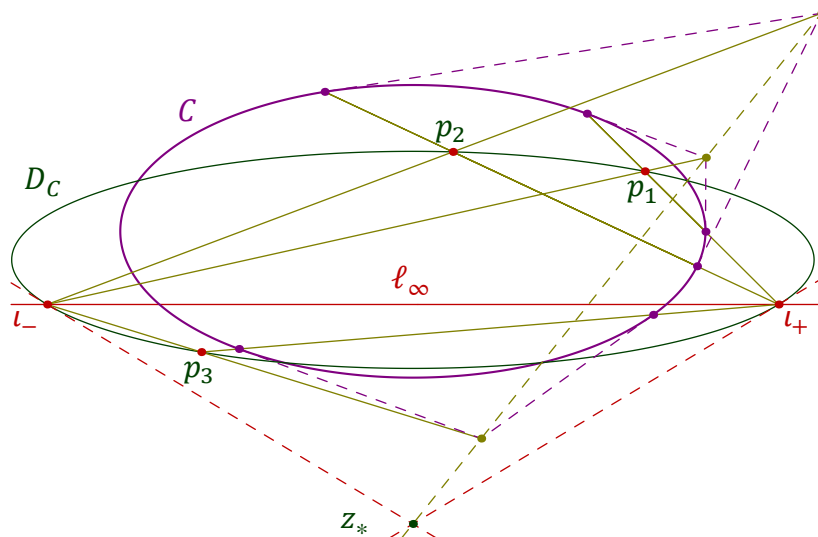


Рис. 21◊6. Директор центральной коники.



Пусть точка  $p = \ell \cap \delta_C(\ell)$  является точкой пересечения соответственных прямых<sup>1</sup>. На пучке  $p^\times \subset \mathbb{P}_2^\times$  всех проходящих через  $p$  прямых коника  $C$  также задаёт инволюцию, переставляющую между собою сопряжённые относительно  $C$  прямые. Так как неподвижными точками этой инволюции являются две опущенные из  $p$  на  $C$  касательные, сопряжённые относительно  $C$  прямые  $\ell, \delta_C(\ell) \in p^\times$  гармоничны<sup>2</sup> в пучке  $p^\times$  паре касательных, опущенных из  $p$  на  $C$ . Стало быть, эти касательные перпендикулярны. Наоборот, если точка  $p \in \mathbb{P}_2$  такова, что опущенные из неё на конику  $C$  касательные перпендикулярны, т. е. сопряжены прямым  $(p\iota_+)$  и  $(p\iota_-)$ , то последние две прямые сопряжены друг другу относительно коники  $C$ , т. е. переводятся друг в друга гомографией  $\delta_C: \iota_+^\times \simeq \iota_-^\times$ . Мы заключаем, что ГМТ пересечения соответственных прямых  $\ell \cap \delta_C(\ell)$  совпадает с ГМТ  $p \in \mathbb{P}_2$ , из которых коника  $C$  видна под прямым углом. Согласно предл. 18.2 на стр. 225, ГМТ пересечения соответственных прямых неперспективной гомографии между двумя пучками прямых является гладкой коникой, проходящей через центры пучков, как на рис. 21◊6. Поскольку в нашем случае центрами пучков служат точки  $\iota_\pm$ , эта коника — окружность. Она называется директором центральной коники  $C$  и обозначается  $D_C$ . Так как<sup>3</sup>  $\delta_C(\ell_\infty) = T_{\iota_-}D_C$  и  $\delta_C(T_{\iota_+}D_C) = \ell_\infty$ , обе пары прямых  $\ell_\infty, T_{\iota_+}D_C$  и  $\ell_\infty, T_{\iota_-}D_C$  гармоничны касательным, опущенным на конику  $C$  из точек  $\iota_\pm$ . Тем самым, прямая  $\ell_\infty$  сопряжена относительно коники  $C$  обоим касательным к окружности  $D_C$  в точках  $\iota_\pm$ . Следовательно, эти касательные пересекаются в полюсе  $z_*$  прямой  $\ell_\infty$  относительно коники  $C$ , т. е. директор концентричен  $C$ .

Упражнение 21.5. Напишите явное уравнение директора  $D_C$  в главных осях коники  $C$ .

**21.3.2. Софокусные семейства центральных коник.** Гладкие вещественные коники с теми же самыми фокусами<sup>4</sup>, что и заданная гладкая центральная коника  $C$ , лежат в семействе комплексных коник на  $\mathbb{P}_2$ , касающихся фиксированных четырёх прямых — опущенных из точек  $\iota_\pm$  на конику  $C$  касательных, см. рис. 21◊3 на стр. 262. Все эти коники имеют общие центр и главные оси, а двойственные им коники в  $\mathbb{P}_2^\times$  образуют простой пучок  $F$  коник, проходящих через четыре точки, двойственные прямым

$$(\iota_+f_1) = (\iota_+f_4), \quad (\iota_+f_2) = (\iota_+f_3), \quad (\iota_-f_2) = (\iota_-f_4), \quad (\iota_-f_1) = (\iota_-f_3). \quad (21-14)$$

Три распавшиеся коники этого пучка суть объединения пар прямых, изображающих пучки прямых на  $\mathbb{P}_2$ , с центрами в точках  $\iota_\pm, f_{1,2}$  и  $f_{3,4}$ :

$$\iota_+^\times \cup \iota_-^\times, \quad f_1^\times \cup f_2^\times, \quad f_3^\times \cup f_4^\times. \quad (21-15)$$

Для любой точки  $p \in \mathbb{P}_2$  на пучке  $p^\times \subset \mathbb{P}_2^\times$  проходящих через  $p$  прямых имеется инволюция Дезарга<sup>5</sup>  $\sigma_F: p^\times \simeq p^\times$ , которая задаётся пучком коник  $F$  и переставляет между собою проходящие через  $p$  прямые  $\ell_1$  и  $\ell_2$  если и только если эти прямые касаются некоторой софокусной с  $C$  коники  $Q$ . Прямая  $\ell \ni p$  является неподвижной точкой инволюции  $\sigma_F$  если и только если она касается некоторой софокусной с  $C$  коники в точке  $p$ . Поскольку инволютивная гомография над полем  $\mathbb{C}$  имеет ровно две различные неподвижные точки<sup>6</sup>, через любую точку  $p \in \mathbb{P}_2$  проходят ровно две софокусных с  $C$  коники  $C'_p, C''_p$ . Касательные к этим коникам прямые  $\ell' = T_p C'_p$

<sup>1</sup>На рис. 21◊6 показаны три такие точки:  $p_1, p_2$  и  $p_3$ .

<sup>2</sup>См. сл. 19.1 на стр. 235.

<sup>3</sup>См. предл. 18.2 на стр. 225.

<sup>4</sup>Обратите внимание, что для этого достаточно, чтобы два вещественных фокуса были общими.

<sup>5</sup>См. прим. 20.1 на стр. 251.

<sup>6</sup>См. прим. 18.5 на стр. 230.

и  $\ell'' = T_p C_p''$ , будучи неподвижными точками инволюции Дезарга, гармоничны любой паре прямых, переставляемых этой инволюцией. Пересекая прямую  $p^\times \subset \mathbb{P}_2^\times$  с тремя распавшимися кониками (21-15) из пучка  $F$ , мы видим, что  $\sigma_F$  переставляет между собою пары прямых

$$(p\iota_+) \overset{\sigma_C}{\leftrightarrow} (p\iota_-), \quad (pf_1) \overset{\sigma_C}{\leftrightarrow} (pf_2), \quad (pf_3) \overset{\sigma_C}{\leftrightarrow} (pf_4).$$

Это приводит к равенству  $[\ell', \ell'', (p\iota_+), (p\iota_-)] = -1$ , означающему, что неподвижные прямые  $\ell'$  и  $\ell''$  перпендикулярны<sup>1</sup>. Тем самым, две проходящие через  $p$  софокусные  $C$  коники пересекаются в точке  $p$  под прямым углом, как на рис. 21◊7. Так как инволюция Дезарга сохраняет двойные отношения,  $[\ell', (pf_1), (p\iota_+), (p\iota_-)] = [\ell', (pf_2), (p\iota_-), (p\iota_+)] = [\ell', (pf_2), (p\iota_+), (p\iota_-)]$ , т. е. острые углы, которые прямая  $\ell'$  образует с прямыми  $(pf_1)$  и  $(pf_2)$  равны друг другу в силу прим. 21.1 на стр. 259. По той же причине равны друг другу и острые углы, которые образует с прямыми  $(pf_1)$  и  $(pf_2)$  прямая  $\ell''$ , а также острые углы, которые каждая из прямых  $\ell', \ell''$  образует с касательными, опущенными из точки  $p$  на любую софокусную с  $C$  конику. Иначе говоря, перпендикулярные касательные  $\ell', \ell''$  к двум проходящим через  $p$  софокусным с  $C$  коникам являются биссектрисами углов между прямыми  $(pf_1)$  и  $(pf_2)$ , соединяющими точку  $p$  с вещественными фокусами, а также биссектрисами углов между двумя касательными прямыми, опущенными из  $p$  на любую не проходящую через  $p$  софокусную с  $C$  конику, см. рис. 21◊7. Эти факты известны как *фокальные свойства геометрической оптики*.

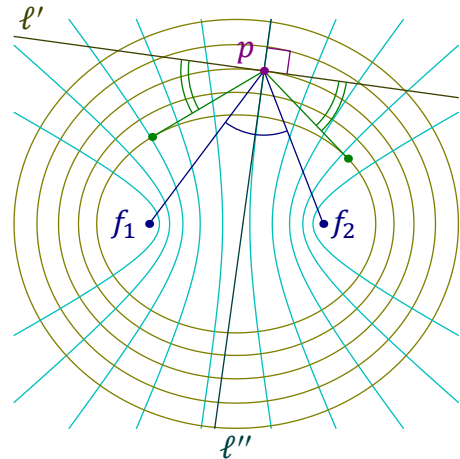


Рис. 21◊7. Софокусные центральные коники.

Предложение 21.1

Для любых точки  $p$  и гладкой центральной коники  $C$  с вещественными фокусами  $f_1, f_2$  угол между прямой  $(pf_1)$  и опущенной из  $p$  на  $C$  касательной равен углу между второй касательной и прямой  $(pf_2)$ . □

Предложение 21.2

Все отражённые гладкой центральной коникой лучи света от точечного источника в её вещественном фокусе проходят через другой вещественный фокус. □

Пример 21.4

Если центральная коника  $C \subset \mathbb{R}^2$  имеет уравнение  $ax^2 + by^2 = 1$ , то двойственная ей коника  $C^\times \subset \mathbb{P}_2^\times$  задаётся однородным уравнением<sup>2</sup>  $-x_0^2 + a^{-1}x_1^2 + b^{-1}x_2^2 = 0$ , а распавшаяся коника  $\iota_+^\times \cup \iota_-^\times \subset \mathbb{P}_2^\times$  — уравнением  $x_1^2 + x_2^2 = 0$ . Натянутый на них пучок коник на  $\mathbb{P}_2^\times$  описывается однопараметрическим уравнением  $-x_0^2 + (a^{-1} + \lambda) \cdot x_1^2 + (b^{-1} + \lambda) \cdot x_2^2 = 0$ , где  $\lambda \in C$ . Двойственные им коники софокусной с  $C$  системы коник на  $\mathbb{P}_2$  имеют аффинные уравнения

$$\frac{x^2}{a^{-1} + \lambda} + \frac{y^2}{b^{-1} + \lambda} = \frac{ax^2}{1 + a\lambda} + \frac{by^2}{1 + b\lambda} = 1.$$

<sup>1</sup>См. п.° 21.1.2 на стр. 259.

<sup>2</sup>См. предл. 19.2 на стр. 235.

Упражнение 21.6. Покажите, что из двух пересекающихся в заданной точке коник софокусной системы одна является эллипсом, а другая — гиперболой.

**21.3.3. Гипербола Аполлония.** Для произвольных точки  $p$  и гладкой центральной коники  $C$  с центром в точке  $z_*$  обозначим через  $\varphi : z_*^\times \simeq p^\times$  гомографию пучка диаметров коники  $C$  в пучок прямых с центром в  $p$ , переводящую диаметр  $\ell \ni z_*$  в опущенный из точки  $p$  перпендикуляр  $\ell_p$  на сопряжённый к  $\ell$  относительно коники  $C$  диаметр  $\ell' \ni z_*$ , см. рис. 21◊8.

Упражнение 21.7. Убедитесь, что это и впрямь гомография.

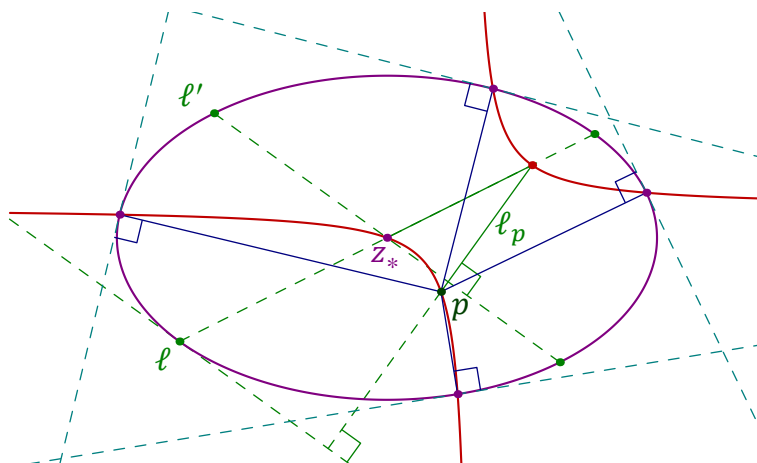


Рис. 21◊8. Гипербола Аполлония точки  $p$  относительно эллипса.

Согласно предл. 18.2 на стр. 225, ГМТ пересечения соответственных прямых  $\ell \cap \ell_p$  является коникой  $H$ , проходящей через центр коники  $C$  и точку  $p$ . Поскольку гомография  $\varphi$  переводит главные направления  $(z_*x_*)$  и  $(z_*y_*)$  в прямые  $(px_*)$  и  $(py_*)$  соответственно, коника  $H$  является гиперболой с асимптотами, параллельными главным осям коники  $C$ . Она называется *гиперболой Аполлония* точки  $p$  относительно коники  $C$  и замечательна тем, что пересекает конику  $C$  ровно по таким точкам  $a \in C$ , для которых прямая  $(pa)$  перпендикулярна касательной  $T_aC$  к конике  $C$  в точке  $a$ , поскольку сопряжённый к  $\ell$  диаметр  $\ell'$  параллелен касательным, восстановленным в концах диаметра  $\ell$ , см. рис. 21◊8. В качестве следствия мы заключаем, что из произвольной точки  $p$  на гладкую центральную конику  $C$  можно опустить не более четырёх перпендикуляров.

**21.4. Геометрия парабол.** Парабола  $P$ , касающаяся бесконечности в точке  $x_* = \ell_\infty \cap P$ , может рассматриваться как предельное положение центральной коники, которую сдвинули так, что её центр слился с тремя фокусами  $f_2, f_3, f_4$  в одну точку  $x_* \in \ell_\infty$  — направление оси<sup>1</sup> параболы  $P$ , см. рис. 21◊9. Директрисы фокусов  $f_2, f_3, f_4$  при этом тоже сливаются друг с другом и превращаются в прямую  $\ell_\infty$ . Единственный оставшийся конечный фокус  $f = f_1$  называется *фокусом*, а его поляра — *директрисой* параболы  $P$ . Конечная точка пересечения параболы с прямой  $(x_*f)$  обозначается через  $z_*$  и называется *вершиной* параболы. Все они автоматически вещественны. Точки  $x_*$  и  $y_* = T_cP \cap \ell_\infty$  называются *главными осями* параболы  $P$ . Они сопряжены относительно параболы и перпендикулярны. Первое очевидно из рис. 21◊9, второе

<sup>1</sup>См. рис. 21◊2 на стр. 260.

выражает тот факт, что в пучке прямых с центром в  $f_1$  сопряжённые относительно коники  $C$  направления  $x_*$ ,  $y_*$  гармоничны абсолютным касательным направлениям.

УПРАЖНЕНИЕ 21.8. Покажите, что середины хорд, отсекаемых из параболы любым пучком параллельных прямых, лежат на прямой, параллельной оси параболы.

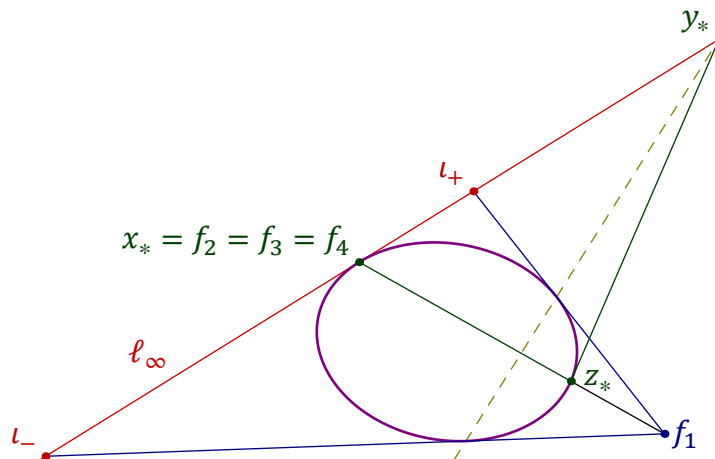


Рис. 21◊9. Фокус, директриса и ось параболы.

Так как анизотропный вектор  $y_*$  сопряжён относительно  $P$  обеим точкам  $x_*$ ,  $z_*$ , и обе они изотропны, однородное уравнение параболы в базисе  $x_*$ ,  $y_*$ ,  $z_*$  записывается в виде  $y^2 = 2axz$ , где  $a > 0$ . В аффинном репере карты  $U_0$  с началом в  $z_*$  и евклидово перпендикулярными осями координат  $x_*$ ,  $y_*$  это уравнение преобразуется в неоднородное уравнение  $y^2 = 2ax$ .

УПРАЖНЕНИЕ 21.9. Убедитесь, что фокус такой параболы находится в точке  $(a/2, 0)$ , а директриса задаётся уравнением  $x = -a/2$ .

ПРИМЕР 21.5 (ОТЫСКИВАНИЕ ВЕРШИНЫ ПАРАБОЛЫ)

Определим тип коники  $C$ , заданной в ортонормальном базисе евклидовой плоскости  $\mathbb{R}^2$  уравнением  $x^2 - 4xy + 4y^2 + 4x - 6y + 3 = 0$ . Матрица Грама её проективного замыкания

$$B = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -3 \\ 2 & 1 & -2 \\ -3 & -2 & 4 \end{pmatrix}.$$

По форм. (21-6) на стр. 261 полюс бесконечно удалённой прямой  $\ell_\infty$  находится в точке

$$x_* = \left( \det \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 4 \end{pmatrix} : -\det \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -3 & 4 \end{pmatrix} : \det \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -3 & -2 \end{pmatrix} \right) = (0 : -2 : -1) \in \ell_\infty.$$

Тем самым, коника является параболой. Её ось параллельна вектору  $(2, 1) \in \mathbb{R}^2$ , т. е. проходит через изотропную точку  $x_* = (0 : 2 : 1) \in \ell_\infty$ , и является полярной евклидово перпендикулярной к  $x_*$  точки  $y_* = (0 : -1 : 2) \in \ell_\infty$ , т. е. задаётся уравнением  $\alpha_0 x_0 + \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 = 0$  с коэффициентами  $(\alpha_0 : \alpha_1 : \alpha_2) = (0 : -1 : 2)B = (-8 : -5 : 10)$ . Вершина  $z_*$  параболы  $C$  является второй, отличной от  $x_*$ , изотропной точкой квадратичной формы  $B$  на оси и может быть

получена отражением точки  $x_*$  в  $B$ -ортогонале к любой лежащей на оси анизотропной точке. Беря в качестве таковой  $a = (5, -8, 0)$ , находим  $(5, -8, 0) B = (-1, 2, 1)$ , откуда

$$\beta(a, x_*) = (-1, 2, 1) \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = 5, \quad \beta(a, a) = (-1, 2, 1) \begin{pmatrix} 5 \\ -8 \\ 0 \end{pmatrix} = -21,$$

$$z_* = \sigma_a(x_*) = x_* - 2 \frac{\beta(a, x_*)}{\beta(a, a)} a = (0, 2, 1) + \frac{10}{21} (5, -8, 0) = (50 : -38 : 21),$$

где через  $\beta$  обозначено скалярное произведение с матрицей Грама  $B$ . Таким образом, вершина параболы имеет аффинные координаты  $(-19/25, 21/50)$ .

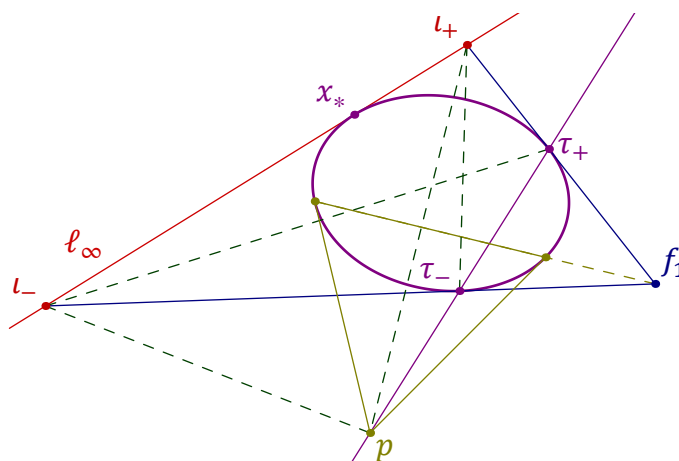


Рис. 21◊10. Директор параболы совпадает с её директрисой.

ПРИМЕР 21.6 (ДИРЕКТОР ПАРАБОЛЫ СОВПАДАЕТ С ДИРЕКТРИСОЙ)

Гомография  $\delta_P : l_+^{\times} \rightleftharpoons l_-^{\times}$ , задаваемая сопряжением прямых параболой<sup>1</sup>  $P$ , перспективна, так как соединяющая центры пучков прямая  $l_{\infty}$  самосопряжена. Поэтому ГМТ пересечения соответственных прямых этой гомографии распадается в объединение<sup>2</sup> прямой  $l_{\infty}$  и прямой, соединяющей точки пересечений каких-нибудь двух пар соответственных прямых. Таковыми являются точки  $\tau_+$  и  $\tau_-$  пересечения параболы с фокальными касательными, см. рис. 21◊10. Поэтому директриса параболы представляет собою ГМТ, из которых параболу видно под прямым углом<sup>3</sup>, т. е. директор параболы.

Следствие 21.1

Касательные к параболы, проведённые через концы любой фокальной хорды, пересекаются на директрисе под прямым углом.

Доказательство. Поскольку полюс  $p$  любой фокальной хорды сопряжён фокусу параболы, он лежит на директрисе параболы, см. рис. 21◊10.  $\square$

<sup>1</sup>См. н° 21.3.1 на стр. 264.

<sup>2</sup>См. предл. 18.2 на стр. 225.

<sup>3</sup>Ибо такие точки как раз и являются точками пересечения сопряжённых относительно  $P$  прямых, проходящих через  $l_{\pm}$ , см. н° 21.3.1 на стр. 264.

**21.4.1. Софокусные параболы.** Параболы называются *софокусными*, если у них один и тот же фокус  $f$  и параллельные оси<sup>1</sup>. Семейство парабол, софокусных заданной параболе  $P$ , состоит из всех коник, вписанных в треугольник  $f\iota_-\iota_+$  и касающихся его стороны  $\ell_\infty = (\iota_-\iota_+)$  в фиксированной точке  $x_*$ . Двойственные им коники образуют в  $\mathbb{P}_2^\times$  пучок с тремя базисными точками<sup>2</sup> — сторонами треугольника  $f_1\iota_-\iota_+$ . Он порождён двумя распавшимися кониками — объединением пучков  $x_*^\times \cup f^\times$  с особой точкой, двойственной оси параболы, и объединением пучков  $\iota_+^\times \cup \iota_-^\times$  с особой точкой  $\ell_\infty^\times$ , которая лежит на прямой  $x_*^\times$  и в которой все коники пучка касаются этой прямой. Всё сказанное в н° 21.3.2 для софокусных центральных коник дословно сохраняет силу и для софокусных парабол: через любую точку  $p \in \mathbb{P}_2$  проходят ровно две софокусные параболы, касательные к которым в точке  $p$  перпендикулярны друг другу и являются биссектрисами углов между прямой  $(pf)$  и проходящей через  $p$  прямой, параллельной оси параболы, а также углов между двумя касательными, опущенными из  $p$  на произвольную не проходящую через  $p$  софокусную с  $P$  параболу. Мы получаем следующие *фокальные свойства параболы*.

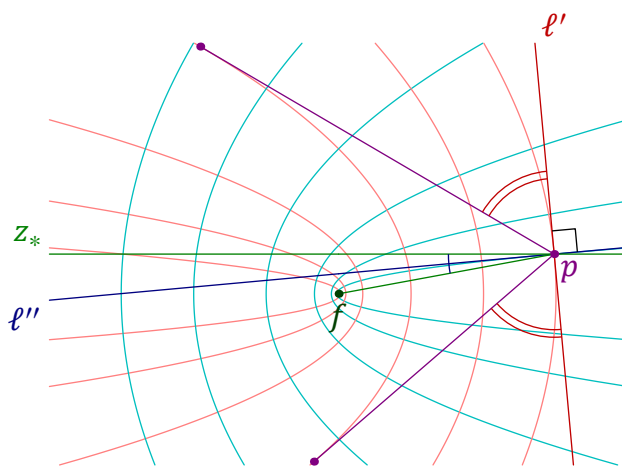


Рис. 21◊11. Софокусные параболы.

**Предложение 21.3**

Для любой точки  $p$  угол между касательной, опущенной из  $p$  на параболу  $P$ , и прямой  $(pf)$ , ведущей из  $p$  в фокус параболы, равен углу между второй касательной и осью параболы.  $\square$

**Предложение 21.4**

Все отражённые параболой лучи от точечного источника в её фокусе идут параллельно оси параболы.  $\square$

**Пример 21.7**

Если парабола  $P$  задаётся в стандартном ортонормальном базисе евклидовой плоскости  $\mathbb{R}^2$  каноническим уравнением  $y^2 = 2ax$ , то двойственная ей коника  $P^\times \subset \mathbb{P}_2^\times$  имеет однородное уравнение  $2a^{-1}x_0x_1 - x_2^2 = 0$  и порождает вместе с задаваемой уравнением  $x_1^2 + x_2^2 = 0$  распавшейся коникой  $\iota_+^\times \cup \iota_-^\times$  пучок коник  $(1 + \lambda)x_2^2 + 2a^{-1}x_0x_1 + \lambda x_1^2 = 0$  на  $\mathbb{P}_2^\times$ . Двойственные им софокусные с  $P$  параболы на  $\mathbb{P}_2$  имеют однородные уравнения  $(1 + \lambda)^{-1}y^2 - 2axz + \lambda z^2 = 0$  и аффинные уравнения  $y^2 = (1 + \lambda)(2ax - \lambda)$ .

<sup>1</sup>Т. е. один и тот же «бесконечно удалённый фокус»  $x_*$ .

<sup>2</sup>См. рис. 20◊4 на стр. 250.

**21.4.2. Гипербола Аполлония** из п° 21.3.3 существует и для любой параболы  $P$ .

УПРАЖНЕНИЕ 21.10. Убедитесь в этом!

Отличие от центральных коник заключается в том, что направление оси параболы  $x_* = \ell_\infty \cap P$  является одной из точек пересечения гиперболы Аполлония с параболой. Поэтому в аффинной карте  $U_0$  находится не более трёх точек пересечения параболы с гиперболой Аполлония, т. е. из произвольной точки плоскости на параболу можно опустить не более трёх перпендикуляров.

## §22. Аффинные квадрики

Всюду в этом параграфе мы по умолчанию считаем, что основное поле  $\mathbb{k}$  бесконечно и характеристика  $\text{char } \mathbb{k} \neq 2$ .

**22.1. Проективное оснащение аффинного пространства.** Рассмотрим векторное пространство  $V = \mathbb{k}^n$  с координатами  $(x_1, \dots, x_n)$  и вложим ассоциированное с ним аффинное пространство  $\mathbb{A}^n = \mathbb{A}(V)$  в качестве стандартной аффинной карты  $U_0 = U_{x_0} = e_0 + V$  в проективизацию  $\mathbb{P}_n = \mathbb{P}(W)$  векторного пространства  $W = \mathbb{k} \cdot e_0 \oplus V$  с координатами  $(x_0, x_1, \dots, x_n)$ . Бесконечно удалённую гиперплоскость этой карты обозначим через  $L_\infty = \text{Ann}(x_0) = \mathbb{P}(V)$ . Точки  $u \in L_\infty$  представляют собою направления в  $U_0$  в том смысле, что каждая проективная прямая  $(pu) \subset \mathbb{P}_n$ , где  $p \in U_0$ ,  $u \in L_\infty$ , пересекает аффинную карту  $U_0$  по аффинной прямой с параметрическим уравнением  $p + ut$ , где  $t$  пробегает  $\mathbb{k}$ .

**22.1.1. Вложение аффинной группы в проективную.** Напомню<sup>1</sup>, что *аффинная группа*

$$\text{Aff}(U_0) \simeq V \rtimes \text{GL}(V)$$

состоит из биективных аффинных отображений<sup>2</sup>  $\mathbb{A}(U_0) \simeq \mathbb{A}(U_0)$  и является полупрямым произведением<sup>3</sup> нормальной *подгруппы сдвигов*<sup>4</sup>  $V \subset \text{Aff}(U_0)$  и полной линейной группы  $\text{GL}(V)$ , вложенной в  $\text{Aff}(U_0)$  как стабилизатор начальной точки  $e_0 \in \mathbb{A}(U_0)$ . Будем называть две фигуры в  $\mathbb{A}(U_0)$  *аффинно конгруэнтными*, если существует аффинное преобразование, переводящее одну из них в другую.

Предложение 22.1

Аффинная группа  $\text{Aff}(U_0)$  канонически изоморфна подгруппе проективной группы  $\text{PGL}(W)$ , образованной всеми проективными преобразованиями  $\mathbb{P}(W) \simeq \mathbb{P}(W)$ , переводящими в себя бесконечно удалённую гиперплоскость  $L_\infty$  аффинной карты  $U_0$ .

Доказательство. Пусть аффинное отображение  $\varphi : U_0 \simeq U_0$  переводит точку  $e_0 + v$  в точку  $\varphi(e_0) + D_\varphi(v)$ , и его дифференциал  $D_\varphi : V \simeq V$  является линейным изоморфизмом. Тогда линейное отображение  $f : W \rightarrow W$ ,  $x_0 e_0 + v \mapsto x_0 \varphi(e_0) + D_\varphi(v)$ , переводит в себя гиперплоскость  $V = \text{Ann}(x_0) \subset W$ . Если  $x_0 e_0 + v \in \ker f$ , то  $x_0 \varphi(e_0) = -D_\varphi(v) \in V = \text{Ann}(x_0)$ , откуда  $x_0 = 0$  и  $v \in \ker D_\varphi = 0$ . Тем самым,  $f \in \text{GL}(W)$ . Проективизация  $\bar{f} : \mathbb{P}(W) \rightarrow \mathbb{P}(W)$  переводит в себя бесконечно удалённую гиперплоскость  $L_\infty = \mathbb{P}(V)$  и аффинную карту  $U_0$ , причём  $f|_{U_0} = \varphi$ .

Наоборот, если задаваемое линейным автоморфизмом  $f : W \simeq W$  проективное преобразование  $\bar{f} : \mathbb{P}(W) \simeq \mathbb{P}(W)$  переводит в себя гиперплоскость  $L_\infty = \mathbb{P}(V) \subset \mathbb{P}(W)$ , то  $f(V) \subset V$ , и так как  $\text{im } f \not\subset V$ , вектор  $f(e_0) = \lambda e_0 + u$ , где  $u \in V$  и  $\lambda \neq 0$ . Линейный изоморфизм  $g = \lambda^{-1} f : W \simeq W$  переводит каждый вектор  $e_0 + v \in U_0$  в вектор  $e_0 + \lambda^{-1} u + \lambda^{-1} f(v) \in U_0$ . Таким образом, проективное преобразование  $\bar{f} = \bar{g}$  отображает аффинную карту  $U_0$  в себя и действует на ней как аффинное преобразование с дифференциалом  $\lambda^{-1} f|_V$ , переводящее точку  $e_0$  в точку  $e_0 + \lambda^{-1} u$ . □

<sup>1</sup>См. п° 2.2 на стр. 28.

<sup>2</sup>См. п° 2.1 на стр. 24.

<sup>3</sup>См. п° 2.3 на стр. 30.

<sup>4</sup>Т. е. преобразований  $\tau_v : \mathbb{A}(U_0) \rightarrow \mathbb{A}(U_0)$ ,  $p \mapsto p + v$ , с тождественным дифференциалом  $D_{\tau_v} = \text{Id}_V$ .



**22.1.2. Проективное замыкание аффинной квадрики.** Аффинной квадрикой в  $\mathbb{A}^n = \mathbb{A}(V)$  называют фигуру  $Q = \{v \in \mathbb{A}^n \mid f(v) = 0\}$ , заданную неоднородным уравнением степени два

$$f(x_1, \dots, x_n) = f_0 + f_1(x_1, \dots, x_n) + f_2(x_1, \dots, x_n) = 0, \quad \text{где}$$

$$f_0 = \beta_{00} \in \mathbb{k}, \quad f_1(x_1, \dots, x_n) = 2 \sum_{j=1}^n \beta_{0j} x_j \in V^*, \quad f_2(x_1, \dots, x_n) = \sum_{i,j=1}^n \beta_{ij} x_i x_j \in S^2 V^*. \quad (22-1)$$

Проективное замыкание<sup>1</sup>  $\bar{Q} = V(q) \subset \mathbb{P}_n$  аффинной квадрики  $Q \subset U_0$  является множеством нулей однородной квадратичной формы  $q(x_0, x_1, \dots, x_n) = x_0^2 f_0 + x_0 f_1(x_1, \dots, x_n) + f_2(x_1, \dots, x_n)$  с матрицей Грама  $B = (\beta_{ij})$ ,  $0 \leq i, j \leq n$ , которую иногда называют расширенной матрицей Грама аффинной квадрики  $Q$ . При  $x_0 = 1$  уравнение  $q(x) = 0$  превращается в уравнение (22-1). Поэтому  $\bar{Q} \cap U_0 = Q$ . Пересечение проективной квадрики  $\bar{Q}$  с бесконечно удалённой гиперплоскостью  $L_\infty = \mathbb{P}(V) = \mathbb{P}_n \setminus U_0$  обозначается  $Q_\infty \stackrel{\text{def}}{=} \bar{Q} \cap L_\infty = \bar{Q} \setminus Q \subset \mathbb{P}(V)$  и называется *асимптотической квадрикой* аффинной квадрики  $Q$ . Эта квадрика задаётся однородной компонентой второй степени  $f_2 = q|_V \in S^2 V^*$  неоднородного многочлена (22-1) и имеет матрицу Грама  $B_\infty = (\beta_{ij})$  с  $1 \leq i, j \leq n$ , которая является правой нижней угловой  $n \times n$ -подматрицей расширенной матрицы Грама  $B$ .

**Предложение 22.2**

Пусть непустые аффинные квадрики  $Q', Q'' \subset U_0$  имеют в  $\mathbb{P}_n$  проективные замыкания  $\bar{Q}'$  и  $\bar{Q}''$ . Тогда  $Q'$  и  $Q''$  аффинно конгруэнтны если и только если существует такое проективное преобразование  $g: \mathbb{P}_n \xrightarrow{\simeq} \mathbb{P}_n$ , что  $g(\bar{Q}') = \bar{Q}''$  и  $g(L_\infty) = L_\infty$ .

**Доказательство.** Согласно [предл. 22.1](#), аффинные преобразования пространства  $U_0$  суть проективные преобразования пространства  $\mathbb{P}_n$ , переводящие в себя бесконечно удалённую гиперплоскость  $L_\infty \subset \mathbb{P}_n$ . Если такое проективное преобразование  $g$  переводит  $\bar{Q}'$  в  $\bar{Q}''$ , то его ограничение на карту  $U_0 = \mathbb{P}_n \setminus L_\infty$  переводит  $Q' = \bar{Q}' \setminus L_\infty$  в  $Q'' = \bar{Q}'' \setminus L_\infty$ . Наоборот, если ограничение проективного преобразования  $g$  на карту  $U_0$  переводит  $Q' = \bar{Q}' \setminus L_\infty$  в  $Q'' = \bar{Q}'' \setminus L_\infty$ , то проективные квадрики  $g(\bar{Q}')$  и  $\bar{Q}''$  совпадают друг с другом всюду вне гиперплоскости  $L_\infty$ . Идущая ниже [лем. 22.1](#) утверждает, что тогда они совпадают всюду.  $\square$

**Лемма 22.1**

Если гиперплоскость  $H \subset \mathbb{P}_n$  и непустая проективная квадрика  $P \subset \mathbb{P}_n$  над бесконечным полем  $\mathbb{k}$  таковы, что  $P \not\subset H$  и  $H \not\subset P$ , то пересечение  $P \cap H$  однозначно восстанавливается по дополнению  $P \setminus H$ .

**Доказательство.** При  $n = 1$  это следует из [прим. 17.6](#) на стр. 208. Пусть  $n \geq 2$  и  $P = V(q)$ . Если квадрика  $P$  гладкая, то над бесконечным полем в дополнении  $P \setminus H$  найдутся  $n + 2$  точки, никакие  $n + 1$  из которых не лежат в одной гиперплоскости.

**Упражнение 22.1.** Убедитесь в этом.

Полярное преобразование<sup>2</sup>  $\bar{q}: \mathbb{P}(V) \xrightarrow{\simeq} \mathbb{P}(V^*)$  переводит эти точки в их касательные гиперплоскости и тем самым однозначно ими определяется. По полярному преобразованию однозначно с точностью до пропорциональности восстанавливается матрица Грама формы  $q$ , а значит, и сама квадрика  $P$ . Если квадрика  $P$  особа, но в дополнении  $P \setminus H$  есть гладкая точка  $a$ , рассмотрим

<sup>1</sup>См. н° 17.4.3 на стр. 213.

<sup>2</sup>См. н° 19.1 на стр. 233.

любое дополнительное к  $\text{Sing } P$  проективное подпространство  $L \ni a$ . По теор. 17.1 на стр. 209 квадрика  $P$  является линейным соединением подпространства  $\text{Sing } P$  и непустой гладкой квадрики  $P' = P \cap L \ni a$ . По уже доказанному, пересечение  $P' \cap H'$  этой гладкой квадрики с гиперплоскостью  $H' = H \cap L$  в пространстве  $L$  однозначно определяется дополнением  $P' \setminus H'$ . Пересечение  $\text{Sing } P \cap H$  также однозначно восстанавливается по  $P \setminus H$ , так как каждая прямая  $(ab)$  с  $b \in \text{Sing } P \cap H$  лежит на  $P$  и все точки этой прямой кроме точки  $b$  лежат в  $P \setminus H$ . Поэтому пересечение  $P \cap H$ , будучи линейным соединением  $P' \cap H$  с  $\text{Sing } P \cap H$ , тоже однозначно восстанавливается по дополнению  $P \setminus H$ . Ну а если в дополнении  $P \setminus H$  есть особая точка  $a$ , то любая прямая  $(ab)$  с  $b \in P \cap H$  целиком лежит на квадрике и пересекает  $H$  ровно по точке  $b$ . Значит, и в этом случае пересечение  $P \cap H$  восстанавливается по  $P \setminus H$ .  $\square$

#### ОПРЕДЕЛЕНИЕ 22.1

Аффинная квадратика  $Q \subset \mathbb{A}^n = \mathbb{A}(V)$  с проективным замыканием  $\bar{Q} \subset \mathbb{P}_n = \mathbb{P}(W)$  и асимптотической квадратикой  $Q_\infty = \bar{Q} \cap L_\infty$  называется *гладкой центральной*, если обе квадрики  $\bar{Q}$ ,  $Q_\infty$  гладкие, *параболоидом* — если  $\bar{Q}$  гладкая, а  $Q_\infty$  особая, *(простым) конусом* — если  $\bar{Q}$  особая, а  $Q_\infty$  гладкая, и *цилиндром* — если обе проективные квадрики  $\bar{Q}$ ,  $Q_\infty$  особые.

**22.2. Гладкие центральные квадрики.** Если обе проективные квадрики  $\bar{Q}$  и  $Q_\infty = \bar{Q} \cap L_\infty$  гладкие, бесконечно удалённая гиперплоскость  $L_\infty$  не является касательной к  $\bar{Q}$  трансверсально, и её полюс  $c$  относительно  $\bar{Q}$  лежит в  $U_0 \setminus Q$ . Он является *центром симметрии* аффинной квадрики  $Q$ , так как по предл. 19.1 на стр. 234 на любой проходящей через  $c$  прямой, пересекающей квадратик в точках  $a$  и  $b$ , а бесконечно удалённую гиперплоскость — в точке  $d$ , выполняется равенство  $[d, c, a, b] = -1$ , означающее, что точка  $c$  является барицентром точек  $a, b$ .

На языке уравнений, квадратика  $Q$  центральна если и только если оба определителя  $\det B$ ,  $\det B_\infty$  отличны от нуля. Центр  $c$ , будучи полюсом гиперплоскости  $x_0 = 0$ , удовлетворяет линейному уравнению  $cB = (1 : 0 : \dots : 0)$ . Его однородные координаты пропорциональны верхней строке присоединённой матрицы  $B^\vee$  расширенной матрицы Грама<sup>1</sup>:

$$c = (1 : -B_{01}/B_{00} : \dots : (-1)^n B_{0n}/B_{00}).$$

Так как вектор  $c$  ортогонален подпространству  $V$ , любой набор векторов  $v_1, \dots, v_n \in V$ , составляющий ортогональный базис формы  $f_2 = q|_V$ , образует вместе с  $c$  ортогональный базис для формы  $q$  в  $W$ . В однородных координатах  $(x_0 : x_1 : \dots : x_n)$  относительно этого базиса квадратичная форма  $q$  записывается в виде  $a_0 x_0^2 + a_1 x_1^2 + \dots + a_n x_n^2 = 0$ , где все  $a_i \neq 0$ . В карте  $U_0$  в аффинном репере с началом в точке  $c \in U_0$  и осями, направленными вдоль векторов  $v_i$ , это уравнение приобретает вид  $b_1 x_1^2 + b_2 x_2^2 + \dots + b_n x_n^2 = 1$ , где  $b_i = -a_i/a_0$ . Над алгебраически замкнутым полем  $\mathbb{k}$  это уравнение можно упростить и дальше: умножая базисные векторы на подходящие константы, получаем  $x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2 = 1$ . Таким образом, над алгебраически замкнутым полем все гладкие центральные аффинные квадрики аффинно конгруэнтны. Над полем  $\mathbb{R}$  уравнение приводится к виду

$$x_1^2 + \dots + x_r^2 - x_{r+1}^2 - \dots - x_{r+s}^2 = \pm 1, \quad \text{где } r \geq s \geq 0, \quad r + s = n \quad (22-2)$$

и при чётном  $n$  и  $r = s = n/2$  в правой части стоит<sup>2</sup>  $+1$ . При  $r > s$  и правой части  $+1$  проективное замыкание  $\bar{Q}$  квадрики (22-2) имеет сигнатуру  $(r, s + 1)$  и планарность  $s$ . При  $r > s$  и

<sup>1</sup>Через  $B_{ij}$  здесь и далее обозначается определитель  $n \times n$ -подматрицы расширенной матрицы Грама  $B$ , стоящий в дополнении к её  $i$ -той строке и  $j$ -тому столбцу.

<sup>2</sup>При  $r = s = n/2$  смена знака у обеих частей и перенумерация переменных превращает уравнение (22-2) с правой частью  $-1$  в аналогичное уравнение с правой частью  $+1$ .

правой части  $-1$  квадрика  $\bar{Q}$  имеет сигнатуру  $(r + 1, s)$  и планарность  $(s - 1)$ . При чётном  $n$  и  $r = s = n/2$  квадрика  $\bar{Q}$  имеет планарность  $n/2$ .

Асимптотическая квадрика  $Q_\infty = \bar{Q} \cap L_\infty$  аффинной квадрики (22-2) задаётся в том же базисе пространства  $L_\infty = \mathbb{P}(V)$  уравнением  $x_1^2 + \dots + x_r^2 - x_{r+1}^2 - \dots - x_{r+s}^2 = 0$  и является  $(s - 1)$ -планарной. Мы заключаем, что если центральная квадрика  $\bar{Q}$  имеет тип<sup>1</sup>  $Q_{d,m}$ , то её асимптотическая квадрика имеет тип  $Q_{d-1,m-1}$ , если правая часть уравнения (22-2) равна  $-1$  или  $d = 2m$ , и имеет тип  $Q_{d-1,m}$ , если правая часть уравнения (22-2) равна  $+1$  и  $d \neq 2m$ . Таким образом, все аффинные квадрики (22-2) попарно аффинно не конгруэнтны.

Среди них имеется ровно одна пустая — это квадрика  $\sum x_i^2 = -1$  планарности  $-1$ , задаваемая уравнением  $\sum x_i^2 = -1$ . Также имеется ровно одна непустая квадрика без точек на бесконечности — это квадрика  $\sum x_i^2 = 1$  планарности нуль. Она называется *эллипсоидом*. Все остальные квадрики имеют непустую асимптотическую квадратичку  $Q_\infty = \bar{Q} \cap L_\infty$  и называются *гиперболоидами*. Квадрики планарности нуль исчерпываются эллипсоидом и *двуполостным гиперболоидом*  $x_1^2 + \dots + x_{n-1}^2 = x_n^2 - 1$ . Через каждую точку всех остальных непустых квадрик (22-2) можно провести лежащую на квадратике прямую.

УПРАЖНЕНИЕ 22.2. Убедитесь, что двуполостный гиперболоид имеет две компоненты связности, тогда как все остальные квадрики (22-2) связны.

**22.3. Параболоиды.** Аффинная квадрика  $Q$  является параболоидом если и только если её проективное замыкание  $\bar{Q}$  гладко и касается бесконечно удалённой гиперплоскости  $L_\infty$ . В этом случае асимптотическая квадрика  $Q_\infty$  имеет ровно одну особую точку  $c$ , которая одновременно является полюсом гиперплоскости  $L_\infty$  и одномерным ядром матрицы  $B_\infty$ .

На языке уравнений, у параболоида  $\det B \neq 0$ , а  $\det B_\infty = 0$ . Точка касания

$$c = (0 : -B_{01} : \dots : (-1)^n B_{0n}) \in \bar{Q} \cap L_\infty,$$

понимаемая как направление в исходном аффинном пространстве  $A^n = \mathbb{A}(V)$ , называется *направлением оси параболоида*. В силу предл. 14.5 на стр. 176, квадратичная форма  $f_2 = q|_V$  невырожденно ограничивается на любую  $(n - 2)$ -мерную не проходящую через  $c$  гиперплоскость  $H = \mathbb{P}(U) \subset \mathbb{P}(V) = L_\infty$ . Так как ограничение формы  $q$  на двумерное подпространство  $U^\perp \subset W = \mathbb{k} \oplus V$  в этом случае тоже невырождено, а содержащееся в  $U^\perp$  одномерное пространство  $c = V^\perp \subset U^\perp$  изотропно, подпространство  $U^\perp$  является гиперболической плоскостью. Выберем в ней гиперболический базис  $u_0, u_n$  так, чтобы  $u_0 \in U_0$ , а  $u_n \in c$ , и дополним его ортонормальным базисом  $u_1, \dots, u_{n-1}$  подпространства  $U$  до базиса  $u_0, u_1, \dots, u_{n-1}, u_n$  в  $W$ . В однородных координатах  $(x_0 : x_1 : \dots : x_n)$  относительно этого базиса квадратичная форма  $q$  запишется как  $a_1 x_1^2 + \dots + a_{n-1} x_{n-1}^2 + 2x_0 x_n = 0$ . В аффинном репере карты  $U_0$  с началом в точке  $u_0$  и базисными векторами  $u_1, \dots, u_n$  аффинное уравнение параболоида приобретает вид  $b_1 x_1^2 + b_2 x_2^2 + \dots + b_{n-1} x_{n-1}^2 = 2x_n$ , где  $b_i = -a_i$ . Над алгебраически замкнутым полем оно упрощается дальше до  $x_1^2 + \dots + x_{n-1}^2 = 2x_n$ , и мы заключаем, что все параболоиды над алгебраически замкнутым полем аффинно конгруэнтны. Над полем  $\mathbb{R}$  аффинное уравнение параболоида преобразуется к виду

$$x_1^2 + \dots + x_r^2 - x_{r+1}^2 - \dots - x_{r+s}^2 = 2x_n, \quad \text{где } r \geq s \geq 0, r + s = n - 1. \quad (22-3)$$

<sup>1</sup>Напомню, что через  $Q_{d,m} \subset \mathbb{P}_n$  мы обозначаем гладкую вещественную квадратичку размерности  $d$  и планарности  $m$ , см. п. 19.3.1 на стр. 241.

Параболоид (22-3) имеет планарность  $s$ . Поэтому при разных  $s$  параболоиды (22-3) аффинно не конгруэнтны. Нуль-планарный параболоид  $x_1^2 + \dots + x_{n-1}^2 = 2x_n$  называется *эллиптическим*, а все остальные — *гиперболическими*. В силу сл. 19.4 на стр. 241 асимптотическая квадрика аффинного параболоида с проективным замыканием типа  $Q_{d,m}$  является простым конусом с вершиной  $c$  над гладкой проективной квадрикой типа  $Q_{d-2,m-1}$ .

**22.4. Простые конусы.** Аффинная квадрика  $Q$  является простым конусом, если её расширенная матрица Грама имеет  $\det B = 0$ , но правый нижний угловой  $n \times n$ -минор этой матрицы  $B_{00} = \det B_\infty \neq 0$ . В этом случае  $\text{rk } B = n$  и проективная квадрика  $\bar{Q}$  имеет единственную особую точку  $(c_0 : c_1 : \dots : c_n) = (B_{00} : -B_{01} : \dots : (-1)^n B_{0n})$  — верхнюю строку присоединённой матрицы  $B^\vee$ , лежащую в  $\ker B$ , поскольку  $B^\vee B = \det B \cdot E = 0$ . Поместим начало аффинной координатной системы карты  $U_0$  в точку  $c = (1, -B_{01}/B_{00}, \dots, (-1)^n B_{0n}/B_{00}) \in U_0$  и направим оси координат вдоль векторов какого-нибудь ортогонального базиса невырожденной квадратичной формы  $f_2 = q|_V$ . В таком репере квадрика  $Q$  запишется аффинным уравнением

$$a_1 x_1^2 + a_2 x_2^2 + \dots + a_n x_n^2 = 0,$$

одновременно являющимся однородным уравнением асимптотической квадрики  $Q_\infty \subset \mathbb{P}(V)$ . Над алгебраически замкнутым полем это уравнение упрощается до  $x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2 = 0$ . Тем самым, все простые конусы над алгебраически замкнутым полем аффинно конгруэнтны. Над полем  $\mathbb{R}$  уравнение конуса приводится к виду

$$x_1^2 + \dots + x_r^2 = x_{r+1}^2 + \dots + x_{r+s}^2, \quad \text{где } r \geq s \geq 0 \text{ и } r + s = n. \quad (22-4)$$

Это однородное уравнение задаёт в  $\mathbb{P}(V)$  проективную квадрику планарности  $s - 1$ . Поэтому аффинный конус (22-4) имеет планарность  $s$ . В частности, все конусы (22-4) попарно аффинно не конгруэнтны. Обратите внимание, что 0-планарный аффинный конус  $x_1^2 + \dots + x_n^2 = 0$  является конусом над пустой проективной квадрикой  $Q_{n-1,-1}$  и состоит из единственной точки — своей расположенной в начале координат вершины.

**22.5. Цилиндры.** Согласно опр. 22.1, аффинная квадрика  $Q$  является цилиндром, если и  $\bar{Q}$ , и  $Q_\infty$  особы, т. е.  $\det B = \det B_\infty = 0$ .

УПРАЖНЕНИЕ 22.3. Убедитесь, что это эквивалентно условию  $\text{Sing } \bar{Q} \cap L_\infty \neq \emptyset$ .

Если выбрать в  $V$  базис  $e_1, e_2, \dots, e_n$  так, чтобы векторы  $e_i$  с  $i > r$  составили базис в  $\ker q \cap V$ , то уравнение аффинной квадрики  $Q$  не будет зависеть от последних  $n - r$  координат. Поэтому любой цилиндр является прямым произведением аффинного пространства  $\mathbb{A}^{n-r}$ , параллельного последним  $n - r$  базисным векторам, и не имеющей особенностей на бесконечности аффинной квадрики в дополнительном к нему аффинном пространстве  $\mathbb{A}^r$ . Эта квадрика принадлежит к одному из уже рассмотренных выше трёх типов.

ПРИМЕР 22.1 (вещественные аффинные кривые второй степени)

Полный список непустых аффинных «кривых второй степени» в  $\mathbb{R}^2$  с точностью до аффинной конгруэнтности таков:

- *эллипс*  $x_1^2 + x_2^2 = 1$ , гладкая центральная квадрика с пустой асимптотической квадрикой; проективное замыкание типа  $Q_{1,0}$ , асимптотическая квадрика типа  $Q_{0,-1}$
- *гипербола*  $x_1^2 - x_2^2 = 1$ , гладкая с центральной квадрика с гладкой непустой асимптотической квадрикой, состоящей из точек  $(0 : 1 : 0)$ ,  $(0 : 0 : 1)$ ; проективное замыкание типа  $Q_{1,0}$ , асимптотическая квадрика типа  $Q_{0,0}$

- парабола  $x_1^2 = x_2$ , касающаяся бесконечно удалённой прямой в точке  $(0 : 0 : 1)$ ; проективное замыкание типа  $Q_{1,0}$ , асимптотическая квадрика — конус над пустой квадрикой в  $\mathbb{P}_0$
- двойная точка  $x_1^2 + x_2^2 = 0$ , конус над гладкой пустой асимптотической квадрикой типа  $Q_{0,-1}$
- пара пересекающихся прямых  $x_1^2 - x_2^2 = 0$ , конус над гладкой непустой асимптотической квадрикой типа  $Q_{0,0}$
- пара параллельных прямых  $x_1^2 = 1$ , цилиндр над гладкой непустой квадрикой в  $\mathbb{A}^1$
- двойная прямая  $x_1^2 = 0$ , цилиндр над двойной точкой в  $\mathbb{A}^1$ .

Пример 22.2 (вещественные аффинные квадратичные поверхности)

Полный список непустых аффинных «квадратичных поверхностей» в  $\mathbb{R}^3$  вдвое длиннее предыдущего списка «кривых». Он состоит из семи цилиндров над этими «кривыми», задаваемых теми же уравнениями, но только в пространстве  $\mathbb{R}^3$  с координатами  $(x_1, x_2, x_3)$ , и называемых соответственно эллиптическим, гиперболическим и параболическим цилиндрами, двойной прямой, парой пересекающихся и парой параллельных плоскостей и двойной плоскостью. Кроме семи цилиндров есть три гладких центральных поверхности:

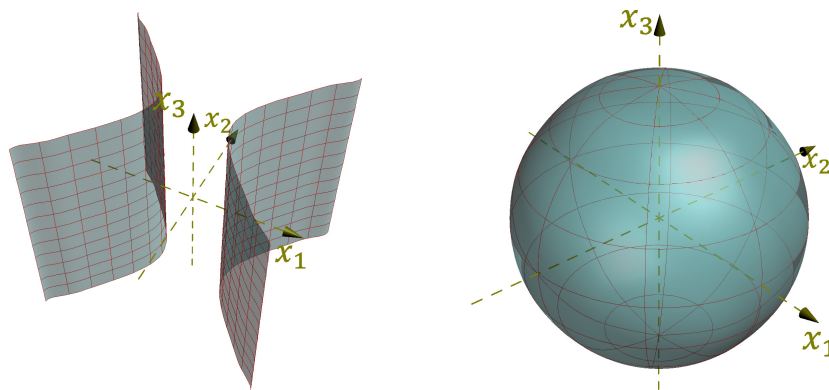
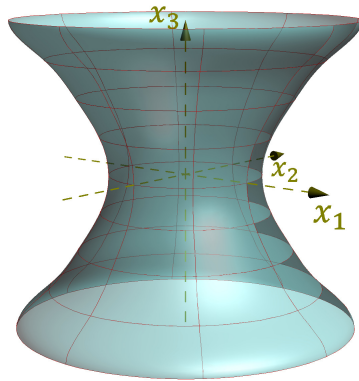
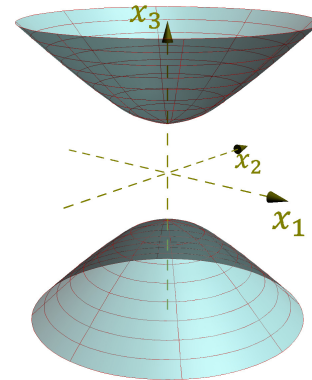


Рис. 22♦1. Цилиндр  $x_1^2 - x_2^2 = 1$     Рис. 22♦2. Эллипсоид  $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1$

- эллипсоид  $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1$  с проективным замыканием  $Q_{2,0}$  и гладкой пустой асимптотической коникой  $Q_{1,-1}$ ; эллипсоид компактен и 0-планарен (см. рис. 22♦2)
- двуполостный гиперboloид  $x_1^2 + x_2^2 = x_3^2 - 1$  с тем же самым проективным замыканием  $Q_{2,0}$  и гладкой непустой асимптотической коникой  $Q_{1,0}$ ; двуполостный гиперboloид 0-планарен и имеет две компоненты связности (см. рис. 22♦4)
- однополостный гиперboloид  $x_1^2 + x_2^2 = x_3^2 + 1$  (см. рис. 22♦3), проективным замыканием которого является квадрика Сегре  $Q_{2,1}$ , имеющая непустое пересечение с любой плоскостью и пересекающая каждую некасательную плоскость по гладкой непустой конике  $Q_{1,0}$ ; однополостный гиперboloид связан и заметается двумя семействами прямых

два параболоида:

- эллиптический параболоид  $x_1^2 + x_2^2 = 2x_3$  (см. рис. 22◊5) с 0-планарным проективным замыканием  $Q_{2,0}$ , которое касается бесконечно удалённой плоскости  $x_0 = 0$  в точке  $(0 : 0 : 0 : 1)$ , и асимптотической коникой, которая является конусом с вершиной в этой точке над пустой гладкой квадрикой  $Q_{0,-1}$

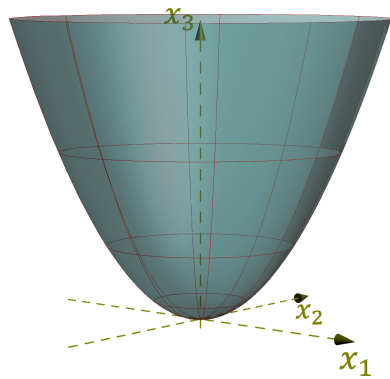
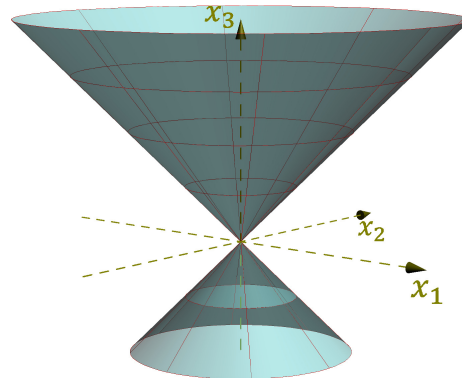
Рис. 22◊3. Гиперболоид  $x_1^2 + x_2^2 = x_3^2 + 1$ Рис. 22◊4. Гиперболоид  $x_1^2 + x_2^2 = x_3^2 - 1$ 

- гиперболический параболоид  $x_1^2 - x_2^2 = 2x_3$  (см.рис. 22◊7) с 1-планарным проективным замыканием  $Q_{2,1}$  и асимптотической коникой, являющейся конусом с вершиной в точке  $(0 : 0 : 0 : 1)$  над непустой гладкой квадрикой  $Q_{0,0}$ ; гиперболический параболоид заматается двумя семействами прямых, в частности, пересекает бесконечность по паре прямых  $x_1 = \pm x_2$

и два простых конуса над разными гладкими асимптотическими кониками:

- двойная точка  $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 0$ , конус над пустой гладкой коникой
- эллиптический конус  $x_1^2 + x_2^2 = x_3^2$ , конус над не пустой гладкой коникой (см. рис. 22◊6)

Итого, 14 непустых попарно аффинно неконгуэнтных фигур.

Рис. 22◊5. Параболоид  $x_1^2 + x_2^2 = 2x_3$ Рис. 22◊6. Конус  $x_1^2 + x_2^2 = x_3^2$ 

Предложение 22.3

Каждый параболоид в  $\mathbb{R}^n$  гомеоморфен  $\mathbb{R}^{n-1}$ .

Доказательство. Пусть проективное замыкание  $\bar{P} \subset \mathbb{P}_n(\mathbb{R})$  параболоида  $P \subset \mathbb{R}^n$  касается бесконечной гиперплоскости  $L_\infty$  в точке  $p$ . Проекция из точки  $p$  на любую не проходящую через  $p$  проективную гиперплоскость  $H \subset \mathbb{P}_n$  задаёт биекцию между точками параболоида  $P = \bar{P} \setminus L_\infty = P \setminus T_p \bar{P}$  и точками аффинной гиперплоскости  $H \setminus T_p \bar{P} \simeq \mathbb{R}^{n-1}$ . Поскольку координаты точки  $x \in P$  и её проекции  $t \in H$  являются рациональными функциями друг друга<sup>1</sup>, эта биекция является гомеоморфизмом.  $\square$

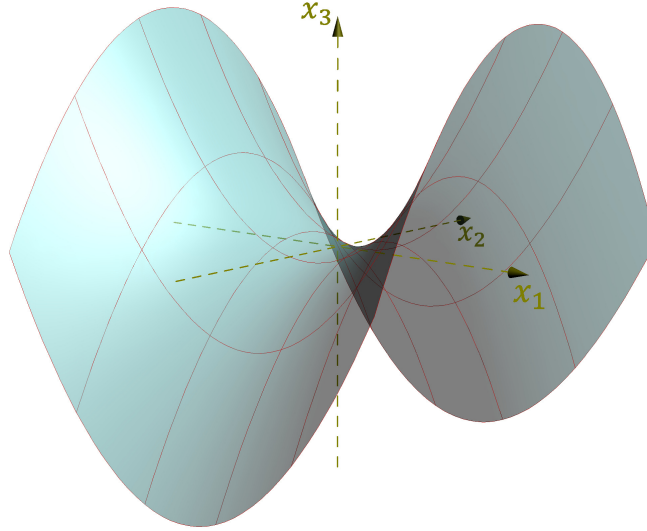


Рис. 22♦7. Гиперболический параболоид  $x_1^2 - x_2^2 = 2x_3$

#### Предложение 22.4

Гладкая центральная аффинная квадрика  $Q \subset \mathbb{R}^{n+1}$  размерности  $n$  с проективным замыканием типа  $Q_{n,m}$  гомеоморфна цилиндру  $\mathbb{R}^m \times S^{n-m}$ , где  $S^{n-m} \subset \mathbb{R}^{n+1-m}$  — единичная сфера, если её асимптотическая квадрика  $Q_\infty$  имеет тип  $Q_{n-1,m-1}$ , и гомеоморфна цилиндру  $S^m \times \mathbb{R}^{n-m}$ , если асимптотическая квадрика имеет тип  $Q_{n-1,m}$ .

Доказательство. Если  $\bar{Q} \simeq Q_{n,m}$  и  $Q_\infty \simeq Q_{n-1,m-1}$ , квадрика  $Q$  задаётся в  $\mathbb{R}^{n+1}$  уравнением

$$1 + x_1^2 + \dots + x_m^2 = x_{m+1}^2 + \dots + x_{n+1}^2.$$

Разобьём  $\mathbb{R}^{n+1}$  в произведение  $\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^{n+1-m}$ . Пересечение квадрики  $Q$  со слоем  $w \times \mathbb{R}^{n+1-m}$  над любой точкой  $w = (x_1, \dots, x_m) \in \mathbb{R}^m$  является сферой в  $\mathbb{R}^{n-m+1}$  с центром в нуле и квадратом радиуса  $1 + (w, w)$ , где  $(*, *)$  — стандартная евклидова структура на  $\mathbb{R}^m$ . Отображение

$$(w, u) \mapsto \left( w, \frac{u}{\sqrt{1 + (w, w)}} \right),$$

осуществляющее в каждом слое  $w \times \mathbb{R}^{n+1-m}$  гомететию с коэффициентом  $(1 + (w, w))^{-1/2}$ , задаёт гомеоморфизм между квадрикой  $Q$  и цилиндром  $S^{n-m} \times \mathbb{R}^m$ . Если  $\bar{Q} \simeq Q_{n,m}$  и  $Q_\infty \simeq Q_{n-1,m}$ , то  $Q$  имеет уравнение  $x_1^2 + \dots + x_{m+1}^2 = x_{m+2}^2 + \dots + x_{n+1}^2 + 1$ . Применяя к  $\mathbb{R}^{n+1} = \mathbb{R}^{m+1} \times \mathbb{R}^{n-m}$  то же рассуждение, что и выше, получаем гомеоморфизм  $Q \simeq S^m \times \mathbb{R}^{n-m}$ .  $\square$

<sup>1</sup>Напомним, что  $\tilde{q}(t, t) \cdot (p - x) = 2\tilde{q}(t, p) \cdot t$ , ср. с прим. 17.7 на стр. 211.

Упражнение 22.4. Выведите из предыдущих предложений, что единственной с точностью до аффинной конгруэнтности несвязной гладкой нецилиндрической аффинной квадрикой является двуполостный гиперболоид с уравнением  $1 + x_1^2 + \dots + x_{n-1}^2 = x_n^2$ .

**22.6. Квадрики в евклидовом пространстве.** Зафиксируем на пространстве  $V \simeq \mathbb{R}^n$  евклидову структуру так, чтобы стандартный базис был ортонормален, и обозначим через

$$(*, *): V \times V \rightarrow \mathbb{R}$$

евклидово скалярное произведение. Тогда каждой квадратичной форме  $f \in S^2V^*$  биективно сопоставится<sup>1</sup> самосопряжённый линейный оператор  $\varphi_f: V \rightarrow V$ , матрица которого в любом ортонормальном базисе пространства  $V$  совпадает с матрицей Грама формы  $f$  в этом базисе, и который однозначно характеризуется тем, что  $(u, \varphi_f w) = \tilde{f}(u, w)$  для всех  $u, w \in V$ . Согласно теор. 15.7 на стр. 188 этот оператор диагонализуем в некотором ортонормальном базисе пространства  $V$ , который таким образом является ортогональным для квадратичной формы  $f$ . Диагональные элементы матрицы Грама равны собственным числам оператора  $\varphi_f$ , а базисные векторы являются собственными векторами этого оператора. Мы будем называть всякий базис с такими свойствами *каноническим базисом* квадратичной формы  $f$ . Обратите внимание, что если все собственные числа матрицы Грама формы  $f$  в произвольном ортонормальном базисе пространства  $V$  различны, то канонический базис определён однозначно с точностью до смены знаков и перенумерации базисных векторов.

**22.6.1. Центральные квадрики.** Пусть гладкая центральная аффинная квадрика  $Q \subset A(V)$  задаётся в стандартных координатах на  $V = \mathbb{R}^n$  аффинным уравнением

$$f_0 + f_1(x) + f_2(x) = 0, \quad \text{где } f_i \in S^iV^*, x \in \mathbb{R}^n.$$

Аффинный репер с началом в центре  $c$  квадрики  $Q$  и евклидово ортонормальными базисными векторами  $u_1, \dots, u_n$ , образующими канонический базис асимптотической квадратичной формы  $f_2$ , называется *каноническим репером* квадрики  $Q$ , а его координатные оси — *главными осями* квадрики  $Q$ . Таким образом, главные оси направлены вдоль собственных векторов матрицы Грама квадратичной формы  $f_2$ . Аффинное уравнение квадрики  $Q$  в каноническом репере имеет вид

$$a_1 x_1^2 + \dots + a_n x_n^2 = 1, \quad (22-5)$$

где каждый коэффициент  $a_i = -q(u_i, u_i) / q(c, c) = -f_2(u_i, u_i) / f(c) = -\alpha_i / f(c)$ , а  $\alpha_i$  — собственное значение оператора  $\varphi_{f_2}$  на собственном векторе  $u_i$ . Поскольку ни собственные значения оператора  $\varphi_{f_2}$ , ни значение многочлена  $f$  в точке  $c \in A(V)$  не зависят от выбора канонического репера, набор коэффициентов  $a_i$  канонического уравнения (22-5) с точностью до перенумерации не зависит от выбора канонического репера и является полным инвариантом гладкой центральной квадрики: одна такая квадрика переводится в другую движением объемлющего евклидова пространства если и только если у этих квадрик одинаковые с точностью до перестановки наборы коэффициентов  $a_i$  их канонических уравнений (22-5). Положительные числа  $\ell_i \stackrel{\text{def}}{=} |a_i|^{1/2}$  называются *полуосями* гладкой центральной квадрики. При  $a_i > 0$  число  $\ell_i$  равно расстоянию от центра квадрики до точки её пересечения с  $i$ -той главной осью. Обратите внимание, что коэффициенты  $a_i = -\alpha_i / f(c)$ , а с ними — и полуоси вычисляются по аффинному

<sup>1</sup>См. п.° 14.2.4 на стр. 174, а также сл. 20.2 на стр. 255.



уравнению  $f$  квадрики в произвольном ортонормальном базисе евклидова пространства и не меняются при умножении этого уравнения на константу.

С конформной точки зрения векторы  $c, u_1, \dots, u_n \in W = \mathbb{R} \oplus V$ , составляющие канонический репер, являются вершинами автополярного относительно проективной квадрики  $\bar{Q}$  симплекса<sup>1</sup> в  $\mathbb{P}_n = \mathbb{P}(W)$ , а выходящие из вершины  $c$  гиперграницы этого симплекса пересекают бесконечно удалённую гиперплоскость  $L_\infty = \mathbb{P}(V)$  по  $(n - 1)$ -мерному симплексу, автополярному относительно гладкой абсолютной квадрики  $x_1^2 + \dots + x_n^2 = 0$  в пространстве  $L_\infty = \mathbb{P}(V)$ . Эта квадрика не имеет вещественных точек и задаёт на пространстве  $V$  конформную структуру.

#### Предложение 22.5

Для любого эллипсоида  $Q = V(f) \subset \mathbb{A}(V)$  с положительно определённой асимптотической квадратичной формой  $f_2$  характеристический многочлен  $\det(tE - F_e)$  матрицы Грама  $F_e$  формы  $f_2$  в любом евклидово ортонормальном базисе  $e$  пространства  $V$  не зависит от выбора этого ортонормального базиса. Симметричным образом, характеристический многочлен  $\det(tE - G_v)$  матрицы Грама  $G_v$  евклидова скалярного произведения в любом базисе  $v$  пространства  $V$ , ортонормальном для асимптотической формы  $f_2$ , не зависит от выбора такого базиса.

Доказательство. Матрица  $C_{e'e}$ , выражающая евклидово ортонормальный базис  $e'$  через евклидово ортонормальный базис  $e$ , удовлетворяет соотношению  $G_{e'} = C_{e'e}^t G_e C_{e'e}$ , где  $G_{e'} = G_e = E$  суть матрицы Грама евклидова скалярного произведения в этих базисах. Поэтому  $C_{e'e}^t = C_{e'e}^{-1}$ . Из формулы, связывающей матрицы Грама асимптотической квадратичной формы тех же базисов:  $F_{e'} = C_{e'e}^t F_e C_{e'e} = C_{e'e}^{-1} F_e C_{e'e}$ , вытекает, что матрицы  $F_{e'}$  и  $F_e$  подобны и, стало быть, имеют равные характеристические многочлены. Второе утверждение доказывается аналогично.  $\square$

#### Пример 22.3 (вариации на теореме Аполлония)

Уравнение эллипсоида в аффинном репере с началом в центре  $c$  этого эллипсоида после умножения на подходящую константу приобретает вид  $f_2(v) = 1$ , где  $f_2 \in S^2 V^*$  — асимптотическая квадратичная форма эллипсоида, а  $v \in V$  — радиус вектор, ведущий из центра эллипсоида в переменную точку пространства.

Упражнение 22.5. Убедитесь, что векторы  $v_1, \dots, v_n \in V$  тогда и только тогда составляют ортонормальный базис квадратичной формы  $f_2$ , когда  $2n$  точек  $c \pm v_i$  лежат на эллипсоиде и для каждого  $i$  две проходящие через точки  $c \pm v_i$  параллельные плоскости с направляющим векторным пространством, порождённым  $(n - 1)$  векторами  $v_\nu$ , с  $\nu \neq i$ , обе касаются эллипсоида.

Такие векторы  $v_1, \dots, v_n$  называются сопряжёнными радиусами эллипсоида. Из предл. 22.5 вытекает, что для каждого  $k = 1, 2, \dots, n = \dim V$  сумма всех главных миноров<sup>2</sup> матрицы Грама  $G_v$  евклидовых скалярных произведений набора  $v = (v_1, \dots, v_n)$  сопряжённых радиусов эллипсоида не зависит от  $v$ . При  $k = n$  это означает, что евклидов объём параллелепипеда, натянутого на сопряжённые радиусы эллипсоида не зависит от выбора сопряжённых радиусов, а при  $k = 1$  — что сумма квадратов длин сопряжённых радиусов эллипсоида одинакова для всех

<sup>1</sup>Это означает, что полюсом каждой  $(n - 1)$ -мерной гиперграницы симплекса относительно квадрики  $\bar{Q}$  является противоположащая этой грани вершина симплекса.

<sup>2</sup>Т. е. сумма определителей всех  $k \times k$ -подматриц в  $G_v$ , главная диагональ которых содержится в главной диагонали  $G_v$ . Согласно прим. 9.2 на стр. 118 эта сумма, умноженная на  $(-1)^k$ , равна коэффициенту при  $t^{n-k}$  в характеристическом многочлене  $\det(tE - G_v)$ .

наборов сопряжённых радиусов. Эти два утверждения про пару сопряжённых радиусов эллипса на плоскости известны как *теоремы Аполлония*.

Если провести параллельные сопряжённым радиусам  $v_i$  прямые  $\ell_i = \{a + v_i t\}$  через произвольную не лежащую на эллипсоиде точку  $a$ , то каждая из  $n$  прямых пересечёт эллипсоид в точках  $a'_i = a + v_i t'_i$  и  $a''_i = a + v_i t''_i$ , где  $t'_i$  и  $t''_i$  являются корнями квадратного уравнения

$$t^2 + 2\tilde{q}(v_i, a) + q(a) = 0,$$

в котором  $q \in S^2(\mathbb{R}c \oplus V)^*$  — однородная квадратичная форма, задающая проективное замыкание эллипсоида<sup>1</sup>. Поскольку произведение длин  $|a'_i - a| \cdot |a''_i - a| = t'_i t''_i |v_i|^2 = q(a) |v_i|^2$ , мы заключаем, что сумма таких произведений по всем  $n$  сопряжённым направлениям

$$\sum_{i=1}^n |a'_i - a| \cdot |a''_i - a| = q(a) \cdot \text{tr } G_v$$

тоже не зависит от выбора набора сопряжённых направлений.

#### Пример 22.4 (ортооптическая сфера центральной квадрики)

Одним из многомерных обобщений директора<sup>2</sup> центральной коники на евклидовой плоскости является ГМТ пересечения  $n$  попарно перпендикулярных гиперплоскостей  $T_1, \dots, T_n$ , касающихся заданной центральной квадрики  $Q$  в аффинном евклидовом пространстве  $\mathbb{A}^n = \mathbb{A}(V)$ . Вложим  $\mathbb{A}^n$  в  $\mathbb{P}_n = \mathbb{P}(W)$ , где  $W = \mathbb{R}e_0 \oplus V$ , и зафиксируем в пространстве  $W$  такой базис  $e_0, e_1, \dots, e_n$ , что вектор  $e_0$  является центром квадрики  $Q$ , а векторы  $e_1, \dots, e_n$  образуют евклидово ортонормальный базис пространства  $V$ , в котором матрица Грама асимптотической квадрики  $Q_\infty$  диагональна. Умножая уравнение квадрики на ненулевую константу, мы можем считать, что в однородных координатах  $x_0, x_1, \dots, x_n$  относительно выбранного базиса проективное замыкание  $\bar{Q} = V(q)$  квадрики  $Q$  задаётся квадратичной формой

$$-x_0^2 + b_1 x_1^2 + \dots + b_n x_n^2.$$

Каждая проходящая через заданную точку  $a = (1 : a_1 : \dots : a_n) \in \mathbb{A}^n \subset \mathbb{P}_n$  гиперплоскость  $T \subset \mathbb{P}_n$  является точкой проективного пространства  $a^\times = \mathbb{P}(\text{Ann } a) \subset \mathbb{P}(W^\times)$ . Мы отождествим его с  $\mathbb{P}(V^*)$  при помощи линейного изоморфизма  $V^* \xrightarrow{\sim} \text{Ann } a$ ,  $\xi \mapsto \xi - \xi(a) \cdot x_0$ , который сопоставляет ненулевому ковектору  $\xi \in V^*$  проходящую через точку  $a$  гиперплоскость  $T_\xi$ , задаваемую в однородных координатах  $(x_0 : x_1 : \dots : x_n)$  линейным уравнением

$$\xi(x_1, \dots, x_n) - x_0 \cdot \xi(a_1, \dots, a_n) = 0. \quad (22-6)$$

Перпендикулярность гиперплоскостей  $T_\xi$  и  $T_\eta$  означает, что задающие их ковекторы  $\xi, \eta \in V^*$  евклидово перпендикулярны. Таким образом, проходящие через точку  $a$  попарно перпендикулярные гиперплоскости  $T_1, \dots, T_n$  образуют в  $\mathbb{P}(V^*)$  автополярный симплекс для двойственной к абсолютной квадрике  $A \subset \mathbb{P}(V)$  квадрики  $A^\times \subset \mathbb{P}(V^*)$ , матрица Грама которой в двойственном к евклидово ортонормальному базису  $e_1, \dots, e_n$  базисе  $x_1, \dots, x_n$  равна  $E$ . Изоморфизм  $V^* \xrightarrow{\sim} \text{Ann } a$  переводит этот базис пространства  $V^*$  в базис пространства  $\text{Ann } a$ , состоящий из

<sup>1</sup> Коэффициент при  $t^2$  равен  $\tilde{q}(v_i, v_i) = f_2(v_i) = 1$ , поскольку векторы  $v_i$  образуют ортонормальный базис формы  $f_2$ .

<sup>2</sup> См. п.° 21.3.1 на стр. 264.

форм  $x_i - a_i x_0$ , где  $1 \leq i \leq n$ . Условие касания гиперплоскостей  $T_i$  с квадратикой  $Q$  означает, что задающие эти плоскости линейные формы  $\xi_i - \xi_i(a) \cdot x_0$  лежат на двойственной к  $\bar{Q}$  квадратике  $\bar{Q}^\times \subset \mathbb{P}(W^*)$ , имеющей в базисе  $x_0, x_1, \dots, x_n$  пространства  $W^*$  диагональную матрицу Грама с диагональными элементами  $-1, b_1^{-1}, \dots, b_n^{-1}$ . Ограничение этой формы на подпространство  $a^\times$  имеет в базисе из форм  $x_i - a_i x_0$  матрицу Грама

$$\begin{pmatrix} -a_1 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ -a_2 & 0 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ -a_n & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & b_1^{-1} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & b_n^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -a_1 & -a_2 & \cdots & -a_n \\ 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix} = \\ = \begin{pmatrix} b_1^{-1} - a_1^2 & -a_1 a_2 & -a_1 a_3 & \cdots & -a_1 a_n \\ -a_2 a_1 & b_2^{-1} - a_2^2 & -a_2 a_3 & \cdots & -a_2 a_n \\ -a_3 a_1 & -a_3 a_2 & b_3^{-1} - a_3^2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & -a_{n-1} a_n \\ -a_n a_1 & -a_n a_2 & \cdots & -a_n a_{n-1} & b_n^{-1} - a_n^2 \end{pmatrix}. \quad (22-7)$$

Согласно теор. 19.2 на стр. 238 лежащий на такой квадратике набор точек  $\xi_1, \dots, \xi_n$ , одновременно автополярный относительно квадратки с единичной матрицей Грама, существует если и только если матрица (22-7) бесследна. Точки  $a$ , для которых это условие выполняется, образуют сферу с тем же центром  $e_0$ , что и квадратика  $Q$ , и квадратом радиуса, равным  $\sum a_i^2 = \sum b_i^{-1}$ . Эта сфера называется *ортооптической сферой* квадратки  $Q$ . Для эллипсоида квадрат радиуса ортооптической сферы равен сумме квадратов полуосей. Для гиперблоида он может оказаться отрицательным, и в этом случае множество вещественных точек ортооптической сферы пусто. Например, директор гиперболы на плоскости является непустой окружностью если и только если содержащий ветвь гиперболы угол между её асимптотами острый. При этом одна из двух перпендикулярных касательных, опущенных из каждой точки пересечения директора с асимптотами, касаются гиперболы в бесконечно удалённой точке. Для равнобокой гиперболы с перпендикулярными касательными на директоре имеется ровно одна вещественная точка — центр гиперболы, и опущенные из него касательные суть асимптоты. Если содержащий ветвь гиперболы угол между асимптотами тупой, директор имеет отрицательный радиус и не имеет вещественных точек.

**22.6.2. Параболоиды.** Пусть проективное замыкание  $\bar{P} \subset \mathbb{P}(W)$  параболоида  $P \subset \mathbb{A}(V)$  касается бесконечно удалённой гиперплоскости  $\mathbb{P}(V)$  в точке  $p$ . Обозначим через  $U = p^\perp \subset V$  евклидово ортогональное дополнение к одномерному подпространству  $p \subset V$ . Подпространство  $L = \mathbb{P}(U) \subset \mathbb{P}(V)$  имеет коразмерность 2 в  $\mathbb{P}_n = \mathbb{P}(W)$  и сопряжение относительно гладкой квадратки  $\bar{P}$  задаёт на пучке проходящих через  $L$  гиперплоскостей  $H \subset \mathbb{P}(W)$  инволюцию<sup>1</sup>. Двумя неподвижными точками этой инволюции являются проходящие через  $L$  касательные гиперплоскости к квадратике  $\bar{P}$ . Одной из них является бесконечность  $L_\infty$ , касающаяся  $\bar{P}$  в точке  $p$ . Обозначим вторую гиперплоскость через  $L_0$ , и пусть она касается  $\bar{P}$  в точке  $c \in U_0 = \mathbb{A}(V)$ . Эта точка называется *вершиной*, а прямая  $(cp)$ , выходящая из вершины в направлении  $p \in \mathbb{P}(V)$ , называется *осью* параболоида  $P$ .

Так как подпространство  $U$  трансверсально к  $p$ , ограничение асимптотической квадратичной формы  $f_2$  квадратки  $P$  на подпространство  $U$  невырождено. Следовательно, в  $U$  существует

<sup>1</sup>Которая переводит две плоскости друг в друга если и только если каждая из них проходит через полюс другой, см. п. 19.1 на стр. 233.

евклидово ортонормальный базис  $u_1, \dots, u_{n-1}$ , в котором форма  $f_2|_U$  имеет диагональную матрицу Грама с диагональными элементами, равными ненулевым собственным числам  $\alpha_i$  самосопряжённого оператора<sup>1</sup>  $\varphi_{f_2}$ , а ортонормальные векторы  $u_i$  являются собственными векторами этого оператора с собственными значениями  $\alpha_i$ . Поскольку прямая ( $cp$ ) сопряжена подпространству  $L = \mathbb{P}(U)$  относительно квадрики  $\bar{P}$ , расширенная квадратичная форма  $q$ , задающая квадрику  $\bar{P}$ , ограничивается на неё невырождено, а значит, линейная оболочка изотропных векторов  $p \in V$  и  $c \in U_0$  является гиперболической плоскостью для квадратичной формы  $q$ . Аффинный репер с началом в вершине  $c$  и евклидово ортонормальными базисными векторами  $u_1, \dots, u_{n-1}$ ,  $p$  называется *каноническим репером* параболоида  $P$ , если в аффинных координатах относительно этого репера параболоид  $P$  задаётся уравнением вида

$$a_1 x_1^2 + \dots + a_{n-1} x_{n-1}^2 = 2x_n, \quad (22-8)$$

где число положительных коэффициентов в левой части не меньше, чем число отрицательных, и каждый коэффициент  $a_i = -q(u_i, u_i) / \tilde{q}(c, p) = -f_2(u_i, u_i) / \tilde{q}(c, p) = -\alpha_i / \tilde{q}(c, p)$ , где  $\alpha_i$  — ненулевое собственное значение оператора  $\varphi_{f_2}$  на собственном векторе  $u_i$ . Условие на знаки коэффициентов в левой части (22-8) однозначно фиксирует направление  $n$ -того единичного базисного вектора  $p \in V$ . Если все собственные числа асимптотической матрицы Грама  $B_\infty$  различны, то канонический репер параболоида единствен с точностью до перенумерации и смены знаков первых  $(n - 1)$  базисных векторов. Так как ни собственные значения оператора  $\varphi_{f_2}$ , ни значение симметричной билинейной формы  $\tilde{q}$  на *однозначно* определяемых параболоидом  $P$  векторах  $c \in U_0 = e_0 + V$  и  $p \in V$  не зависят от выбора канонического репера, набор коэффициентов  $a_i$  канонического уравнения (22-8) с точностью до перенумерации не зависит от выбора канонического репера и является полным евклидовым инвариантом параболоида: один гиперболоид переводится в другой движением объемлющего евклидова пространства если и только если они имеют одинаковые с точностью до перестановки наборы коэффициентов  $a_i$  канонических уравнений (22-8).

#### Пример 22.5 (ортооптическая плоскость)

В отличие от центральных квадрик, для параболоида  $P \subset \mathbb{A}^n = \mathbb{A}(V)$  ГМТ пересечения  $n$ -ого попарно перпендикулярных касательных гиперплоскостей  $T_1, \dots, T_n$  представляет собою не сферу, а гиперплоскость, которая называется *директрисой* параболоида или *ортооптической плоскостью*. Чтобы убедиться в этом, надо повторить вычисление из прим. 22.4 на стр. 282, взяв в качестве базиса в  $W = \mathbb{R} e_0 \oplus V$  канонический базис параболоида  $e_1, e_2, \dots, e_n$ , в котором вектор  $e_0 \in P$  является вершиной параболоида, вектор  $e_n \in V$  является точкой касания проективного замыкания  $\bar{P}$  с гиперплоскостью  $L_\infty$ , прямая  $(e_0 e_n)$  полярна относительно  $\bar{P}$  линейной оболочке векторов  $e_i$  с  $1 \leq i \leq n - 1$ , а векторы  $e_1, \dots, e_{n-1}$  образуют евклидово ортонормальный базис пространства  $V$ . Умножая уравнение параболоида на ненулевую константу, можно считать, что в однородных координатах  $x_0, x_1, \dots, x_n$  его матрица Грама имеет вид

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & -1 \\ 0 & b_1^{-1} & \ddots & \vdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & b_{n-1}^{-1} & 0 \\ -1 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (22-9)$$

<sup>1</sup>Или, что то же самое, асимптотической матрицы Грама  $B_\infty$ .

Пространство  $a^\times \subset \mathbb{P}(W^*)$  проходящих через точку  $a = (1, a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{A}(V)$  гиперплоскостей  $T \subset \mathbb{P}(W)$  состоит, как и в [прим. 22.4](#), из точек вида  $\xi - \xi(a)x_0 \in W^*$ , где  $\xi$  пробегает  $V^*$ , но рассматривается как линейная форма на  $W$ , аннулирующая базисный вектор  $e_0$ . Попарная перпендикулярность друг другу  $n$ -ки таких гиперплоскостей  $T_1, \dots, T_n \in a^\times$  означает, что отвечающие им  $n$  линейных форм  $\xi_i$  составляют автополярный относительно евклидовой квадрики  $A^\times$  набор точек в  $\mathbb{P}(V^*)$ . Ограничение двойственной к (22-9) квадратичной формы на гиперплоскость  $a^\times$  имеет в базисе из форм  $\eta_i = x_i - a_i x_0$  матрицу Грама

$$\begin{pmatrix} -a_1 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ -a_2 & 0 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ -a_n & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & -1 \\ 0 & b_1^{-1} & \ddots & \vdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & b_{n-1}^{-1} & 0 \\ -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -a_1 & -a_2 & \cdots & -a_n \\ 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix} = \\ = \begin{pmatrix} b_1^{-1} & & & 0 & a_1 \\ & \ddots & & & \vdots \\ 0 & & b_{n-1}^{-1} & & a_{n-1} \\ a_1 & \cdots & a_{n-1} & & 2a_n \end{pmatrix} \quad (22-10)$$

и наличие на такой квадрике  $n$  автополярных относительно единичной матрицы точек равносильно бесследности<sup>1</sup> матрицы (22-10), только теперь это условие выражается линейным по  $a$  уравнением  $-2a_n = b_1^{-1} + \dots + b_{n-1}^{-1}$ , которое задаёт гиперплоскость, перпендикулярную оси параболоида и находящуюся от его вершины на расстоянии  $|b_1^{-1} + \dots + b_{n-1}^{-1}|$ . Полус этой гиперплоскости называется *фокусом* параболоида.

**22.6.3. Конусы.** Каноническим репером аффинного конуса  $C \subset \mathbb{A}(V)$  называется система координат с началом в вершине  $c$  конуса и евклидово ортонормальными базисными векторами  $u_1, \dots, u_n$ , которые являются собственными векторами невырожденного самосопряжённого оператора  $\varphi_{f_2}$ . Аффинное уравнение конуса в этой системе координат имеет вид

$$a_1 x_1^2 + \dots + a_n x_n^2 = 0. \quad (22-11)$$

Набор коэффициентов  $(a_1 : \dots : a_n)$  пропорционален набору  $(\alpha_1 : \dots : \alpha_n)$  собственных чисел самосопряжённого оператора  $\varphi_{f_2}$ . Конус является двойной точкой если и только если все коэффициенты  $a_i$  одинакового знака. Отличный от двойной точки конус является линейным соединением вершины  $c$  и непустой гладкой квадрики в  $L_\infty = \mathbb{P}(V)$ , которая задаётся в базисе  $u_1, \dots, u_n$  тем же самым уравнением (22-11). Поскольку непустая гладкая вещественная проективная квадрика определяет своё уравнение однозначно с точностью до пропорциональности, два отличных от двойной точки конуса евклидово конгруэнтны если и только если наборы собственных чисел  $(\alpha_1 : \dots : \alpha_n)$  асимптотических квадратичных форм  $f_2$  их аффинных уравнений в произвольном ортонормальном базисе отличаются друг из друга перестановкой элементов и умножением всех элементов на одну и ту же ненулевую константу.

<sup>1</sup>См. [теор. 19.2](#) на стр. 238.

## §23. Сферы

**23.1. Сферы в евклидовом пространстве.** Напомню, что сферой радиуса  $r > 0$  с центром в точке  $c$  евклидова аффинного пространства  $\mathbb{A}^n = \mathbb{A}(V)$  называется квадрика  $S(r, c) \subset \mathbb{A}^n$ , задаваемая аффинным уравнением

$$(x - c, x - c) - r^2 = 0, \quad (23-1)$$

где  $(*, *)$  обозначает евклидово скалярное произведение на подлежащем евклидовом векторном пространстве  $V \simeq \mathbb{R}^n$ . Мы будем называть уравнение (23-1) *приведённым аффинным уравнением* сферы  $S(r, c)$  и обозначать неоднородный квадратичный многочлен, стоящий в его левой части, через

$$s_{r,c}(x) \stackrel{\text{def}}{=} (x - c, x - c) - r^2. \quad (23-2)$$

Геометрически, уравнение (23-1) означает, что сфера  $S(r, c)$  является ГМТ  $x$ , удалённых от центра сферы на расстояние  $r$ . Каждая проходящая через  $c$  прямая с вектором скорости  $e \in V$  единичной длины пересекает сферу по точкам  $c \pm re$ . Отрезок с концами в таких точках называется *диаметром* сферы. Уравнение (23-1) равносильно тому, что  $(x - c + re, x - c - re) = 0$ . Таким образом, сфера представляет собою ГМТ, из которых её диаметр виден под прямым углом.

**ПРИМЕР 23.1 (ОПИСАННАЯ СФЕРА СИМПЛЕКСА)**

Если точки  $p_0, p_1, \dots, p_n \in \mathbb{A}^n$  не лежат в одной гиперплоскости, то через них проходит единственная сфера. Она называется *описанной сферой* симплекса  $[p_0, p_1, \dots, p_n]$ . Действительно, ГМТ, равноудалённых от двух точек  $p_0$  и  $p_i$ , описывается уравнением<sup>1</sup>

$$(x - p_0, x - p_0) = (x - p_i, x - p_i),$$

которое эквивалентно линейному неоднородному уравнению

$$2(x, p_i - p_0) = (p_i, p_i) - (p_0, p_0). \quad (23-3)$$

Задаваемая этим уравнением гиперплоскость проходит через точку  $(p_i + p_0) / 2$  перпендикулярно вектору  $p_i - p_0$  и называется *срединным перпендикуляром* к отрезку  $[p_0, p_i]$ . ГМТ, равноудалённых от всех точек  $p_0, p_1, \dots, p_n$ , является пересечением срединных перпендикуляров к  $n$  отрезкам  $[p_0, p_i]$ , где  $1 \leq i \leq n$ . Так как векторы  $p_i - p_0$  линейно независимы, система из  $n$  линейных уравнений (23-3) имеет единственное решение  $c$ . Это центр описанной сферы.

**23.1.1. Пересечение сферы с аффинным подпространством.** Если аффинное подпространство  $\Pi \subset \mathbb{A}^n$  находится на расстоянии  $\varrho$  от центра  $c$  сферы  $S(r, c)$ , то при  $\varrho > r$  пересечение  $\Pi \cap S(r, c)$  пусто, а при  $\varrho < r$  представляет собою лежащую в  $\Pi$  сферу радиуса  $\sqrt{r^2 - \varrho^2}$  с центром в ортогональной проекции  $c_\Pi$  точки  $c$  на подпространство  $\Pi$ . Чтобы убедиться в этом, положим в уравнении (23-1) переменную точку  $x$  равной  $c_\Pi + z$ , где вектор  $z = x - c_\Pi$  пробегает направляющее векторное пространство аффинного подпространства  $\Pi$ . Так как  $(z, c_\Pi - c) = 0$ , а  $(c_\Pi - c, c_\Pi - c) = \varrho^2$ , мы получаем на  $z$  уравнение  $(z, z) = r^2 - \varrho^2$ .

При  $\varrho = r$  сфера  $\Pi \cap S(r, c)$  вырождается в одну точку  $p = c_\Pi$ . Следовательно, в этом случае подпространство  $\Pi$  содержится в касательном пространстве к сфере в точке  $p \in S(r, c)$ . Таким

<sup>1</sup>Ср. с прим. 11.2 на стр. 134.

образом, в каждой точке  $p \in S$  касательное пространство  $T_p S(r, c)$  представляет собою гиперплоскость, проходящую через точку  $p$  перпендикулярно вектору  $p - c$ , и задаётся линейным неоднородным уравнением

$$(x - c, p - c) = r^2. \quad (23-4)$$

УПРАЖНЕНИЕ 23.1. Убедитесь, что это согласуется с описанием касательного пространства к произвольной проективной квадрике, данным в н° 17.3.1 на стр. 209.

**23.1.2. Степень точки относительно сферы.** Значение  $s_{r,c}(p) = (p - c, p - c) - r^2$  квадратичного полинома (23-2) на произвольно взятой точке  $p \in \mathbb{A}^n$  называется *степенью точки  $p$  относительно сферы  $S(r, c)$* . Степень обращается в нуль в точности на точках сферы  $S(r, c)$  и отрицательна внутри ограничиваемого сферой шара, достигая своего минимума  $-r^2$  в единственной точке — центре сферы. Каждая внешняя по отношению к шару точка  $p$  имеет положительную степень  $|p - c|^2 - r^2 = |p - q|^2$ , равную квадрату длины любого касательного отрезка  $[p, q]$ , опущенного из  $p$  на сферу, см. рис. 23◊1.

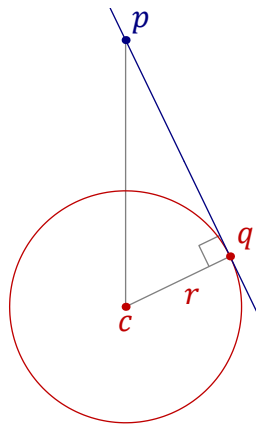


Рис. 23◊1.  $s_{r,c}(p) = |q - p|^2$ .

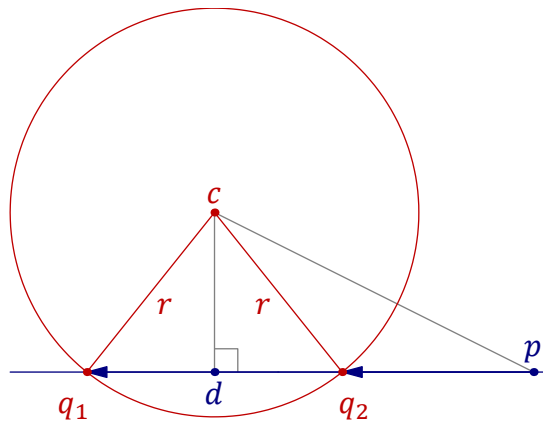


Рис. 23◊2.  $s_{r,c}(p) = (q_1 - p, q_2 - p)$ .

Вообще, если проходящая через точку  $p$  прямая пересекает сферу  $S(r, c)$  в точках  $q_1, q_2$  или касается её в точке  $q_1 = q_2$ , то центр  $d = (q_1 + q_2)/2$  отрезка  $[q_1, q_2]$  является ортогональной проекцией центра сферы на эту прямую<sup>1</sup> (см. рис. 23◊2). Дважды применяя теорему Пифагора:

$$\begin{aligned} s_{r,c}(p) &= |p - c|^2 - r^2 = |d - p|^2 + |d - c|^2 - r^2 = |d - p|^2 - |q_1 - d|^2 = \\ &= (d - p + (q_1 - d), d - p - (q_1 - d)) = (q_1 - p, q_2 - p), \end{aligned}$$

получаем равенство

$$s_{r,c}(p) = (q_1 - p, q_2 - p), \quad (23-5)$$

известное как *теорема о степени точки относительно сферы*.

**ПРИМЕР 23.2 (РАДИКАЛЬНАЯ ГИПЕРПЛОСКОСТЬ)**

ГМТ, имеющих равные степени относительно сфер  $S(r_1, c_1)$  и  $S(r_2, c_2)$ , описывается уравнением  $(x - c_1, x - c_1) - r_1^2 = (x - c_2, x - c_2) - r_2^2$ , которое эквивалентно линейному уравнению

$$\left(x - \frac{c_1 + c_2}{2}, c_2 - c_1\right) = \frac{r_1^2 - r_2^2}{2} \quad (23-6)$$

<sup>1</sup>См. н° 23.1.1 на стр. 286.

задающему гиперплоскость, перпендикулярную вектору  $c_2 - c_1$  и удалённую от середины отрезка  $[c_1, c_2]$  на расстояние  $|r_1^2 - r_2^2|/2|c_2 - c_1|$  в направлении центра сферы меньшего радиуса. Эта гиперплоскость называется *радикальной гиперплоскостью* сфер  $S(r_1, c_1)$  и  $S(r_2, c_2)$ . Когда сферы пересекаются, т. е. при  $r_1 - r_2 \leq |c_2 - c_1| \leq r_1 + r_2$ , где  $r_1 \geq r_2$ , радикальная гиперплоскость пересекает каждую из сфер в точности по сфере  $S(r_1, c_1) \cap S(r_2, c_2)$ .

**23.2. Сферы как комплексные проективные квадррики.** отождествим евклидово координатное векторное пространство  $V = \mathbb{R}^n$  с множеством вещественных точек комплексного пространства  $V_{\mathbb{C}} = \mathbb{C}^n$  с координатами  $(x_1, \dots, x_n)$  и комплексно билинейной формой

$$\begin{aligned} (*, *) : \mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^n &\rightarrow \mathbb{C} \\ ((x_1, \dots, x_n), (y_1, \dots, y_n)) &= x_1 y_1 + \dots + x_n y_n \in \mathbb{C}, \end{aligned} \quad (23-7)$$

которая продолжает евклидово скалярное произведение на  $\mathbb{R}^n$ . Вложим  $\mathbb{C}^n$  в качестве стандартной аффинной карты  $x_0 = 1$  в комплексное проективное пространство  $\mathbb{P}_n = \mathbb{P}(W)$  с однородными координатами  $(x_0 : x_1 : \dots : x_n)$ , которое является проективизацией векторного пространства  $W = \mathbb{C}e_0 \oplus V_{\mathbb{C}}$ . Тогда проективное замыкание сферы  $S(r, c) \subset \mathbb{A}(V_{\mathbb{C}})$  с аффинным уравнением  $(x, x) - 2(x, c) + (c, c) - r^2 = 0$  задаётся в  $\mathbb{P}_n$  однородным уравнением

$$(x, x) - 2x_0(x, c) + x_0^2((c, c) - r^2) = 0, \quad (23-8)$$

где через  $x = (x_1, \dots, x_n)$  и  $c = (c_1, \dots, c_n)$  по-прежнему обозначаются последние  $n$  координат. Все сферы (23-8) пересекают бесконечно удалённую гиперплоскость  $x_0 = 0$  по *абсолютной квадрике*

$$I \stackrel{\text{def}}{=} \{x \in \mathbb{P}(V_{\mathbb{C}}) \mid (x, x) = 0\}, \quad (23-9)$$

состоящей из комплексных изотропных векторов евклидова скалярного произведения (23-7).

УПРАЖНЕНИЕ 23.2. Пусть две проективные квадрики имеют общее гиперплоское сечение. Покажите, что у них есть и второе общее гиперплоское сечение<sup>1</sup>.

Применительно к сферам (23-8) утверждение из [упр. 23.2](#) очевидно: однородные уравнения

$$\begin{aligned} (x, x) - x_0(2(x, c_1) + x_0(c_1, c_1) - x_0 r_1^2) &= 0 \\ (x, x) - x_0(2(x, c_2) + x_0(c_2, c_2) - x_0 r_2^2) &= 0 \end{aligned}$$

при любых  $r_1, r_2 \in \mathbb{C}$  и  $c_1, c_2 \in V_{\mathbb{C}}$  совпадают друг с другом как при  $x_0 = 0$ , так и на гиперплоскости, вдоль которой совпадают друг с другом линейные множители, на которые умножается  $x_0$ . Второе гиперплоское сечение описывается уравнением

$$2(x, c_1) + x_0(c_1, c_1) - x_0 r_1^2 = 2(x, c_2) + x_0(c_2, c_2) - x_0 r_2^2,$$

которое преобразуется к тому же самому виду, что и уравнение (23-6) выше:

$$\left(x - x_0 \frac{c_1 + c_2}{2}, c_2 - c_1\right) = x_0 \frac{r_1^2 - r_2^2}{2}. \quad (23-10)$$

<sup>1</sup>Возможно, совпадающее с первым.



При  $c_1 \neq c_2$  и  $x_0 = 1$  оно задаёт радикальную гиперплоскость (23-6), а при  $c_1 = c_2$  — бесконечно удалённую гиперплоскость  $x_0 = 0$ . Таким образом, радикальной гиперплоскостью двух концентрических сфер разумно считать бесконечно удалённую гиперплоскость.

УПРАЖНЕНИЕ 23.3. Покажите, что все квадрики (23-8) с центром в данной точке  $c \in \mathbb{C}^n$  и произвольными  $r \in \mathbb{C}$  образуют пучок комплексных проективных квадрик, натянутый на двойную бесконечно удалённую гиперплоскость  $x_0^2 = 0$  и простой конус  $(x - c, x - c) = 0$  с вершиной  $c$  над абсолютной квадратикой (23-9), причём все остальные квадрики пучка, за исключением этих двух, являются гладкими.

**23.2.1. Пространство псевдосфер.** Все квадратичные формы (23-8) с вещественными центрами  $c \in V \simeq \mathbb{R}^n$  и  $r > 0$  лежат в вещественном векторном подпространстве  $\Sigma \subset S^2W^*$  размерности  $n + 2$ , состоящем из всех однородных вещественных квадратичных форм вида

$$q = \alpha \cdot (x, x) - 2x_0(x, c) + \beta \cdot x_0^2, \quad \text{где } \alpha, \beta \in \mathbb{R}, c \in V. \quad (23-11)$$

Проективизация  $\mathbb{S} \stackrel{\text{def}}{=} \mathbb{P}(\Sigma)$  называется пространством  $(n - 1)$ -мерных псевдосфер в  $\mathbb{R}^n$ . Таким образом,  $\mathbb{S} \simeq \mathbb{P}_{n+1}(\mathbb{R})$  представляет собою вещественное проективное пространство размерности  $n + 1$ . Стандартная аффинная карта  $U_\alpha \subset \mathbb{S}$  состоит из псевдосфер, которые можно записать приведённым уравнением

$$(x - x_0 c / \alpha, x - x_0 c / \alpha) - x_0^2((c, c) - \alpha\beta) / \alpha^2 = 0. \quad (23-12)$$

При  $(c, c) - \alpha\beta > 0$  эта квадратика является настоящей вещественной сферой с квадратом радиуса

$$r^2 = ((c, c) - \alpha\beta) / \alpha^2,$$

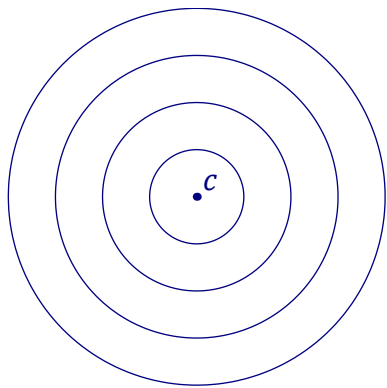
при  $(c, c) - \alpha\beta = 0$  — простым конусом с вершиной  $c$  над абсолютной квадратикой (23-9), который виден в  $\mathbb{R}^n$  как двойная точка  $c$ , а при  $(c, c) - \alpha\beta < 0$  псевдосфера (23-12) является гладкой проективной квадратикой без вещественных точек, которую мы будем называть *мнимой сферой*. На векторном пространстве  $\Sigma$  имеется каноническая квадратичная форма

$$\varrho(q) \stackrel{\text{def}}{=} (c, c) - \alpha\beta, \quad (23-13)$$

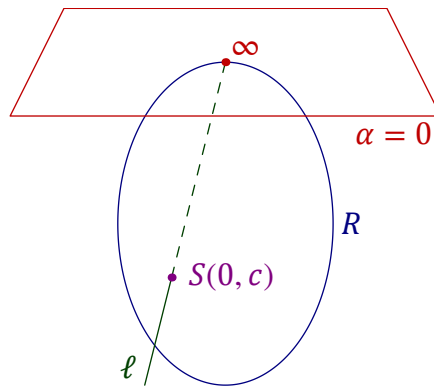
пропорциональная квадрату радиуса сферы и имеющая сигнатуру  $(n + 1, 1)$ . Задаваемая этой формой проективная квадратика  $R = V(\varrho)$  выглядит в аффинной карте  $U_\alpha$  как сферический параболоид  $(c, c) = \beta$ , состоящий из сфер нулевого радиуса. Внутренность  $(c, c) < \beta$  этого параболоида состоит из мнимых сфер, а внешность  $(c, c) > \beta$  — из настоящих сфер радиуса  $r = \sqrt{(c, c) - \beta}$ . Бесконечно удалённая гиперплоскость  $L_\infty = \mathbb{P}(\text{Ann } \alpha)$  карты  $U_\alpha$  состоит из псевдосфер (23-11), имеющих  $\alpha = 0$  и распадающихся в объединение бесконечно удалённой гиперплоскости  $x_0 = 0$  и гиперплоскости  $2(x, c) = \beta x_0$ , которая совпадает с бесконечно удалённой гиперплоскостью если и только если  $c = 0$ . Псевдосфера  $x_0^2 = 0$ , в которой бесконечно удалённая гиперплоскость  $L_\infty$  касается параболоида  $R$ , обозначается  $\infty \in \mathbb{S}$ .

УПРАЖНЕНИЕ 23.4. Явно вычислите определитель Грама квадратичной формы (23-11) в стандартном ортонормальном базисе пространства  $\mathbb{R}^n$  и ещё раз убедитесь, что форма (23-11) особа если и только если она лежит на бесконечной гиперплоскости  $\alpha = 0$  пространства  $\mathbb{S}$  или на параболоиде  $(c, c) = \alpha\beta$ .

**23.2.2. Пучки сфер.** Из сказанного в предыдущем разделе **н° 23.2.1** вытекает, что все вещественные квадрики из пучка комплексных проективных квадратик, порождённого двумя настоящими сферами  $S(r_1, c_1)$  и  $S(r_2, c_2)$  в  $\mathbb{R}^n$ , образуют прямую  $\ell$  в пространстве псевдосфер  $\mathbb{S}$ . Эта прямая пересекает бесконечно удалённую гиперплоскость  $L_\infty \subset \mathbb{S}$  ровно в одной точке вида  $\xi x_0$ , где  $\xi \in W^*$  — однородная вещественная линейная форма от  $(x_0, x_1, \dots, x_n)$ . Если  $\xi = x_0$ , точка  $\ell \cap L_\infty = \infty = R \cap L_\infty$  является бесконечной точкой параболоида  $R$ , и прямая  $\ell$  пересекает параболоид  $R$  ещё ровно в одной, отличной от  $\infty$  точке, как на **рис. 23◊4** ниже. Вторая точка пересечения отвечает псевдосфере  $S(0, c)$  с уравнением  $(x - c, x - c) = 0$ , видимой в  $\mathbb{R}^n$  как двойная точка  $c$ . Согласно **упр. 23.3**, такой пучок  $\ell$  является пучком концентрических сфер с центром в  $c$ , см. **рис. 23◊3**.

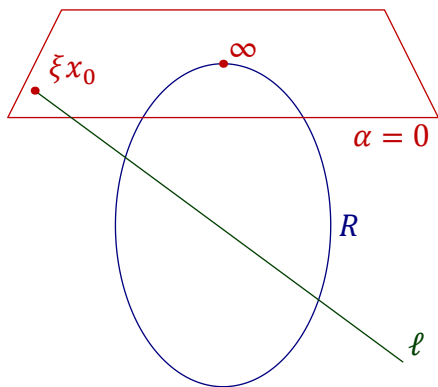


**Рис. 23◊3.** Пучок концентрических сфер.

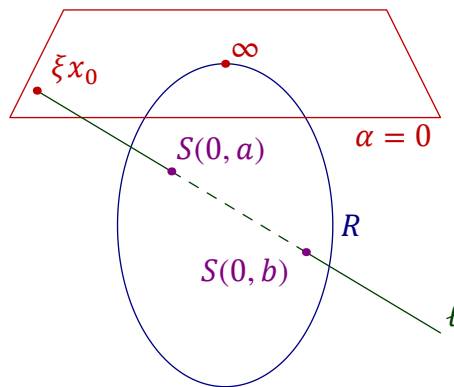


**Рис. 23◊4.** Соответствующая прямая в  $\mathbb{S}$ .

Если  $\ell \cap L_\infty \neq \infty$ , то в пучке  $\ell$  содержится ровно одна распавшаяся квадратика — объединение бесконечно удалённой гиперплоскости  $x_0 = 0$  и гиперплоскости  $\Pi = \text{Ann } \xi$ , которая является вторым, отличным от бесконечно удалённого, общим гиперплоским сечением всех сфер пучка и, тем самым, видна в аффинном пространстве  $A^n = A(V)$  как радикальная гиперплоскость любой пары сфер в пучке  $\ell$ . При этом пучок  $\ell$  может содержать либо ни одного, либо один, либо два простых конуса, отвечающих точкам пересечения прямой  $\ell$  с параболоидом  $R$ , как на **рис. 23◊5**, **рис. 23◊9** и **рис. 23◊6** соответственно.



**Рис. 23◊5.** Пучок без простых конусов.



**Рис. 23◊6.** Пучок с двумя простыми конусами.

В первом случае прямая  $\ell$  не пересекает  $R$  и состоит из всех сфер, пересекающих радикальную ось  $\Pi = \text{Ann } \xi$  порождающих пучок сфер  $S(r_1, c_1)$  и  $S(r_2, c_2)$  по фиксированной  $(n - 2)$ -мерной

сфере  $S(r_1, c_1) \cap S(r_2, c_2)$ . Такой пучок называется *пучком пересекающихся сфер*. Сферы  $S(r_1, c_1)$  и  $S(r_2, c_2)$  порождают пучок пересекающихся сфер если и только если

$$r_1 - r_2 < |c_2 - c_1| < r_1 + r_2, \quad \text{где } r_1 \geq r_2.$$

Базисное множество пучка пересекающихся сфер является объединением абсолютной квадрики и вещественной сферы  $S(r_1, c_1) \cap S(r_2, c_2)$ .

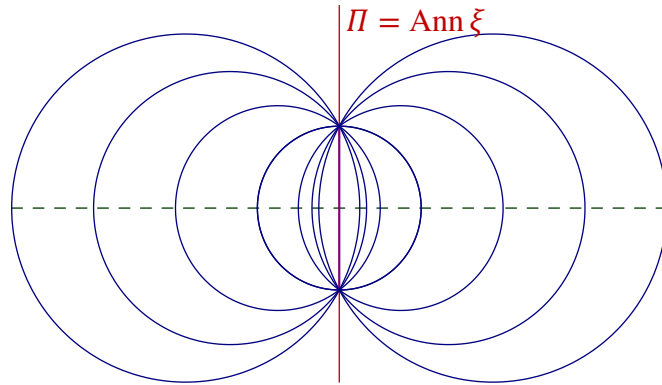


Рис. 23◊7. Пучок пересекающихся сфер.

Второй случай является вырождением первого: при  $|c_2 - c_1| = r_1 + r_2$  или  $|c_2 - c_1| = r_1 - r_2$ , где  $r_1 > r_2$ , базисная сфера пучка  $\ell$  вырождается в одну точку  $c = \Pi \cap (c_1 c_2)$ . Все сферы такого пучка касаются друг друга в этой точке  $c$ , имеют центры на прямой  $(c_1 c_2)$  и при  $r \rightarrow \infty$  стремятся к гиперплоскости  $\Pi$ , которая проходит через точку  $c$  перпендикулярно прямой  $(c_1 c_2)$ , см. рис. 23◊8. Отвечающая этому пучку прямая  $\ell$  касается параболоида  $R$  в псевдосфере  $S(0, c)$ , видимой в  $\mathbb{R}^n$  как двойная точка  $c$ , см. рис. 23◊9. Такой пучок  $\ell$  называется *пучком соприкасающихся сфер*.

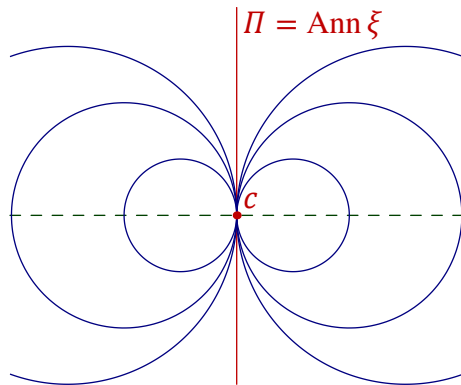


Рис. 23◊8. Пучок соприкасающихся сфер.

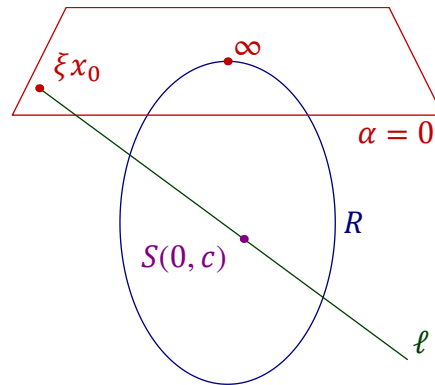


Рис. 23◊9. Соответствующая прямая в  $\mathbb{S}$ .

Третий случай имеет место когда  $r_1 + r_2 < |c_2 - c_1|$  или  $|c_1 - c_2| < r_1 - r_2$ , где  $r_1 > r_2$ , и отвечает прямой  $\ell$ , которая пересекает параболоид  $R$  в двух различных точках  $S(0, a), S(0, b)$ , видимых в  $\mathbb{R}^n$  как две различные двойные точки  $a, b \in (c_1, c_2)$ , см. рис. 23◊6. Такой пучок называется *пучком непересекающихся сфер*: никакие две сферы пучка не пересекаются<sup>1</sup>, но при этом любые

<sup>1</sup>Вернее, пересекаются по двум мнимым сферам: абсолютной сфере  $I$  из форм. (23-9) на стр. 288 и радикальному гиперплоскому сечению  $\Pi \cap S(r_1, c_1) = \Pi \cap S(r_2, c_2) = S(r_1, c_1) \cap S(r_2, c_2)$ .

две сферы имеют одну и ту же радикальную ось  $\Pi$ , к которой все сферы пучка стремятся при  $r \rightarrow \infty$ , см. рис. 23♦10 ниже. При подходе к точкам пересечения прямой  $\ell$  с параболоидом  $R$  радиусы сфер стремятся к нулю, а сами сферы вырождаются в двойные точки  $a$  и  $b$ . Если двигать прямую  $\ell$  в пространстве  $\mathbb{P}(\Sigma)$  так, чтобы две точки её пересечения с параболоидом  $R$  слились в одну точку касания, двойные точки  $a$  и  $b$  сольются в одну точку  $c$ , и мы вновь получим пучок соприкасающихся сфер.

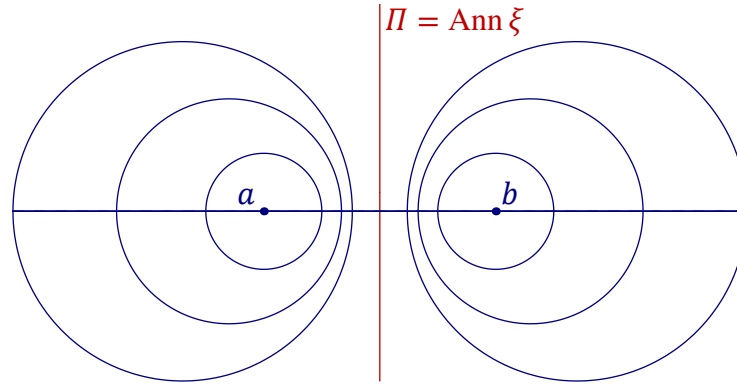


Рис. 23♦10. Пучок непересекающихся сфер.

**23.3. Инверсии.** Так как поляризация однородной квадратичной формы (23-8) имеет вид

$$\tilde{q}(x, y) = (x - x_0c, y - y_0c) - r^2 x_0 y_0,$$

полярное преобразование<sup>1</sup> относительно сферы  $S(r, c) \subset \mathbb{R}^n$  переводит центр  $c$  в бесконечно удалённую гиперплоскость  $x_0 = 0$ , а каждую отличную от центра точку  $p \in \mathbb{R}^n$  — в полярную ей аффинную гиперплоскость

$$\Pi_p = \{x \in \mathbb{R}^n \mid (x - c, p - c) = r^2\}, \quad (23-14)$$

перпендикулярную прямой  $(pc)$  и находящуюся на расстоянии  $r^2 / |p - c|$  от центра сферы по ту же сторону, что и точка  $p$ . Сопряжённой точке  $p$  на прямой  $(pc)$  точка  $p' = (pc) \cap \Pi_p$  обозначается  $\sigma_{r,c}(p)$  и называется *инверсной* точке  $p$  относительно сферы  $S(r, c)$ . Она однозначно характеризуется тем, что  $(p' - c, p - c) = r^2$ , и явно выражается через  $p$  по формуле

$$\sigma_{r,c}(p) = c + \frac{r^2(p - c)}{(p - c, p - c)}. \quad (23-15)$$

Инверсия задаёт на каждой проходящей через  $c$  проективной прямой инволюцию с неподвижными точками  $\ell \cap S(r, c)$ . Эта инволюция переставляет центр сферы с бесконечностью и естественно продолжается на одноточечную компактификацию  $\hat{\mathbb{R}}^n = \mathbb{R}^n \sqcup \infty$  евклидова пространства  $\mathbb{R}^n$  до инволютивного гомеоморфизма  $\sigma_{r,c} : \hat{\mathbb{R}}^n \simeq \hat{\mathbb{R}}^n$ , который переставляет друг с другом сопряжённые относительно сферы точки на каждой проходящей через центр сферы прямой, в частности, оставляет каждую точку сферы на месте и переставляет точки  $c$  и  $\infty$ . Таким образом, любая проходящая через центр сферы прямая переводится инверсией в себя с сохранением

<sup>1</sup>См. п.° 19.1 на стр. 233.

двойного отношения, и две точки такой прямой инверсны друг другу если и только если они гармоничны точкам пересечения этой прямой со сферой<sup>1</sup>. В частности, каждое проходящее через центр сферы аффинное подпространство  $\Pi$  переводится инверсией  $\sigma_{r,c}$  в себя, и ограничение инверсии на такое подпространство является в нём инверсией относительно сферы  $\Pi \cap S(r, c)$ .

Предложение 23.1

Инверсия  $\sigma_{r,c}$  переводит каждую не проходящую через  $c$  гиперплоскость  $\Pi$  в сферу с диаметром  $[p, c]$ , где  $p$  — полюс гиперплоскости  $\Pi$  относительно сферы  $S(r, c)$ , а каждую проходящую через  $c$  сферу  $Q$  — в гиперплоскость, полярную второму концу выпущенного из  $c$  диаметра сферы  $Q$ .

Доказательство. В силу того, что инверсия обратна самой себе, достаточно доказать только первое утверждение. Поскольку поляр  $\Pi_x$  любой точки  $x \in \Pi$  проходит через полюс  $p$  гиперплоскости  $\Pi$ , отрезок  $[p, c]$  виден из инверсной к  $x$  точки  $x' = (cx) \cap \Pi_x$  под прямым углом, см. рис. 23◊11. □

Упражнение 23.5. Проверьте прямым вычислением, что отображение (23-15) переводит гиперплоскость  $(x - c, p - c) = r^2$  и сферу  $(x - c, x - p) = 0$  друг в друга.

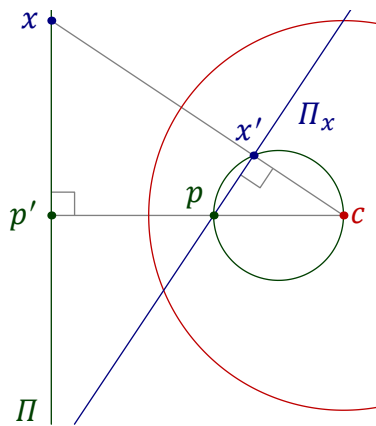


Рис. 23◊11. Инверсные сфера и гиперплоскость.

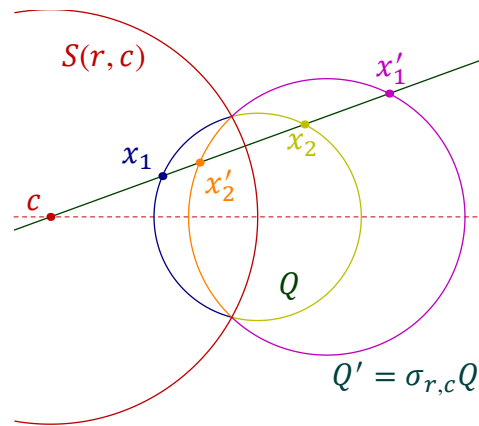


Рис. 23◊12. Инверсные сферы.

Предложение 23.2

Каждая не проходящая через центр инверсии сфера  $Q = S(t, p)$  переводится инверсией  $\sigma_{r,c}$  в сферу  $Q'$ , гомотетичную сфере  $Q$  относительно центра инверсии  $c$  с коэффициентом  $r^2/s_{t,p}(c)$ , где  $s_{t,p}(c) = (c - p, c - p) - t^2$  означает степень<sup>2</sup> центра инверсии  $c$  относительно сферы  $Q$ , см. рис. 23◊12. В частности, сфера  $Q$  переводится инверсией в себя если и только если она перпендикулярна сфере  $S(r, c)$ .

Доказательство. По теореме о степени точки относительно сферы<sup>3</sup> на каждой проходящей через  $c$  прямой, пересекающей сферу  $Q$  в точках  $x_1, x_2$ , выполняется равенство

$$(x_1 - c, x_2 - c) = s_{t,p}(c).$$

<sup>1</sup>См. предл. 19.1 на стр. 234.

<sup>2</sup>См. п. 23.1.2 на стр. 287.

<sup>3</sup>См. формулу (23-5) на стр. 287.

Поэтому для гомотетичных точек  $x_1, x_2$  относительно  $c$  с коэффициентом  $r^2/s_{t,p}(c)$  точек  $x'_1, x'_2$  справедливы равенства  $(x_1 - c, x'_2 - c) = r^2 = (x'_1 - c, x_2 - c)$ , означающие, что  $\sigma_{r,c}(x_1) = x'_2$ , а  $\sigma_{r,c}(x_2) = x'_1$ . Это доказывает первое утверждение. Равенство  $\sigma_{r,c}Q = Q$  равносильно тому, что коэффициент гомотетии  $r^2/s_{t,p}(c) = 1$ , что можно переписать как  $(p - c, p - c) = r^2 + t^2$ . Последнее означает, что расстояние между центрами сфер равно сумме квадратов их радиусов, т. е. что отрезок  $[c, p]$  виден из каждой точки пересечения сфер под прямым углом.  $\square$

**Предостережение 23.1.** Центр сферы  $Q$  не обязан переходить при инверсии  $\sigma_{r,c}$  в центр сферы  $Q' = \sigma_{r,c}(Q)$ . Например, если сфера  $Q = S(t, p)$  перпендикулярна сфере  $S = S(r, c)$ , то её центр перейдёт в точку пересечения радикальной гиперплоскости с линией центров.

**Упражнение 23.6.** Убедитесь в этом и докажите, что прообразом центра сферы  $Q' = \sigma_{r,c}(Q)$  является точка  $c'$ , инверсная точке  $c$  относительно сферы  $Q$ .

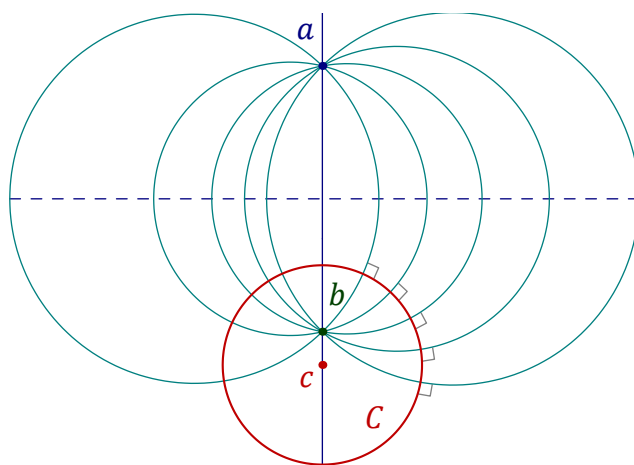


Рис. 23♦13. Отражение в сфере.

#### Следствие 23.1

Две различные точки тогда и только тогда инверсны относительно сферы  $S$  (соотв. симметричны относительно гиперплоскости  $\Pi$ ), когда все проходящие через них сферы и гиперплоскости перпендикулярны сфере  $S$  (соотв. гиперплоскости  $\Pi$ ), см. рис. 23♦13 (соотв. рис. 23♦14).

**Доказательство сл. 23.1.** Если точки  $a$  и  $b$  инверсны относительно сферы, то любая проходящая через них сфера  $Q$  пересекает сферу  $S$  по некоторой  $(n - 2)$ -мерной сфере, которая неподвижна относительно инверсии. Поэтому инверсная  $Q$  сфера  $Q'$  пересекает  $S$  по той же сфере  $S \cap Q' = S \cap Q$  и, стало быть, лежит в пучке пересекающихся сфер<sup>1</sup> ( $SQ$ ), откуда  $Q = Q'$ , так как в любом пучке есть ровно одна квадрика, проходящая через заданную не базисную точку. По предл. 23.2 сферы  $Q$  и  $S$  перпендикулярны. Поскольку каждая проходящая через  $a$  и  $b$  гиперплоскость походит и через лежащий на прямой  $(ab)$  центр сферы, она тоже перпендикулярна сфере. Для доказательства обратной импликации заметим, что каждое двухточечное множество  $\{a, b\}$  является пересечением всех проходящих через него сфер и гиперплоскостей, так как для любой точки  $x \neq a, b$  существует сфера или гиперплоскость, проходящая через  $a$  и  $b$ , но не

<sup>1</sup>См. п.° 23.2.2 на стр. 290.

проходящая через  $x$ . Поэтому если каждая проходящая через  $a$  и  $b$  сфера или гиперплоскость переводится инверсией в себя, то и множество  $\{a, b\}$  переходит в себя.  $\square$

УПРАЖНЕНИЕ 23.7. Докажите сл. 23.1 для отражения в гиперплоскости, см. рис. 23◊14.

Соглашение 23.1. Имея в виду сл. 23.1 мы, допуская известную вольность, будем иногда называть инверсии относительно сферы  $S$  *отражениями в сфере  $S$* .

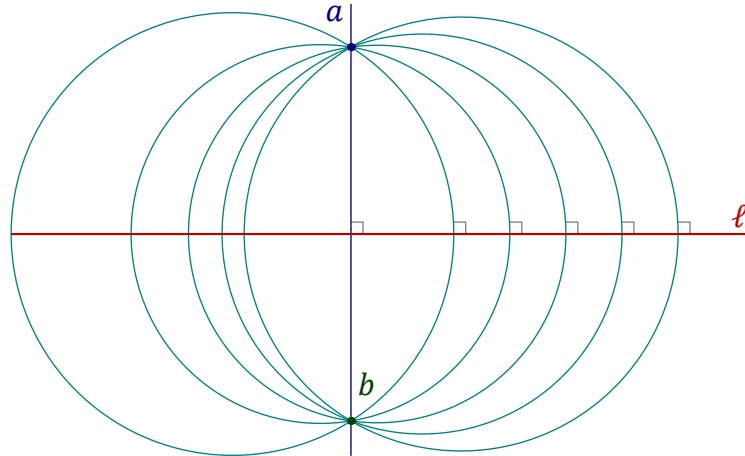


Рис. 23◊14. Отражение в гиперплоскости.

**23.3.1. Конформность.** Будем называть *касательным векторным пространством* к аффинной гиперплоскости  $\Pi \subset \mathbb{R}^n$  в точке  $p \in \Pi$  направляющее векторное подпространство этой гиперплоскости, а *касательным векторным пространством* к сфере  $S = S(r, c) \subset \mathbb{R}^n$  в точке  $p \in \Pi$  — векторное подпространство  $(p - c)^\perp \subset \mathbb{R}^n$ , ассоциированное с аффинной касательной гиперплоскостью  $T_p S = p + (p - c)^\perp$ . Под углом между пересекающимися фигурами  $\Phi$  и  $\Psi$ , каждая из которых является сферой или гиперплоскостью, мы понимаем евклидов угол между касательными векторными пространствами к этим фигурам в любой точке  $p \in \Phi \cap \Psi$ , т. е. наименьший из двух смежных углов между перпендикулярными этим касательным пространствам одномерными векторными подпространствами в  $\mathbb{R}^n$ .

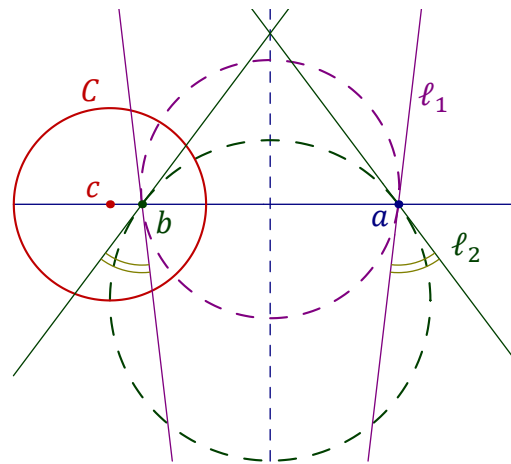


Рис. 23◊15. Сохранение углов.

УПРАЖНЕНИЕ 23.8. Убедитесь, что этот угол не зависит от выбора точки  $p \in \Phi \cap \Psi$ .

Предложение 23.3

Каждое отражение в сфере или гиперплоскости сохраняет углы между сферами и гиперплоскостями.

Доказательство. Отражение в гиперплоскости является ортогональным линейным преобразованием и сохраняет углы. Покажем, что каждая инверсия  $\sigma_{r,c}$  тоже сохраняет углы.

Пусть точка  $a \neq c$  не лежит на сфере  $S(r, c)$ , и  $b = \sigma_{r,c}(a)$ . Сферы, касающиеся заданной гиперплоскости  $\Pi$  в точке  $a$  образуют пучок  $\ell_\Pi$  соприкасающихся сфер и пересекают любую проходящую через  $a$  сферу или гиперплоскость под одним и тем же углом. Инверсия переводит пучок  $\ell_\Pi$  в пучок соприкасающихся сфер, касающихся касательной гиперплоскости  $T_b\sigma_{r,c}(\Pi)$  фигуры<sup>1</sup>  $\sigma_{r,c}(\Pi)$  в точке  $b$  и также образующих одинаковые углы с каждой проходящей через  $b$  сферой или гиперплоскостью. В пучке  $\ell_\Pi$  существует единственная сфера  $Q$ , проходящая через точки  $a$  и  $b$ . Как мы видели в доказательстве [сл. 23.1](#), эта сфера переводится в себя инверсией  $\sigma_{r,c}$ , а также отражением в срединном перпендикуляре к отрезку  $[a, b]$ . Поэтому две проходящие через  $a$  и  $b$  сферы с касательными гиперплоскостями  $T_aQ_1 = \Pi_1$  и  $T_aQ_2 = \Pi_2$  имеют в точке  $b$  касательные гиперплоскости  $T_bQ_1 = \Pi'_1$  и  $T_bQ_2 = \Pi'_2$ , симметричные гиперплоскостям  $\Pi_1$  и  $\Pi_2$  относительно срединного перпендикуляра к отрезку  $[a, b]$  и, стало быть, пересекающиеся под тем же углом.

Если точка  $a \in S(r, c)$ , то углы между сферами и плоскостями, проходящими через  $a$  сохраняются при инверсии  $\sigma_{r,c}$ , поскольку последняя является композицией инверсии  $\sigma_{r/2,c}$  относительно не проходящей через  $a$  сферы  $S(r/2, c)$  и гомотетии с центром  $c$  и коэффициентом 4.

**Упражнение 23.9.** Убедитесь в этом.

Если  $a = c$  совпадает с центром инверсии, то угол между любыми двумя проходящими через  $a$  сферами  $Q_1$  и  $Q_2$  равен углу между инверсными этим сферам гиперплоскостями, поскольку по последним параллельны касательным пространствам  $T_cQ_1$  и  $T_cQ_2$ .  $\square$

**Следствие 23.2**

Пусть каждая из двух фигур  $\Phi, \Psi \in \mathbb{R}^n$  является сферой или гиперплоскостью. Обозначим через  $\sigma_\Phi, \sigma_\Psi : \widehat{\mathbb{R}}^n \rightarrow \widehat{\mathbb{R}}^n$  соответствующие отражения или инверсии. Тогда  $\sigma_\Phi\sigma_\Psi\sigma_\Phi^{-1} = \sigma_{\sigma_\Phi(\Psi)}$ , т. е. любые две симметричные относительно  $\Psi$  точки переводятся отражением  $\sigma_\Phi$  в две точки, симметричные относительно  $\sigma_\Phi(\Psi)$ .

**Доказательство.** Согласно [сл. 23.1](#) на стр. 294 симметричность точек  $a$  и  $b$  относительно  $\Psi$  означает, что все проходящие через  $a$  и  $b$  сферы и гиперплоскости перпендикулярны  $\Psi$ . Сохраняющее углы отражение  $\sigma_\Phi$  биективно отображает множество таких сфер и гиперплоскостей в множество перпендикулярных  $\Phi(\Psi)$  сфер и гиперплоскостей, проходящих через точки  $\Phi(a)$  и  $\Phi(b)$ .  $\square$

**Определение 23.1 (конформные отображения)**

Непрерывно дифференцируемое отображение  $f : U \rightarrow W$  между двумя открытыми подмножествами  $U, W$  евклидова пространства  $\mathbb{R}^n$  называется *конформным*, если в каждой точке  $p \in U$  производное линейное отображение  $D_p f : T_p U \rightarrow T_{f(p)} W$  является композицией скалярного растяжения<sup>2</sup> и ортогонального линейного отображения, сохраняющего евклидово скалярное произведение на касательных пространствах  $T_p U \simeq T_{f(p)} W \simeq \mathbb{R}^n$ .

**Упражнение 23.10.** Убедитесь, что инверсия  $\sigma_{r,c} : \mathbb{R}^n \setminus c \rightarrow \mathbb{R}^n \setminus c$  является конформным отображением, причём её производное отображение в произвольной точке  $p \neq c$  является композицией отражения в гиперплоскости  $(p - c)^\perp$  и скалярного растяжения с коэффициентом  $r^2 / (p - c, p - c)$ .

<sup>1</sup> Согласно предыдущему, эта фигура является сферой или гиперплоскостью.

<sup>2</sup> Коэффициент которого может зависеть от точки  $p \in U$ .



**23.4. Стереографическая проекция и инверсии на сфере.** Стереографическая проекция сферы  $S = S(r, c)$  из лежащей на ней точки  $p$  на проходящую через центр сферы перпендикулярно вектору  $p - c$  экваториальную гиперплоскость  $E_p = \{x \mid (x - c, p - c) = 0\}$

$$\pi_p : S(r, c) \setminus p \rightarrow E_p \tag{23-16}$$

является ограничением на сферу  $S$  инверсии  $\sigma_Q$  относительно перпендикулярной сферу  $S$  по её экватору  $E_p \cap S$  сферы  $Q$  радиуса  $r\sqrt{2}$  с центром в точке  $p$ , см. рис. 23◊16.

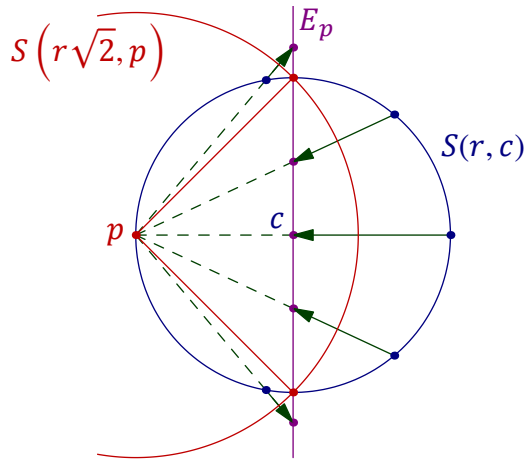


Рис. 23◊16. Стереографическая проекция.

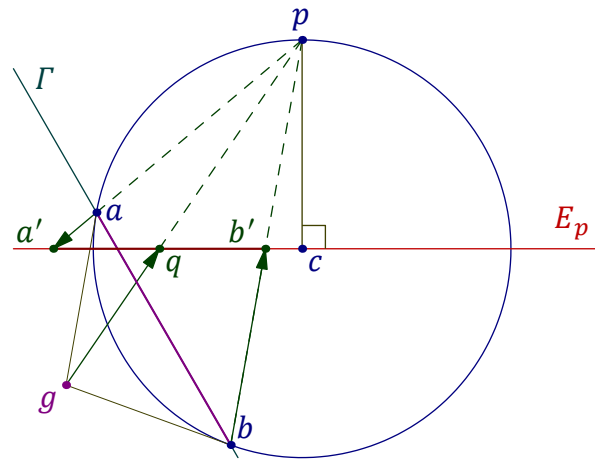


Рис. 23◊17. Соответственные сферы.

Таким образом, стереографическая проекция переводит каждую лежащую на  $S$  сферу  $S' = \Gamma \cap S$ , высекаемую из  $S$  какой-либо гиперплоскостью  $\Gamma$ , в лежащую в гиперплоскости  $E_p$  гиперплоскость или сферу, высекаемую из  $E_p$  образом  $\sigma_Q(\Gamma)$  гиперплоскости  $\Gamma$  при инверсии  $\sigma_Q$ , который является гиперплоскостью или сферой: первое происходит если гиперплоскость  $\Gamma$  проходит через точку  $p$ , а второе — если не проходит, и во втором случае полюс  $g$  гиперплоскости  $\Gamma$  относительно сферы  $S$  спроектируется из точки  $p$  в центр сферы  $\pi_p(S') = \sigma_Q(\Gamma) \cap E_p$ .

УПРАЖНЕНИЕ 23.11. Убедитесь в этом (см. рис. 23◊17).

Наоборот, каждая гиперплоскость  $\Gamma' \subset E_p$  является стереографической проекцией сферы, высекаемой из  $S$  гиперплоскостью  $\Gamma$ , проходящей через  $\Gamma'$  и  $p$ , а каждая сфера  $S'' = S(t, q) \subset E_p$ , пересекающая прямую  $(qc)$  в точках  $a' = \pi_p(a)$  и  $b' = \pi_p(b)$ , как на рис. 23◊17, является стереографической проекцией сферы  $S' = \Gamma \cap S$  с диаметром  $[a, b]$ , высекаемой из  $S$  гиперплоскостью  $\Gamma$ , полюс  $g$  которой проектируется из точки  $p$  в центр  $q$  сферы  $S'$  и которая является прообразом сферы с диаметром  $[a', b']$  при инверсии  $\sigma_Q$ . При этом углы между лежащими на  $S$  сферами равны углам между их образами в гиперплоскости  $E_p$  и наоборот.

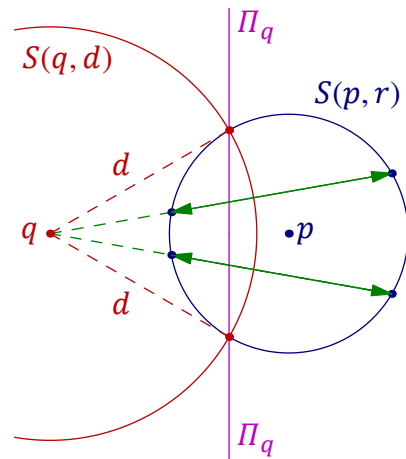


Рис. 23◊18. Инверсия  $\sigma_q : S(p, r) \rightarrow S(p, r)$ .

Каждая точка  $q$ , лежащая снаружи от ограничиваемого сферой  $S = S(r, c)$  шара, задаёт на сфере  $S$  инволюцию  $\sigma_q : S \rightarrow S$ , переставляющую между собою точки пересечения сферы  $S$

с проходящими через  $q$  прямыми<sup>1</sup>. Эта инволюция тождественно действует на сфере  $S \cap \Pi_q$ , высекаемой из сферы  $S$  полярной гиперплоскостью  $\Pi_q$  точки  $q$ , и совпадает с ограничением на сферу  $S$  инверсии относительно сферы  $Q = S(t, q)$ , которая перпендикулярно пересекает сферу  $S$  по неподвижной относительно  $\sigma_q$  сфере  $S \cap \Pi_q$ , имеет центр в точке  $q$  и квадрат радиуса  $t^2 = s_{r,c}(q) = |q - c|^2 - r^2$ , равный степени точки  $q$  относительно сферы  $S$ , см. рис. 23◊18. Инволюция  $\sigma_q$  называется *инверсией сферы  $S$* , а точка  $q$  — *центром инверсии  $\sigma_q$* .

Дополним стереографическую проекцию (23-16) до гомеоморфизма

$$\pi_p : S(r, c) \simeq \widehat{E}_p, \quad p \mapsto \infty, \quad x \mapsto (px) \cap E_p \text{ при } x \neq p, \quad (23-17)$$

где  $\widehat{E}_p = E_p \sqcup \infty$  — одноточечная компактификация экваториальной гиперплоскости  $E_p$ , и будем рассматривать отражения в лежащих внутри  $E_p$  гиперплоскостях как оставляющие на месте точку  $\infty$  инволюции пространства  $\widehat{E}_p$ .

**Предложение 23.4**

Пополненная стереографическая проекция (23-17) устанавливает биекцию между инверсиями сферы  $S = S(r, c)$  и отражениями пополненного евклидова пространства  $\widehat{E}_p$  в лежащих в нём сферах и гиперплоскостях, переводя каждую инверсию  $\sigma_q : S \simeq S$  в композицию

$$\pi_p \sigma_q \pi_p^{-1} : \widehat{E}_p \simeq \widehat{E}_p, \quad (23-18)$$

которая является отражением в стереографическом образе лежащей на  $S$  сферы  $\Pi_q \cap S$ , высекаемой полярной гиперплоскостью  $\Pi_q$  точки  $q$  относительно сферы  $S$ .

**Доказательство.** Композиция (23-18) оставляет на месте каждую точку фигуры  $\Phi = \pi_p(\Pi_q \cap S)$  и действует на точки экваториальной гиперплоскости  $E_p$  как композиция инверсий

$$\sigma_{r\sqrt{2}, p} \sigma_{t, q} \sigma_{r\sqrt{2}, p}^{-1} = \sigma_\Psi,$$

которая по сл. 23.2 на стр. 296 представляет собою отражение в фигуре  $\Psi = \sigma_{r\sqrt{2}, p}(Q)$ , где  $Q = S(t, q)$  — сфера с центром  $q$  и квадратом радиуса  $t^2 = s_{r,c}(q)$ , как на рис. 23◊18 выше. Фигура  $\Psi$  является сферой, если  $p \in \Pi_q$ , или гиперплоскостью, если  $p \notin \Pi_q$ , и  $\Psi \cap E_p = \Phi$ . Поскольку инверсия  $\sigma_\Psi$  переводит гиперплоскость  $E_p$  в себя, сфера или гиперплоскость  $\Psi$  автоматически перпендикулярна гиперплоскости  $E_p$ , и отражение  $\sigma_\Psi$  действует на  $E_p$  как отражение  $\sigma_\Phi$ .  $\square$

**Упражнение 23.12.** Убедитесь напрямую, что инверсия  $\sigma_{r\sqrt{2}, p}$  переводит сферу  $Q$  в перпендикулярную гиперплоскости  $E_p$  гиперплоскость, если  $p \in \Pi_q$ , или в сферу с центром на гиперплоскости  $E_p$ , если  $p \notin \Pi_q$ .

**23.5. Группы Мёбиуса.** Вложим евклидово пространство  $U = \mathbb{R}^{n-1}$  в евклидово пространство  $V = \mathbb{R}^n$  с координатами  $(x_1, \dots, x_n)$  в качестве гиперплоскости  $x_n = 0$  и обозначим через  $S = S(1, 0) \subset \mathbb{R}^n$  единичную сферу с центром в нуле. Рассмотрим пространство  $V = \mathbb{R}^n$  как аффинную карту  $x_0 = 0$  в проективном пространстве  $\mathbb{P}_n = \mathbb{P}(\mathbb{R}^{n+1})$  с однородными координатами  $(x_0 : x_1 : \dots : x_n)$  и обозначим через

$$s(x) = -x_0^2 + x_1^2 + \dots + x_n^2 \quad (23-19)$$

<sup>1</sup>Ср. с прим. 18.5 на стр. 230.

однородную квадратичную форму сигнатуры  $(n, 1)$  на пространстве  $W = \mathbb{R}^{n+1}$ , задающую проективное замыкание  $\bar{S} = V(s) \subset \mathbb{P}_n$  сферы  $S$ , которое совпадает с  $S$ , так как у сферы нет вещественных точек на бесконечности. Инволюция  $\sigma_q : S \rightarrow S$  действует на проективной квадрике  $S$  как отражение гиперплоскости  $q_s^\perp \subset W$ , ортогональной относительно формы  $s$  анизотропному вектору  $q$  с положительным скалярным квадратом  $s(q) > 0$ .

Упражнение 23.13. Убедитесь, что такие отражения порождают группу  $O(n, 1) \subset GL_{n+1}(\mathbb{R})$  линейных преобразований  $W \rightarrow W$ , сохраняющих квадратичную форму (23-19).

Поскольку сфера  $S$  содержит  $n + 2$  точки, никакие  $n + 1$  из которых не лежат в одной гиперплоскости, каждый линейный проективный автоморфизм пространства  $\mathbb{P}_n$  однозначно задаётся своим действием на сферу. Мы заключаем, что порождённая отражениями  $\sigma_q$  группа преобразований проективной квадрики  $S$  изоморфна проективизации  $PO(n, 1)$  ортогональной группы квадратичной формы (23-19). Эта группа называется *сферической мёбиусовой группой*  $(n-1)$ -мерной сферы и обозначается  $M(S^{n-1})$ .

Согласно предл. 23.4, сферическая мёбиусова группа  $M(S^{n-1})$  изоморфна группе преобразований пополненного евклидова пространства  $\widehat{\mathbb{R}}^{n-1}$ , порождённой отражениями в сферах и гиперплоскостях. Эта группа называется *несобственной мёбиусовой группой* евклидова пространства  $\mathbb{R}^{n-1}$  и обозначается  $M(\mathbb{R}^{n-1})$  или просто  $M_{n-1}$ . Её подгруппа  $SM_{n-1} \subset M_{n-1}$ , состоящая из всех преобразований, сохраняющих ориентацию пространства  $\mathbb{R}^{n-1}$ , называется *собственной мёбиусовой группой* или просто *группой Мёбиуса* пространства  $\mathbb{R}^{n-1}$ .

Упражнение 23.14. Убедитесь, что композиция  $\sigma_{r_2, c} \circ \sigma_{r_1, c}$  отражений в двух концентрических сферах является гомотетией с центром  $c$  и коэффициентом  $r_2^2 / r_1^2$ .

Так как параллельные переносы и повороты являются композициями отражений в гиперплоскостях, мы заключаем, что мёбиусова группа  $M_n$  евклидова пространства  $\mathbb{R}^n$  содержит все движения и подобия.

## Ответы и указания к некоторым упражнениям

Упр. 0.1. См. [предл. 1.2](#) на стр. 20.

Упр. 1.1. Равенство  $F(0) = 0$  получается прибавлением вектора  $-F(0)$  к левой и правой части равенства  $F(0) = F(0 + 0) = F(0) + F(0)$ . Из равенства  $0 = F(0) = F(v + (-v)) = F(v) + F(-v)$  вытекает, что  $-F(v) = F(-v)$ .

Упр. 1.4. Ответ:  $v = y_1 w_1 + y_2 w_2$ , где  $y_1 = c_{11}x_1 + c_{12}x_2$ ,  $y_2 = c_{21}x_1 + c_{22}x_2$ .

Упр. 1.5. Первое следует из выкладки  $0 = f(a + b, a + b) = f(a, b) + f(b, a)$ , второе — из выкладки  $f(v, v) = -f(v, v)$ .

Упр. 1.6. Первое следует из того, что по правилу треугольника  $\overline{aa} + \overline{ab} = \overline{ab}$  для любого вектора  $\overline{ab} \in V$ , второе — из того, что  $\overline{pq} + \overline{qp} = \overline{pp} = 0$ , третье — из того, что при  $\overline{ab} = \overline{dc}$  имеем  $\overline{bc} = \overline{ba} + \overline{ad} + \overline{dc} = -\overline{ab} + \overline{ad} + \overline{dc} = \overline{ad}$ .

Упр. 1.8. Первое утверждение проверяется выкладкой

$$(\mu + \nu)^{-1}(\mu p + \nu q) = (\mu + \nu)^{-1} \left( \sum_i \mu_i p_i + \sum_j \nu_j q_j \right).$$

Второе — выкладкой

$$\sum_{i=1}^m y_i p_i = \sum_{i=1}^m y_i \sum_{j=1}^{k_j} x_{ij} q_{ij} = \sum_{ij} z_{ij} q_{ij},$$

где  $z_{ij} = y_i x_{ij}$  и

$$\sum_{ij} z_{ij} = \sum_{i=1}^m y_i \sum_{j=1}^{k_j} x_{ij} = \sum_{i=1}^m y_i = 1.$$

Упр. 1.10.  $s(pab) : s(pbc) = s(\overline{pa}, \overline{pb}) : s(\overline{pb}, \overline{pc}) = s(\overline{pa} - \overline{pb}, \overline{pb}) : s(\overline{pb}, \overline{pc} - \overline{pb}) = s(\overline{ba}, \overline{pb}) : s(\overline{pb}, \overline{bc}) = s(\overline{pb}, \overline{ab}) : s(\overline{pb}, \overline{pc}) = \overline{ab} : \overline{bc}$ .

Упр. 2.2. Рассмотрите в координатном пространстве  $\mathbb{k}^2$  с базисом  $(e_1, e_2)$  пару векторов  $(f_1, f_2) = (e_1, e_2)A$  и пару векторов  $(g_1, g_2) = (f_1, f_2)B = (e_1, e_2)AB$ . Тогда по [сл. 1.2](#) для любой ненулевой формы площади  $s$  на  $V$  выполняются равенства

$$s(f_1, f_2) = s(e_1, e_2) \det A, \quad s(g_1, g_2) = s(f_1, f_2) \det B, \quad s(g_1, g_2) = s(e_1, e_2) \det(AB),$$

из которых вытекает, что  $\det(A) \det(B) = \det(AB)$ .

Упр. 2.3. Все площади умножаются на  $\det A$ , ср. с [предл. 2.4](#) на стр. 27.

Упр. 2.4. Условие  $\overline{op_3} = \overline{op_1} + \overline{op_2}$  означает, что четырёхугольник  $op_1p_3p_2$  является параллелограммом, т. е. прямые  $(p_1p_3)$  и  $(p_2p_3)$  параллельны прямой  $\ell_2 = (op_2p_3)$  и  $\ell_1 = (op_1)$  соответственно. Но для любой точки  $p_1 \in \ell_1$  имеется единственная проходящая через  $p_1$  прямая, параллельная прямой  $\ell_2$ , и она пересекает прямую  $\ell_3$  в единственной точке  $p_3$ . Через точку  $p_3$  проходит единственная прямая, параллельная прямой  $\ell_1$ , и она пересекает прямую  $\ell_2$  в единственной точке  $p_2$ . Таким образом, параллелограмм  $op_1p_3p_2$  однозначно определяется выбором точки  $p_1 \in \ell_1$ . При выборе другой точки  $p'_1$  с радиус-вектором  $\overline{op'_1} = \lambda \overline{op_1}$  определяемый ею параллелограмм  $op'_1p'_3p'_2$  получается из параллелограмма  $op_1p_3p_2$  гомотетией с коэффициентом  $\lambda$  относительно точки  $o$ .

Упр. 2.5. При замене функции  $s$  на  $\lambda s$  или любого из векторов  $\overrightarrow{op}_i$  на  $\lambda \overrightarrow{op}_i$ , где  $\lambda \neq 0$ , коэффициент  $\lambda$  сократится. Неизменность двойного отношения при одновременной перестановке двух пар прямых видна непосредственно из формулы форм. (2-9) на стр. 29.

Упр. 2.6. Прямо из определения двойного отношения вытекает равенство

$$[\ell_1, \ell_2, \ell_3, \ell_4] = \frac{1}{[\ell_2, \ell_1, \ell_3, \ell_4]},$$

из которого всё и следует.

Упр. 2.7. Это следует из равенства  $q + w = \varphi(q) = p + u + D_\varphi(\overrightarrow{pq})$ .

Упр. 2.8. Вычитая  $\psi(0)$  из правой и левой части равенства  $\psi(0) = \psi(0+0) = \psi(0)+\psi(0)$ , получаем  $0 = \psi(0)$ . Поскольку  $\psi(\mu) + \psi(-\mu) = \psi(\mu - \mu) = \psi(0) = 0$ , имеет место равенство  $\psi(-\mu) = -\psi(\mu)$ . Поэтому  $\psi(\lambda - \mu) = \psi(\lambda) + \psi(-\mu) = \psi(\lambda) - \psi(\mu)$ . Если  $\psi(1) \neq 0$ , то аналогичным образом умножая на  $\psi(1)^{-1}$  обе части равенства  $\psi(1) = \psi(1 \cdot 1) = \psi(1) \cdot \psi(1)$  получаем  $\psi(1) = 1$ , откуда, как и выше,  $\psi(\mu^{-1}) = \psi(\mu)^{-1}$  и  $\psi(\lambda/\mu) = \psi(\lambda)/\psi(\mu)$  при всех  $\lambda$  и  $\mu \neq 0$ . Если же  $\psi(1) = 0$ , то  $\psi(\lambda) = \psi(1 \cdot \lambda) = \psi(1) \cdot \psi(\lambda) = 0$  для всех  $\lambda$ .

Упр. 2.10. Обратным к  $x + y\sqrt{2}$  числом является  $\frac{x}{x^2-2y^2} - \frac{y}{x^2-2y^2}\sqrt{2}$ , нетривиальный автоморфизм переводит  $x + y\sqrt{2}$  в  $x - y\sqrt{2}$ .

Упр. 3.2.  $\frac{(\lambda a, b)}{(\lambda a, \lambda a)} \cdot \lambda a = \frac{(a, b)}{(a, a)} \cdot a$ .

Упр. 3.5. Если  $p \notin \ell$ , утверждение вытекает из предл. 3.2. Если  $p \in \ell$ , выберите  $p$  за начало отсчёта, обозначьте через  $e_1$  вектор скорости прямой  $\ell$ , возьмите любой вектор  $b$ , не пропорциональный  $\ell$  и положите  $e_2 = b_{e_1^\perp}$ . Тогда  $e_2 \neq 0$  и перпендикулярен  $e_1$ . Поэтому прямая  $p + te_2$  перпендикулярна  $\ell$ . Произвольный вектор  $w = xe_1 + ye_2$  перпендикулярен  $e_1$  если и только если  $x = 0$ . Поэтому такая прямая единственна.

Упр. 3.6. Рассмотрим любой ортонормальный базис  $e, e^\perp$ . Если  $f = xe + ye^\perp$  образует вместе с  $e$  ортонормальный базис, то  $(e, f) = 0$  влечёт  $x = 0$ , после чего  $(f, f) = 1$  влечёт  $y^2 = 1$ , т. е.  $f = \pm e^\perp$ .

Упр. 3.7. Воспользуйтесь тем, что объединение биссектрис это ГМТ, равноудалённых от двух данных прямых.

Упр. 3.8. Неравенство Коши – Буняковского – Шварца равносильно неравенству

$$(u, v)^2 - (u, u) \cdot (u, v) \geq 0,$$

в левой части которого стоит определитель Грама, по предл. 3.4 равный квадрату отношения площадей  $s(u, w)/s(e_1, e_2)$ , положительному, когда  $u$  и  $w$  не пропорциональны, и нулевому — когда пропорциональны.

Упр. 3.9.  $\det^2(a, b) = \det^2(a, b_a + b_{a^\perp}) = \det^2(a, b_{a^\perp}) = (a, a) \cdot (b_{a^\perp}, b_{a^\perp})$ .

Упр. 3.10. Вычислите  $\det(f, f^\perp)$  ( $f^\perp, f^\perp$ ) и  $s(f, f^\perp)$ .

Упр. 3.12. Так как  $(v, v) = (u, u)$ , имеем равенство углов  $\sphericalangle(v, u + v) = \sphericalangle(u + v, u)$ . Тем самым, оба этих угла составляют половину от  $\sphericalangle(v, u)$ , см. рис. 3.8 на стр. 41. Аналогично,  $2\sphericalangle(v, w + v) = \sphericalangle(v, w)$ , откуда  $2\sphericalangle(u + v, w + v) = \sphericalangle(v, w)$ .

Упр. 3.17. Оба линейных преобразования — композиция отражений и поворот — одинаково действуют на базис  $u_1, u_2$ .

Упр. 3.18. Ответ:  $\frac{|u|}{2} \cdot (1, \text{ctg}(\vartheta/2))$ .

- Упр. 3.19. Выясните, куда переходит аффинный репер  $(o; v, n)$  с началом в произвольной точке  $o \in \ell$  и ортонормальными базисными векторами  $v, n$ , направленными, соответственно, параллельно и перпендикулярно прямым  $\ell_i$ .
- Упр. 3.20. Импликации  $(в) \Rightarrow (б) \Rightarrow (а)$  очевидны. В н° 2.4.1 на стр. 32 мы видели, что если отображение  $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  перестановочно со сложением и умножением, то оно тождественно. Поэтому  $(а) \Leftrightarrow (б)$ . Так как соотношение  $\varphi(i)^2 = \varphi(i^2) = \varphi(-1) = -1$  влечёт  $\varphi(i) = \pm i$ , из линейности  $\varphi$  над  $\mathbb{R}$  вытекает, что  $\varphi(x + yi) = x\varphi(1) + y\varphi(i) = x \pm iy$ , т. е.  $(б) \Rightarrow (в)$ .
- Упр. 4.1. См. стр. 28 лекции <http://gorod.bogomolov-lab.ru/ps/stud/algebra-1/1314/lec-02.pdf>.
- Упр. 4.4. Пусть  $\mathbb{k}^n = U_1 \cup U_2 \cup \dots \cup U_m$ , где гиперплоскость  $U = \text{Ann } \xi_i \subset \mathbb{k}^n$  задаётся линейным уравнением  $\xi_i(x_1, x_2, \dots, x_n) = \xi_{i1}x_1 + \xi_{i2}x_2 + \dots + \xi_{in}x_n = 0$ . Произведение всех линейных форм  $\xi_i(x_1, x_2, \dots, x_n)$  является ненулевым многочленом  $m$ -й степени от  $x_1, x_2, \dots, x_n$ , но при этом задаёт тождественно нулевую функцию  $\mathbb{k}^n \rightarrow \mathbb{k}$ . Индукцией по  $n$  покажите, что над бесконечным такое невозможно (см. упр. 8.6 на стр. 106).
- Упр. 4.5. Пусть  $W \not\subset U$  два подпространства в  $V$ . Выберем вектор  $w \in W \setminus U$ . Если  $W \cup U$  — подпространство, то  $\forall u \in U \ w + u \in W \cup U$ . Поскольку  $w + u \notin U$  (т. к.  $w \notin U$ ),  $w + u \in W$ , откуда  $u \in W$ , т. е.  $U \subset W$ .
- Упр. 4.8. Поскольку  $\lambda_1 F(v_1) + \lambda_2 F(v_2) = F(\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2)$ , любая линейная комбинация векторов из образа лежит в образе, а векторов из ядра — в ядре. Так как  $F(\vec{0}) = F(0 \cdot \vec{0}) = 0 \cdot F(\vec{0}) = 0$ , ядро содержит нулевой вектор. Образ содержит нулевой вектор, поскольку  $F(0) = F(0 + 0) = F(0) + F(0)$ , откуда  $0 = F(0)$ .
- Упр. 4.9. Линейность  $F$  вытекает из того, что отображение дифференцирования  $d/dx : f \mapsto f'$  линейно. Если  $g \in \ker F$ , то каждое число  $a_i \in \mathbb{k}$  является как минимум  $(m_i + 1)$ -кратным корнем многочлена  $g$ , и  $g$  делится на  $\prod_i (x - a_i)^{m_i+1}$ , что невозможно при  $g \neq 0$ , поскольку степень этого произведения равна  $m + 1 > \deg g$ .
- Упр. 4.10. Если  $F^2 = F$ , то для любого вектора  $v \in V$  вектор  $v - F(v) \in \ker F$ , ибо  $F(v - F(v)) = F(v) - F^2(v) = 0$ . Тем самым  $\text{im } F + \ker F = V$ . Если  $v = F(w) \in \ker F \cap \text{im } F$ , то  $v = F(w) = F^2(w) = F(v) = 0$ . Тем самым,  $V = \ker F \oplus \text{im } F$ . Предыдущая выкладка показывает, что  $F$  тождественно действует на  $\text{im } F$ . Тем самым,  $F(u + w) = w$  для любых  $u \in \ker F, w \in \text{im } F$ .
- Упр. 4.12. Если  $v_1 = v_2 + u$  и  $w_1 = w_2 + u'$ , где  $u, u' \in U$ , то  $v_1 + w_1 = (v_2 + w_2) + (u + u')$  и  $\lambda v_1 = \lambda v_2 + \lambda u$ . Выполнение аксиом векторного пространства наследуется из  $V$ .
- Упр. 5.3. Первое равенство очевидно. Для доказательства второго положим  $AB = C, B^t A^t = D$ , тогда  $c_{ij} = \sum_k a_{ik} b_{kj} = \sum_k a_{ki}^t b_{jk}^t = \sum_k b_{jk}^t a_{ki}^t = d_{ji}$ .
- Упр. 5.5. Поскольку  $(AB)^t = B^t A^t$ , матрица  $B$  обратна матрице  $A$  если и только если матрица  $B^t$  обратна матрице  $A^t$ .
- Упр. 5.7. Первое доказывается выкладкой  $0 \cdot a = (b + (-1) \cdot b)a = ba + (-1)ba = 0$ , второе — выкладкой  $e' = e' \cdot e'' = e''$ .
- Упр. 5.8. Матрица  $A = \sum_{ij} a_{ij} E_{ij}$  лежит в центре алгебры  $\text{Mat}_n(\mathbb{k})$  если и только если  $AE_{ij} = E_{ij}A$  для всех матричных единиц  $E_{ij}$ . В силу форм. (5-13) на стр. 71 это равносильно равенствам  $a_{ii} = a_{jj}$  и  $a_{ij} = 0$  для всех  $i \neq j$ .
- Упр. 5.9. Обозначим через  $\mu_\xi \in \ker \text{ev}_\xi$  какой-нибудь многочлен наименьшей (из числа имеющих в  $\ker \text{ev}_\xi$ ) положительной степени со старшим коэффициентом 1. Деля произвольный многочлен  $f \in \ker \text{ev}_\xi$  на  $\mu_\xi$  с остатком, получаем равенство  $f(x) = \mu_\xi(x) \cdot q(x) + r(x)$ , в

котором многочлен  $r$  либо нулевой, либо не лежит в  $\ker \text{ev}_\xi$ , так имеет  $\deg r < \deg \mu_\xi$ . Подставляя в это равенство  $x = \xi$ , убеждаемся, что имеет место первое. Тем самым, все многочлены  $f \in \ker \text{ev}_\xi$  делятся на  $\mu_\xi$ . В частности, любой многочлен наименьшей (из числа имеющихся в  $\ker \text{ev}_\xi$ ) положительной степени со старшим коэффициентом 1 совпадает с  $\mu_\xi$ .

Упр. 5.12. Так как  $\det(FG) = \det F \cdot \det G$ , беря определители обеих частей равенства  $AA^{-1} = E$ , заключаем, что  $\det A \cdot \det A^{-1} = 1$ , т. е.  $\det A$  обратим. Наоборот, если  $\det A$  обратим, то форм. (5-8) на стр. 66 выдаёт обратную к  $A$  матрицу, что проверяется прямым вычислением.

Упр. 5.13. Из равенства

$$\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ax + bz & ay + bw \\ dz & dw \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

вытекает, что  $dw = 1$  и  $dz = 0$ . Тем самым,  $d$  обратим,  $w = d^{-1}$ ,  $z = 0$ , и равенство  $ax + bz = 1$  превращается в  $ax = 1$ , откуда  $a$  обратим и  $x = a^{-1}$ . Это позволяет переписать равенство  $ay + bw = 0$  как  $ay + bd^{-1} = 0$ , откуда  $y = -a^{-1}bd^{-1}$ . Таким образом,

$$\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & d \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} a^{-1} & -a^{-1}bd^{-1} \\ 0 & d^{-1} \end{pmatrix}.$$

Остальные три случая разбираются аналогично, либо при помощи соотношений типа

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b & a \\ 0 & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Упр. 6.1. Если матрица координат векторов  $u_1, \dots, u_r$  содержит единичную  $r \times r$  матрицу в столбцах с номерами  $j_1, \dots, j_r$ , то при  $j_i$ -я координата вектора  $\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 + \dots + \lambda_r u_r$  равна  $\lambda_i$  на каждом  $i = 1, \dots, r$ . Поэтому такой вектор зануляется только когда все  $\lambda_i = 0$ .

Упр. 6.2. Если  $ad - bc \neq 0$ , то согласно форм. (5-8) на стр. 66 матрица

$$\begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix} = (ad - bc)^{-1} \begin{pmatrix} a & -b \\ -c & d \end{pmatrix}$$

является обратной к матрице  $\begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix}$ , и исходные строки  $w_i, w_j$  линейно выражаются через преобразованные строки  $w'_i = aw_i + bw_j, w'_j = cw_i + dw_j$  по формулам  $w_i = a'w'_i + b'w'_j, w_j = c'w'_i + d'w'_j$ .

Упр. 6.6. Так как  $\dim V_{>(k-1)} - \dim V_{>k} = 1$  и  $\dim(U + V_{>(k-1)}) \geq \dim(U + V_{>k})$ , имеем

$$\begin{aligned} \dim(U \cap V_{>(k-1)}) - \dim(U \cap V_{>k}) &= \dim U + \dim V_{>(k-1)} - \dim(U + V_{>(k-1)}) - \\ &\quad - \dim U - \dim V_{>k} + \dim(U + V_{>k}) \leq 1. \end{aligned}$$

Упр. 6.7. Если отнять из произвольной такой матрицы матрицу  $E_j$ , имеющую единичную  $r \times r$  подматрицу в столбцах с номерами  $j_1, \dots, j_r$  и нули в остальных местах, то получится матрица, у которой равны нулю все элементы в столбцах с номерами  $j_1, \dots, j_r$ , а также, при каждом  $i = 1, \dots, r$ , все элементы  $i$ -й строки в клетках с 1-й по  $j_i$ -ю включительно. Ну а остальные

$r^2 + \sum_{v=1}^r (i_v - v + 1)$  элементов могут принимать любые значения. Тожество выражает собою равенство количества  $r$ -мерных векторных подпространств в  $n$ -мерном координатном пространстве над полем  $\mathbb{F}_q$  из  $q$  элементов количеству приведённых ступенчатых матриц с  $r$  ненулевыми строками в  $\text{Mat}_{r \times n}(\mathbb{F}_q)$ .

Упр. 7.2. Достаточно убедиться, что векторы  $v_1, v_2, \dots, v_n$  линейно независимы. Применяя к обеим частям соотношения  $\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \dots + \lambda_n v_n = 0$  функционал  $\xi_i$ , получаем  $\lambda_i = 0$ , и так для каждого  $i = 1, \dots, n$ .

Упр. 7.3. Ядро  $\ker \text{ev} = \{v \in V \mid \forall \varphi \in V^* \varphi(v) = 0\} = 0$ , поскольку для любого ненулевого вектора  $v \in V$  существует  $\text{pf}[\eta]$  линейный функционал  $\varphi : V \rightarrow \mathbb{k}$ , что  $\varphi(v) \neq 0$ . Например, можно дополнить вектор  $v$  до базиса пространства  $V$  и взять в качестве  $\varphi$  функционал, сопоставляющий вектору его координату в направлении базисного вектора  $v$  относительно этого базиса.

Упр. 7.4. Если линейная форма зануляется на каком-то множестве векторов, то она зануляется и всех линейных комбинациях этих векторов.

Упр. 7.6. Ковекторы  $w_1^*, \dots, w_m^*$  лежат в  $\text{Ann } U$  и линейно независимы, так как являются частью базиса в  $V^*$ . Поскольку координатами каждого линейного функционала  $\varphi \in V^*$  в базисе

$$u_1^*, \dots, u_k^*, w_1^*, \dots, w_m^*$$

являются значения  $\varphi(u_1), \dots, \varphi(u_k), \varphi(w_1), \dots, \varphi(w_m)$ , ковектор  $\varphi \in \text{Ann } U$  если и только если он является линейной комбинацией ковекторов  $w_1^*, \dots, w_m^*$ . Тем самым, эти ковекторы линейно порождают  $\text{Ann } U$ .

Упр. 7.7. По [упр. 7.4](#) на стр. 90  $\text{Ann } N = \text{Ann span } N$ , откуда  $\text{Ann Ann } N = \text{Ann Ann span } N = \text{span } N$ .

Упр. 7.9. Оператор  $F^{**} : U^{**} \rightarrow W^{**}$  переводит функционал вычисления  $\text{ev}_u : U^* \rightarrow \mathbb{k}$  в композицию  $\text{ev}_u \circ F^* : W^* \rightarrow \mathbb{k}$ , которая в свою очередь переводит ковектор  $\xi : W \rightarrow \mathbb{k}$  в число  $\text{ev}_u(F^*\xi) = F^*\xi(u) = \xi(Fu) = \text{ev}_{Fu}(\xi)$ . Таким образом,  $F^{**}(\text{ev}_v) = \text{ev}_{F(v)}$ . Отождествления  $U^{**} \simeq U$  и  $W^{**} \simeq W$  переводят функционалы вычисления  $\text{ev}_u : U^* \rightarrow \mathbb{k}$  и  $\text{ev}_w : W^* \rightarrow \mathbb{k}$  в векторы  $u \in U$  и  $w \in W$ , на которых эти вычисления производятся. Формула  $F^{**}(\text{ev}_v) = \text{ev}_{F(v)}$  утверждает, что при этом действие оператора  $F^{**}$  на функционалы вычисления превращается в действие  $F$  на векторы.

Упр. 7.12. Пусть множество  $S \subset X$  состоит из всех таких элементов  $z \in X$ , что утверждение  $\Phi(z)$  ложно. Если  $S \neq \emptyset$ , то в нём есть начальный элемент  $s_* \in S$ . Поскольку утверждение  $\Phi(y)$  истинно для всех  $y < s_*$ , утверждение  $\Psi(s_*)$  тоже истинно, т. е.  $s_* \notin S$ . Противоречие.

Упр. 7.13. Обозначим через  $x_I$  начальный элемент дополнения  $X \setminus I$ . Начальный интервал  $[x_I) \subset X$  является объединением начальных интервалов  $[y) \subset X$  по всем  $y < x$ . Если  $I$  содержит все интервалы  $[y)$  с  $y < x_I$ , то  $I \supseteq [x_I)$ , откуда  $I = [x_I)$ .

Упр. 7.14. Рассмотрим подмножество  $Z \subseteq W_1$ , состоящее из всех таких  $z \in W_1$ , что начальный интервал  $[z)_1$  в множестве  $W_1$  является одновременно начальным интервалом  $[z)_2$  множества  $W_2$ . Множество  $Z$  не пусто, поскольку содержит общий начальный элемент множеств  $W_1$  и  $W_2$ . Если  $Z \subsetneq W_1$  и  $Z \subsetneq W_2$ , то по [упр. 7.13](#) на стр. 95 подмножество  $Z$  является начальным интервалом как в  $W_1$ , так и в  $W_2$ , что невозможно, поскольку точные верхние границы этих интервалов в  $W_1$  и  $W_2$ , с одной стороны, не лежат в  $Z$  и, стало быть, различны, а с другой стороны в силу  $\varrho$ -рекурсивности множеств  $W_1$  и  $W_2$  обе они равны  $\varrho(Z)$ , то есть совпадают. Тем самым,  $Z = W_1$  или  $Z = W_2$ . По [упр. 7.13](#) в первом случае  $W_1$  является начальным интервалом в  $W_2$ , а во втором —  $W_2$  является начальным интервалом в  $W_1$ .



Упр. 7.15. Каждое подмножество  $S \subset U$  имеет непустое пересечение с каким-нибудь  $\varrho$ -рекурсивным вполне упорядоченным подмножеством  $W \subset P$  с начальным элементом  $\varrho(\emptyset)$ . По упр. 7.14 подмножество  $W$  является начальным интервалом всех содержащих  $W$   $\varrho$ -рекурсивных вполне упорядоченных подмножеств с начальным элементом  $\varrho(\emptyset)$ . Поэтому начальный элемент пересечения  $S \cap W$  не зависит от выбора  $W$  с  $W \cap S \neq \emptyset$  и является начальным элементом подмножества  $S$ . Каждый начальный интервал  $[u) \subset U$  является начальным интервалом любого содержащего  $u$  множества  $W$  из цепи. В силу  $\varrho$ -рекурсивности  $W$  элемент  $\varrho[u) = u$ .

Упр. 7.16. Годится дословно то же рассуждение, что и в доказательстве лем. 4.1 на стр. 51.

Упр. 7.17. Очевидно, что  $E$  вкладывается в  $B_E$ , а  $B_E$  вкладывается в дизъюнктивное объединение

$$\bigsqcup_{n \geq 1} \underbrace{E \sqcup \dots \sqcup E}_n$$

счётного множества копий множества  $E$ , которое в силу того, что множество  $E$  бесконечно, равномощно  $E$ . Тем самым,  $B_E$  вкладывается в  $E$ . Остаётся применить теорему Кантора – Бернштейна.

Упр. 7.18. Линейное отображение  $G$  действует на каждый вектор  $v = \sum_{e \in E} x_e e$  по правилу  $G(v) = \sum_{e \in E} x_e g(e)$ , и для любого отображения множеств  $g : E \rightarrow W$  это правило задаёт линейное отображение  $G : V \rightarrow W$ .

Упр. 8.2.  $\max \ell(g) = n(n - 1)/2$  достигается на единственной перестановке  $(n, n - 1, \dots, 1)$ .

Упр. 8.3. Индукция по  $n$ . Каждая перестановка  $g = (g_1, g_2, \dots, g_n)$  является композицией  $g = \sigma \circ g'$  транспозиции  $\sigma$ , переставляющей между собою элементы  $n$  и  $g_n$  множества  $\{1, 2, \dots, n\}$ , и перестановки  $g' = \sigma \circ g$ , оставляющей на месте элемент  $n$ . По индукции,  $g'$  раскладывается в композицию транспозиций, не затрагивающих элемента  $n$ .

Упр. 8.5. Если все точки пересечения двойные и трансверсальные, две нити, выходящие из элементов  $i$  и  $j$  пересекаются между собою нечётное число раз если и только если  $(i, j)$  инверсна<sup>1</sup>. Знак тасующей перестановки  $(i_1, i_2, \dots, i_k, j_1, j_2, \dots, j_m)$  равен  $(-1)^{|I| + \frac{1}{2}k(k+1)}$ , где  $\text{вес } |I| \stackrel{\text{def}}{=} \sum_v i_v$ . Действительно, нити, выходящие из чисел  $i_1, i_2, \dots, i_k$  верхней строчки не пересекаются между собою и пересекают, соответственно,  $i_1 - 1, i_2 - 2, \dots, i_k - k$  начинающихся левее нитей, выходящих из  $j$ -точек и тоже между собою не пересекающихся.

Упр. 8.6. При  $m = 1$  ненулевой многочлен  $f(x_1) \in \mathbb{k}[x_1]$  имеет не более  $\deg f$  корней и, тем самым, не обращается в нуль почти во всех точках бесконечной прямой  $\mathbb{k}^1$ . При  $m > 1$  перепишите многочлен  $f(x_1, \dots, x_m)$  в виде многочлена от  $x_m$  с коэффициентами из  $\mathbb{k}[x_1, \dots, x_{m-1}]$  и примените индукцию по  $m$ .

Упр. 8.7. Так как разность двух многочленов является непрерывной функцией, из того, что она обращается в нуль на всюду плотном подмножестве, вытекает, что она равна нулю всюду, а поскольку поле  $\mathbb{R}$  бесконечно, многочлен от  $n^2$  переменных, принимающий нулевые значения во всех точках аффинного пространства  $\mathbb{R}^{n^2}$ , является нулевым многочленом<sup>2</sup>. Всюду плотность множества  $\mathcal{D}(f)$  означает, что в любой  $\varepsilon$ -окрестности<sup>3</sup> каждой точки  $p \in \mathbb{R}^m$  найдётся точка  $r \neq p$ , в которой  $f(r) \neq 0$ . Так как многочлен  $f$  ненулевой, имеется точка  $q \in \mathbb{R}^m$  с  $f(q) \neq 0$ .

<sup>1</sup>В действительности картинку всегда можно нарисовать так, чтобы в этом случае была ровно одна точка пересечения.

<sup>2</sup>См. упр. 8.6 на стр. 106.

<sup>3</sup>Под  $\varepsilon$ -окрестностью точки  $p \in \mathbb{R}^m$  мы понимаем  $m$ -мерный куб с центром в точке  $p$  и стороной  $2\varepsilon$ .

Ограничение  $f$  на прямую  $(pq)$ , будучи ненулевым многочленом от одной переменной, обращается в нуль лишь в конечном числе точек.

Упр. 9.1. Равенство  $P_k^n = \binom{n+k-1}{n}$  доказывается индукцией по  $n$  при помощи суммирования по треугольнику Паскаля. Предел отношения  $\binom{n+k-1}{n}/k^n$  при фиксированной размерности  $n$  и  $k \rightarrow \infty$  равен  $1/n!$ .

Упр. 9.3. При чётном  $n$  центр алгебры  $\mathbb{k}\langle \xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n \rangle$  линейно порождается мономами чётных степеней, при нечётном  $n$  — мономами чётных степеней и старшим мономом  $\xi_1 \wedge \xi_2 \wedge \dots \wedge \xi_n$ , степень которого нечётна.

Упр. 9.4. Разложите определитель по первым  $n$  столбцам.

Упр. 9.5. Это сразу следует из равенства  $\det A = \det A^t$ .

Упр. 9.6. Если  $A_{12} \neq 0$ , то можно взять

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -A_{23}/A_{12} & -A_{24}/A_{12} \\ 0 & A_{12} & A_{13} & A_{14} \end{pmatrix}.$$

Равенство

$$A_{34} = \det \begin{pmatrix} -A_{23}/A_{12} & -A_{24}/A_{12} \\ A_{13} & A_{14} \end{pmatrix}$$

эквивалентно квадратичному соотношению Пюккера<sup>1</sup>.

Упр. 10.1. Если отождествить  $\mathbb{R}[t]/(t^2 + 1)$  с полем  $\mathbb{C}$ , отправив классы  $[1]$  и  $[t]$  в  $1$  и  $i$  соответственно, умножение на класс  $[t]$  превратится в умножение на  $i$ , т. е. в поворот на угол  $\pi/2$ , у которого нет инвариантных прямых.

Упр. 10.2. Пусть  $\mathbb{k}[t]/(t^n) = U \oplus W$ , где  $U$  и  $W$  переводятся в себя умножением на  $[t]$ . Оба этих подпространства не могут целиком содержаться в образе оператора умножения на  $[t]$ , так как иначе их сумма тоже бы в нём содержалась. Поэтому в одном из них, пусть это будет  $U$ , имеется класс  $[g]$  многочлена  $g$  с ненулевым свободным членом. Тогда классы  $[t^{n-1}g], \dots, [tg], [g] \in U$  выражаются через базис  $[1], [t], \dots, [t^{n-1}]$  пространства  $\mathbb{k}[t]/(t^n)$  при помощи верхнетреугольной матрицы, на диагонали которой всюду стоит ненулевой свободный член многочлена  $g$ . Следовательно, эти классы тоже образуют базис в  $\mathbb{k}[t]/(t^n)$ , и значит, содержащее их подпространство  $U$  совпадает со всем пространством  $\mathbb{k}[t]/(t^n)$ .

Упр. 10.3. Если  $V = U \oplus W$ , где  $U$  и  $W$   $F$ -инвариантны, то  $V^* = \text{Ann } U \oplus \text{Ann } W$ , где оба подпространства  $\text{Ann } U, \text{Ann } W$  тоже  $F^*$ -инвариантны: если  $\xi \in \text{Ann } U$ , то для всех  $u \in U$

$$\langle F^* \xi, u \rangle = \langle \xi, Fu \rangle = 0,$$

так как  $Fu \in U$ , и значит,  $F^* \xi \in \text{Ann } U$ . Обратная импликация получается по двойственности в силу изоморфизма  $V^{**} = V$ .

Упр. 10.4. Пусть  $f = t^n + a_1 t^{n-1} + \dots + a_{n-1} t + a_n$ . Напишите матрицу  $F$  оператора умножения на  $t$  в фактор кольце  $\mathbb{k}[x]/(f)$  в базисе из классов мономов  $t^{n-1}, t^{n-2}, \dots, t, 1$  и разложите  $\det(tE - F)$  по первому столбцу.

Упр. 10.5. Пусть  $f(F) = 0$ . Разделим  $f$  в  $\mathbb{k}[t]$  на  $\mu_F$  с остатком:  $f(t) = q(t)\mu_F(t) + r(t)$ , где либо  $r = 0$ , либо  $\deg r < \deg \mu_F$ . Подставляя в это равенство  $t = F$ , заключаем, что  $r(F) = 0$ , откуда либо  $\deg r \geq \deg \mu_F$  по определению  $\mu_F$ , либо  $r = 0$ . Следовательно,  $f$  делится на  $\mu_F$ . Если  $\nu_F$  —

<sup>1</sup>См. формулу (9-14) на стр. 118.

другой многочлен минимальной степени со старшим коэффициентом 1, такой что  $\nu_F(F) = 0$  в  $\text{End}(V)$ , то по уже доказанному  $\nu_F$  делится на  $\mu_F$ , и частное имеет степень нуль, т. к.  $\deg \mu_F = \deg \nu_F$ . Поскольку старшие коэффициенты у  $\mu_F$  и  $\nu_F$  одинаковы, константа  $\mu_F/\nu_F = 1$ .

Упр. 10.7. Умножение на класс  $t$  в факторе  $\mathbb{k}[t]/(t^n)$  с  $n \geq 2$ .

Упр. 10.8. Над алгебраически замкнутым полем каждый многочлен, у которого нет ненулевых корней, имеет вид  $t^m$ . Поэтому  $\chi_F(t) = t^m$ , и по теореме Гамильтона – Кэли  $F^m = 0$ .

Упр. 10.10. Модифицируйте доказательство предл. 4.9 на стр. 62.

Упр. 10.11. Для любого линейного оператора  $G : V \rightarrow V$  подпространства

$$0 \subseteq \ker F \subseteq \ker F^2 \subseteq \ker F^3 \subseteq \dots$$

образуют вложенную цепочку и отличны от нуля если и только если  $\ker G \neq 0$ .

Упр. 10.12. Если  $a^n = 0$ ,  $b^m = 0$  и  $ab = ba$ , то  $(a - b)^{m+n-1} = 0$  по формуле Ньютона.

Упр. 11.4. Значение линейной формы  $g_{v_j}$  на базисном векторе  $v_i$  равно  $(v_i, v_j)$ , т. е. столбец координат этой формы в двойственном базисе  $\mathbf{v}^*$  состоит из произведений  $(v_i, v_j)$ .

Упр. 11.6. Запишите все векторы строками их координат в базисе  $\mathbf{e}$  и разложите

$$\det(u, v_1, \dots, v_{n-1}) = \omega(u, v_1, \dots, v_{n-1})$$

по первой строке  $u$ .

Упр. 12.1. Ортогональный оператор  $F$  переводит базисный вектор  $e$  в вектор  $Fe = \lambda e$   $\lambda \in \mathbb{R}$ , и

$$(e, e) = (Fe, Fe) = \lambda^2 = (e, e),$$

откуда  $\lambda = \pm 1$ .

Упр. 12.2. Так как  $(a + b, a - b) = (a, a) - (b, b) = 0$ , вектор  $(a + b)/2 \in (a - b)^\perp$ . Поскольку

$$a = \frac{a + b}{2} + \frac{a - b}{2} \quad \text{и} \quad b = \frac{a + b}{2} - \frac{a - b}{2}, \tag{23-20}$$

для любого вектора  $w \in (a - b)^\perp$  выполняются равенства  $(w, a) = (w, (a + b)/2) = (w, b)$ . Поэтому векторы  $a$  и  $b$  ортогонально проектируются на гиперплоскость  $(a - b)^\perp$  в один и тот же вектор  $(a + b)/2$ , а равенства (23-20) дают ортогональные разложения векторов  $a$  и  $b$  в сумме  $V = (a - b)^\perp \oplus \mathbb{R} \cdot (a - b)$ .

Упр. 12.3. Рассматриваемый поворот плоскости  $U$  является композицией отражений относительно прямых  $u_1^\perp \cap U$  и  $u_2^\perp \cap U$ .

Упр. 12.4. Если  $Fu = \lambda u$  для ненулевого вектора  $u$ , то из равенства  $(Fu, u) = -(u, Fu)$  вытекает равенство  $2\lambda \cdot (u, u) = 0$ , возможное только при  $\lambda = 0$ .

Упр. 12.6.  $(u+v, u+v) = (u, u) + 2(u, v) + o(|u|)$ ,  $(F(u+v), F(u+v)) = (Fu, Fu) + 2(Fu, Fv) + o(|u|)$ .

Упр. 12.7. Так как оператор  $FF^\times$  самосопряжён и биективен, все его собственные числа строго положительны. Поэтому имеется единственный самосопряжённый оператор  $S$  с положительными собственными значениями, квадрат которого равен  $FF^\times$ . Тогда  $F = SR$ , где  $R = S^{-1}F$  ортогонален, поскольку  $R^\times R = R^\times S^{-2}F = F^\times (FF^\times)^{-1}F = \text{Id}_V$ .

<sup>1</sup>Так как  $S$  и  $S^2$  диагонализуются в одном базисе, оператор  $S$  обязан действовать на каждом собственном подпространстве  $V_\lambda$  оператора  $S^2$  умножением на положительный  $\sqrt{\lambda}$ .

Упр. 13.6. Четырёхгранный конус в  $\mathbb{R}^3$ , порождённый векторами

$$v_1 = e_1 + e_2 + e_3, \quad v_2 = e_1 + e_2 - e_3, \quad v_3 = e_1 - e_2 - e_3, \quad v_4 = e_1 - e_2 + e_3,$$

не имеет двумерной грани, порождённой векторами  $v_1$  и  $v_3$ .

Упр. 13.7. Конус  $-\sigma_{R_F}^\vee = \{v \in V \mid \forall \psi \in \sigma_{R_F} \langle \psi, v \rangle \leq 0\}$ . Для любых  $v \in \sigma_R$  и  $\psi \in \sigma_R^\vee$  неравенство  $\langle \psi, v \rangle \leq 0$  равносильно равенству  $\langle \psi, v \rangle = 0$ . Поэтому  $\sigma \cap -\sigma_{R_F}^\vee = \sigma \cap H_\Gamma = \Gamma$ .

Упр. 13.8. Если  $w = e_0 + v \in M$ , то  $\bar{a}_i(w) = a_i(e_0) + \alpha_i(v) \geq 0$  при всех  $i$ , поэтому  $w \in \bar{M}$ , а с ним и  $[0, w) \subset \bar{M}$ . Наоборот, если  $w = \lambda e_0 + v \in \bar{M}$ , то при  $\lambda \neq 0$  из неравенств  $\bar{a}_i(w) = \lambda a_i(e_0) + \alpha_i(v) \geq 0$  вытекает, что точка  $[0, w) \cap U_\xi = \lambda^{-1}w = e_0 + \lambda^{-1}v \in M$ , а при  $\lambda = 0$  луч  $[0, v) \subset V$  является пределом при  $s \rightarrow +\infty$  пересекающих многогранник  $M$  лучей  $[0, w_s)$ , где  $w_s = w + sv$ , поскольку при всех  $s \geq 0$  точка  $w_s = w + sv \in M$ , коль скоро  $w \in M$  и  $\alpha_i(v) \geq 0$  при всех  $i$ , а луч  $[0, w_s]$  имеет при каждом  $s > 0$  ненулевой направляющий вектор  $v_s = s^{-1}w + v$ , стремящийся к  $v$  при  $s \rightarrow \infty$ . Для доказательства эквивалентности свойств (1)–(3) заметим, что если  $\alpha_i(v) < 0$  хотя бы для одного функционала  $\alpha_i$ , то для всех  $p \in A(V)$  при всех  $\lambda \gg 0$  выполняется неравенство  $a_i(p + \lambda v) = a_i(p) + \lambda \alpha_i(v) < 0$ , и ни одно из свойств (1)–(3) не имеет места. Напротив, если  $\alpha_i(v) \geq 0$  для всех  $i$ , то для любой точки  $p \in M$  при всех  $\lambda \geq 0$  выполняются неравенства  $a_i(p + \lambda v) = a_i(p) + \lambda \alpha_i(v) \geq a_i(p) \geq 0$ , а с ними и каждое из свойств (1)–(3).

Упр. 14.3. Линейная оболочка векторов  $e_\nu + i e_{n+\nu}$  с  $1 \leq \nu \leq n$ .

Упр. 14.4. Если матрица  $B \in \text{Mat}_n(\mathbb{k})$  кососимметрична, то при нечётном  $n$

$$\det B = \det B^t = \det(-B) = (-1)^n \det B = -\det B,$$

откуда  $\det B = 0$  если  $\text{char } \mathbb{k} \neq 2$ .

Упр. 14.5. Пусть  $v = \sum x_i e_i$ . Скалярно умножая  $v$  слева на  $\vee e_i$ , получаем  $\beta(\vee e_i, v) = x_i$ . Скалярно умножая  $v$  справа на  $e_i^\vee$ , получаем  $\beta(v, e_i^\vee) = x_i$ , и т. д.

Упр. 14.7. Поскольку над алгебраически замкнутым полем  $\mathbb{k}$  характеристический многочлен  $\chi_f(t)$  любого оператора  $f: V \rightarrow V$  полностью разлагается на взаимно простые множители  $(t - \lambda)^{m_\lambda}$ , где  $\lambda \in \text{Spec}(f)$ , пространство  $V$  распадается в прямую сумму  $f$ -инвариантных корневых подпространств<sup>1</sup>  $K_\lambda = \ker(f - \lambda \text{Id})^{m_\lambda}$ . Так как  $f$  биективен, все  $\lambda \neq 0$ . Для каждого  $\lambda$  обозначим через  $p_\lambda(t) \in \mathbb{k}[t]$  сумму первых  $m_\lambda$  членов формального разложения функции  $\sqrt{t}$  в точке  $\lambda$  по биномиальной формуле Ньютона<sup>2</sup>:

$$\begin{aligned} \sqrt{t} &= \sqrt{\lambda + (t - \lambda)} = \lambda^{1/2} \cdot (1 + \lambda^{-1/2}(t - \lambda))^{1/2} = \\ &= \lambda^{1/2} + \frac{1}{2}(t - \lambda) - \frac{\lambda^{-1/2}}{8}(t - \lambda)^2 + \frac{\lambda^{-1}}{16}(t - \lambda)^3 - \dots \end{aligned}$$

Тогда  $p_\lambda^2(t) \equiv t \pmod{(t - \lambda)^{m_\lambda}}$ . По китайской теореме об остатках существует многочлен  $p(t)$ , сравнимый с  $p_\lambda(t)$  по модулю  $(t - \lambda)^{m_\lambda}$  сразу для всех  $\lambda \in \text{Spec}(f)$ . Его квадрат

$$p^2(t) \equiv t \pmod{(t - \lambda)^{m_\lambda}} \quad \forall \lambda \in \text{Spec}(f).$$

<sup>1</sup>См. п.° 10.4 на стр. 127.

<sup>2</sup>Здесь мы пользуемся тем, что  $\text{char } \mathbb{k} = 0$ .

Поэтому квадрат оператора  $p(f)$  действует на каждом корневом подпространстве  $K_\lambda$  точно так же, как  $f$ . Тем самым,  $p^2(f) = f$ .

Упр. 15.5. Ненулевые квадраты составляют образ гомоморфизма мультипликативных групп

$$\mathbb{F}_q^* \rightarrow \mathbb{F}_q^*, \quad x \mapsto x^2.$$

Так как уравнение  $x^2 = 1$  имеет в поле  $\mathbb{F}_q$  ровно два корня  $x = \pm 1$ , ядро этого гомоморфизма состоит из двух элементов, а значит, образ является подгруппой порядка  $(q - 1)/2$ .

Упр. 15.6. Если оператор  $f$  самосопряжён, то  $\beta_f(u, w) = (u, fw) = (fu, w) = (w, fu) = \beta_f(w, u)$ .

Если билинейная форма  $\beta_f$  симметрична, то  $(fu, w) = (w, fu) = \beta_f(w, u) = \beta_f(u, w) = (u, fw)$

Упр. 15.7. Пусть  $w \in U^\perp$ , т. е.  $(u, w) = 0$  для всех  $u \in U$ . Тогда  $(u, fw) = (fu, w) = 0$  для всех  $u \in U$ , ибо  $fu \in U$ . Тем самым,  $fw \in U^\perp$ . Если  $fu = \lambda u$  и  $fw = \mu w$ , то из равенства  $(fu, w) = (u, fw)$  вытекает равенство  $(\lambda - \mu) \cdot (u, w) = 0$ .

Упр. 16.4. Перестановка одной пары с другой как единого целого чётная (это пара транспозиций).

Перестановка между собою элементов из  $\nu$ -й пары меняет знак  $\text{sgn}(i_1 j_1 i_2 j_2 \dots i_n j_n)$ , но одновременно заменяет матричный элемент  $a_{i_\nu j_\nu}$  элементом  $a_{j_\nu i_\nu} = -a_{i_\nu j_\nu}$ .

Упр. 16.8. Пусть  $\xi = \omega^\wedge(u')|_L$  и  $\eta = \omega^\wedge(w')|_L$  для некоторых  $u', w' \in L$ . Тогда  $\omega(u + u', w + w') = \omega(u, w') - \omega(w, u') = \eta(u) - \xi(w)$ , что и утверждается.

Упр. 17.2. В правой части стоит геометрическая прогрессия  $q^n + q^{n-1} + \dots + q + 1$ , а слева — количество ненулевых векторов в  $(n + 1)$ -мерном пространстве, делённое на количество ненулевых векторов в одномерном пространстве, т. е.  $(q^{n+1} - 1)/(q - 1)$ ; кто знает, может, именно поэтому полученная формула называется формулой суммирования геометрической прогрессии

Упр. 17.4. Это следует из соотношения  $(s : 1) = (x_0 : x_1) = (1 : t)$ .

Упр. 17.5. Если стягиваемая петля настолько мала, что почти не отличается от точки, устойчивое к малым шевелениям количество точек её пересечения с любой петлёй равно нулю. При изменении размеров петли устойчивые точки пересечения появляются и исчезают по две.

Упр. 17.7. Пусть  $K = \mathbb{P}(W)$ . Векторное подпространство  $W \subset V$  имеет размерность  $k + 1$  и либо содержится в гиперплоскости  $\text{Ann}(\xi)$ , либо пересекается с нею по  $k$ -мерному векторному пространству  $W' = \text{Ann}(\xi|_W) \subset W$ . В первом случае  $K$  не пересекается с картой  $U_\xi$ , во втором случае пересечение  $K \cap U_\xi$  представляет собою аффинное пространство над векторным пространством  $W \cap \text{Ann} \xi = W'$ .

Упр. 17.9. Если  $v = u + w$ , где  $u \in U$ ,  $w \in W$  и  $v \notin U \cup W$ , то  $u$  и  $w$  линейно независимы, и  $v \in (u, w)$ . Если отвечающая вектору  $v$  точка проективного пространства лежит на какой-то ещё прямой  $(ab)$  с  $a \in U$  и  $b \in W$ , то  $v = \lambda a + \mu b$  для некоторых ненулевых  $\lambda, \mu \in \mathbb{k}$ , причём  $\lambda a = u$  и  $\mu b = w$  в силу единственности разложения вектора  $v$ . Поэтому  $a$  и  $u$ , так же как  $b$  и  $w$ , суть совпадающие точки проективного пространства. В частности,  $(uw) = (ab)$ .

Упр. 17.11. Для нульмерной квадрики на  $\mathbb{P}_1$  утверждение очевидно. Пусть при  $n \geq 2$  квадратика  $Q \subset \mathbb{P}_n$  содержится в гиперплоскости  $H \subset \mathbb{P}_n$  и имеет гладкую точку  $a \in Q$ . Тогда каждая проходящая через  $a$  и не содержащаяся в  $H$  прямая пересекает  $Q$  ровно в одной точке  $a$ , т. е. лежит в  $T_p Q$ . Поэтому  $\mathbb{P}_n = H \cup T_p Q$ . Если  $H = V(\xi)$ ,  $T_p Q = V(\eta)$  для каких-то ненулевых ковекторов  $\xi, \eta \in V^*$ , то квадратичная форма  $q(v) = \xi(v)\eta(v)$  тождественно зануляется на векторном пространстве  $V$ . Но тогда и оба сомножителя  $\xi, \eta$  должны быть нулевыми. Противоречие.

Упр. 17.12. Ответ: биномиальный коэффициент  $\binom{n+k}{n}$ .

Упр. 17.13. Если основное поле  $\mathbb{k} = \mathbb{F}_q$  состоит из  $q$  элементов, алгебра функций  $\mathbb{F}_q^n \rightarrow \mathbb{F}_q$  состоит из  $q^{q^n}$  элементов, и гомоморфизм бесконечной алгебры многочленов в конечную алгебру функций не может быть инъективен. Зато он сюръективен, поскольку для любого конечного набора точек в  $\mathbb{k}^n$  существует многочлен  $f \in \mathbb{k}[x_1, x_2, \dots, x_n]$ , принимающий в этих точках любые наперёд заданные значения (убедитесь в этом). Над бесконечным полем  $\mathbb{k}$  множество функций  $\mathbb{k}^n \rightarrow \mathbb{k}$  строго мощнее, чем  $\mathbb{k}^n$ , а пространство многочленов равномощно  $\mathbb{k}$ . Поэтому гомоморфизм из алгебры многочленов в алгебру функций не может быть сюръективным. Инъективность доказывается индукцией по  $n = \dim V$ . При  $n = 1$  это утверждение о том, что ненулевой многочлен от одной переменной не может иметь бесконечно много корней. Записывая многочлен от  $n$  переменных как многочлен от  $x_n$  с коэффициентами из  $\mathbb{k}[x_1, x_2, \dots, x_{n-1}]$ :

$$f(x_1, \dots, x_n) = \sum_{v=0}^d \varphi_v(x_1, \dots, x_{n-1}) \cdot x_n^{d-v}$$

и вычисляя коэффициенты  $\varphi_v$  в произвольной точке  $(p_1, \dots, p_{n-1}) \in \mathbb{k}^{n-1}$ , мы получаем многочлен от  $x_n$  с постоянными коэффициентами, задающий тождественно нулевую функцию на прямой, состоящей из точек вида  $(p_1, \dots, p_{n-1}, t)$ , где  $t \in \mathbb{k}$ , в  $\mathbb{k}^n$ . По уже доказанному, он нулевой. Следовательно, все многочлены  $\varphi_v$  являются тождественно нулевыми функциями на  $\mathbb{k}^{n-1}$ . По предположению индукции, они являются нулевыми многочленами.

Упр. 18.2. Биjectивность очевидна. Докажем линейность. Пусть прямая  $\ell \subset \mathbb{P}_2$  аннулируется линейной формой  $\xi \in \mathbb{P}_2^\times$ , и  $a, b \in L$  — две различные точки. Точка  $\ell \cap L = (ab) \cap \text{Ann } \xi = \xi(b) \cdot a - \xi(a) \cdot b$  линейно зависит от  $\xi$ .

Упр. 18.3. Соединяя точки  $(a_1 b_2) \cap (b_1, a_2)$  и  $(c_1 b_2) \cap (b_1, c_2)$ , получаем перекрёстную ось  $\ell$ . Точка  $\varphi(x)$  является пересечением прямой  $\ell_2$  с прямой, соединяющей точки  $b_1$  и  $\ell \cap (x, b_2)$ .

Упр. 18.4. Строим точку  $o$  пересечения прямой, проходящей через точки  $\ell'_1 \cap \ell''_2, \ell'_2 \cap \ell''_1$ , и прямой, проходящей через точки  $\ell'_2 \cap \ell''_3, \ell'_3 \cap \ell''_2$ . Поскольку  $o$  является перекрёстным центром гомографии  $\varphi$ , прямая  $\varphi(\ell)$  проходит через  $p_2$  и точку пересечения прямой  $\ell'_1$  с прямой, проходящей через  $o$  и точку  $\ell \cap \ell''_1$ .

Упр. 18.5. Рассмотрите произвольную прямую  $L$ , не проходящую через  $p_1$  и  $p_2$ , и убедитесь, что отображение  $C : p_1^\times \rightarrow p_2^\times$  является композицией гомографии  $\pi_1 : p_1^\times \simeq L, \ell \mapsto \ell \cap L$  из упр. 18.2 на стр. 221, гомографии  $C_{p_2 p_1} : L \simeq L$  из лем. 18.2 на стр. 223 (где надо положить  $\ell_1 = \ell_1 = L$ ) и обратной к гомографии из упр. 18.2 гомографии  $\pi_2^{-1} : L \simeq p_2^\times$ .

Упр. 18.6. При замене однородных координат все определители в правой части формулы (18-4) умножаются на определитель матрицы замены координат, что не меняет правой дроби. Средняя дробь всегда равна правой в силу вычисления (18-3). Последнее утверждение проверяется выкладкой

$$\frac{\det(a, c)}{\det(a, d)} \cdot \frac{\det(b, d)}{\det(b, c)} = \frac{\det(a, b + \gamma a)}{\det(a, b + \delta a)} \cdot \frac{\det(b, b + \delta a)}{\det(b, b + \gamma a)} = \frac{\delta}{\gamma}.$$

Упр. 18.8. Преобразование, переставляющее изотропные точки на проходящей через  $s$  прямой, представляет собою отражение  $\sigma_s$  в ортогональной к анизотропному вектору  $s \notin C$  гиперплоскости  $s^\perp$ , ср. с прим. 17.7 на стр. 211.

Упр. 18.9. Поскольку  $[a, b, c, d] = [b, a, c, d]$ , двойное отношение  $[a, b, c, d] = -1$ . Наоборот, если  $[a, b, c, d] = -1$ , то отображение, переводящее точку  $x \in \ell$  в единственную такую точку  $y \in \ell$ , что  $[x, y, c, d] = -1$ , является инволютивной гомографией и действует на  $a, b, c, d$  точно также, как инволюция  $\sigma_{c,d}$ .

Упр. 18.10. Пусть коника  $C$  задаётся квадратичной формой  $q$  и две проходящие через  $p$  прямые на рис. 18◊14 пересекают её в точках  $a, b, c, d$ , где  $a \in (pb)$  и  $d \in (pc)$  суть ближайшие к  $p$  точки этих прямых. Обозначим отличные от  $p$  вершины ассоциированного с четырёхвершинником  $abcd$  треугольника  $prs$  через  $r = (ac) \cap (bd)$ ,  $s = (ad) \cap (bc)$  и положим  $u \stackrel{\text{def}}{=} (sr) \cap (ab)$ ,  $w \stackrel{\text{def}}{=} (sr) \cap (cd)$ . Коника  $C$  задаёт на прямой  $(ab)$  инволюцию  $\sigma_{ab}$ , переставляющую друг с другом ортогональные точки:  $\sigma_{ab}(x) = y \iff \tilde{q}(x, y) = 0$  (убедитесь, что это инволютивная гомография с неподвижными точками  $a$  и  $b$ ). Согласно прим. 18.4 на стр. 229 точки  $p, u$  гармоничны точкам  $a, b$ , откуда  $\sigma_{ab}(s) = u$  по упр. 18.9 на стр. 231. Тем самым,  $\tilde{q}(p, u) = 0$ . Рассматривая аналогичную инволюцию на прямой  $(cd)$ , точно также заключаем, что  $\tilde{q}(p, w) = 0$ . Тем самым, прямая  $(uw) = (sr) = \mathbb{P}(p^\perp)$  является полярой точки  $p$ .

Упр. 19.3. Возьмём произвольную точку  $p_0 \in Q$  и любую не проходящую через  $p_0$  гиперплоскость  $\Pi \simeq \mathbb{P}_{n-1}$ , пересекающую  $Q$  по гладкой квадрике  $Q' = \Pi \cap Q$  (убедитесь, что при  $n \geq 2$  это возможно<sup>1</sup>). Выберем на  $Q'$  линейно независимые точки  $p_1, \dots, p_n$  и проведём через  $p_0$  прямую, пересекающую гиперплоскость  $\Pi$  вне квадрики  $Q'$  и  $n + 1$  плоскостей размерности  $n - 2$ , высекаемых из  $\Pi$  касательной гиперплоскостью  $T_{p_0} Q$  и  $n$  гиперплоскостями, натянутыми на точку  $p_0$  и все точки  $p_i$ , без какой-нибудь одной<sup>2</sup>. Эта прямая пересечёт квадратик  $Q$  в точке  $p_{n+1}$ , которая не лежит в одной гиперплоскости ни с какими  $n$  из точек  $p_0, \dots, p_n$ .

Упр. 19.4. Построим поляры<sup>3</sup> каких-нибудь двух точек  $a, b$ , лежащих на данной прямой  $\ell$  вне очерчиваемого окружностью круга. Точка их пересечения будет полюсом прямой  $(ab)$ . Поляра лежащей внутри круга точки — это прямая, проходящая через полюса произвольной пары прямых, пересекающихся в этой точке.

Упр. 19.5. Пересечение квадрики  $Q$  с прямой  $(cd)$  задаётся в однородных координатах  $(x_0 : x_1)$  относительно базиса  $c, d$  квадратичной формой  $q(x) = \det(x, c) \cdot \det(x, d)$ , поляризация которой

$$\tilde{q}(x, y) = \frac{1}{2} (\det(x, c) \cdot \det(y, d) + \det(y, c) \cdot \det(x, d)).$$

Условие сопряжённости  $\tilde{q}(a, b) = 0$  означает, что  $\det(a, c) \cdot \det(b, d) = -\det(b, c) \cdot \det(a, d)$ , т. е.  $[a, b, c, d] = -1$ .

Упр. 19.7. Если прямая  $\ell \subset Q$  не проходит через  $s$ , то порождённая прямой  $\ell$  и точкой  $s$  плоскость целиком лежит на квадрике  $Q$  и пересекает плоскость  $\Pi$  по прямой, что невозможно, так как гладкая коника  $Q \cap \Pi$  не содержит прямых.

Упр. 19.8. Базисом пространства  $T_{v \otimes \xi}$  являются операторы  $v \otimes \xi, u \otimes \xi$  и  $v \otimes \eta$ , где  $u \in U$  и  $\eta \in U^*$  суть любые вектор и ковектор, не пропорциональные  $v$  и  $\xi$  соответственно. Применение любого из этих операторов к вектору  $w \in \text{Ann } \xi$  даёт либо 0, либо вектор, пропорциональный  $v$ . Поскольку операторы  $F : U \rightarrow U$  со свойством  $F(\text{Ann } \xi) \subset \mathbb{k} \cdot v$  тоже составляют трёхмерное векторное пространство, последнее совпадает с  $T_{v \otimes \xi}$ .

Упр. 19.11. Над  $\mathbb{C}$  устойчивый ответ — две, над  $\mathbb{R}$  — две или ни одной. При специальном расположении четырёх заданных прямых их могут пересекать ровно одна или бесконечно много прямых.

<sup>1</sup>См. предл. 19.4 на стр. 240.

<sup>2</sup>Это можно сделать, поскольку произведение квадратичной формы, задающей квадратик  $Q'$ , и  $n + 1$  линейных форм, задающих гиперплоскости, является ненулевым многочленом от однородных координат в гиперплоскости  $\Pi$  и над бесконечным полем не может тождественно обращаться в нуль во всех точках этой гиперплоскости.

<sup>3</sup>См. рис. 18◊14 на стр. 232.

Рассмотрите множество всех прямых, пересекающих первые три данные прямые, и выясните, как эта квадрика взаимодействует с четвёртой данной прямой.

Упр. 20.1. В доказательстве лем. 20.2 на стр. 249 мы видели, что коники, касающиеся прямой  $\ell$  в точке  $p \in \ell$ , образуют в пространстве коник  $\mathbb{P}_5$  подпространство коразмерности 2. Оно пересекается с двумя гиперплоскостями коник, проходящих через точки  $c, d$  по крайней мере по прямой. Если бы пересечение имело размерность хотя бы два, то через любые две точки на  $\mathbb{P}_2$  проходила бы коника, одновременно содержащая точки  $c, d$  и касающаяся прямой  $\ell$  в точке  $p$ , что не так: возьмём одну из точек на прямой  $(cd)$ , а другую — вне  $(cd) \cup \ell$ . Описание особых коник в этом пучке очевидно.

Упр. 20.2. Условие прохождения через точку задаёт в пространстве коник гиперплоскость. Если никакие три из четырёх точек не коллинеарны, эти гиперплоскости линейно независимы, т. е. через любые три из точек можно провести распавшуюся конику, не проходящую через четвёртую точку. Следовательно, коники проходящие через точки  $a, b, c, d$ , никакие три из которых не коллинеарны, образуют пучок. Этот пучок содержит три распавшихся коники, образованные парами противоположных сторон четырёхвершинника  $abcd$ .

Упр. 20.4. По предл. 18.2 на стр. 225 коника  $C(\ell, L)$  распадается в объединение прямой  $\ell' = (s_L t_L)$  и ещё одной прямой если и только если гомография  $ts^{-1}: s_L^X \simeq t_L^X$  переводит прямую  $\ell'$  в себя. Последнее означает, что в пучке  $L$  имеется коника  $C$ , относительно которой прямая  $\ell'$  одновременно является полярной и точки  $s$  и точки  $t$ . Но такое возможно только если  $C = \ell \cup \ell'$ , а в этом случае  $\ell$  проходит через особую точку  $\ell \cap \ell'$  коники  $C$ .

Упр. 20.6. Пучок распавшихся коник, являющихся объединением прямой, пробегающей пучок прямых, проходящих через некоторую точку  $p$ , и ещё одной прямой, не проходящей через  $p$ .

Упр. 21.1. Стандартный базис векторного пространства  $\mathbb{C}^2$  над полем  $\mathbb{C}$  состоит из тех же самых векторов  $e_1 = (1, 0)$  и  $e_2 = (0, 1)$ , лежащих в  $\mathbb{R}^2 \subset \mathbb{C}^2$ , что и базис векторного пространства  $\mathbb{R}^2 \subset \mathbb{C}^2$  над полем  $\mathbb{R}$ . Симметричная комплексно билинейная форма на  $\mathbb{C}^2$ , продолжающая евклидово скалярное произведение на  $\mathbb{R}^2$ , однозначно определяется тем, что имеет в этом базисе единичную матрицу Грама.

Упр. 21.2. Пусть  $a, b \in \ell_\infty$  и диаметры  $(ca), (cb)$  сопряжены. Тогда точки  $a, b$  сопряжены относительно  $C$ , т. е.  $a$  лежит на поляре точки  $b$ . Поскольку  $b$  лежит на поляре  $z_*$ , точка  $z_*$  тоже лежит на поляре  $b$ . Следовательно, диаметр  $(ca)$  является полярной точки  $b$ , и любая проходящая через  $b$  прямая  $\ell$  пересекает прямую  $(ca)$  по сопряжённой с  $b$  точке, которая по предл. 19.1 на стр. 234 является серединой отрезка, отсекаемого коникой на прямой  $\ell$ .

Упр. 21.3. Это вытекает из сл. 20.2 на стр. 255, но без труда проверяется и прямым вычислением.

Упр. 21.8. Поляра любой точки  $w \in \ell_\infty$  проходит через полюс  $y_*$  прямой  $\ell_\infty$ , т. е. параллельна оси параболы. Эта поляра пересекает любую прямую  $\ell \ni w$  по такой точке  $u$ , что сопряжённые относительно  $P$  точки  $u, w$  гармоничны точкам пересечения  $\ell \cap P$ , т. е.  $u$  является серединой хорды  $\ell \cap P$ .

Упр. 21.9. Прямая  $(f\iota_+)$ , где  $f = (1 : t : 0) = z_* + tx_* \in (z_*x_*)$ , касается параболы если и только если матрица Грама векторов  $f, \iota_+$

$$\begin{pmatrix} 1 & t & 0 \\ 0 & i & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & a & 0 \\ a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ t & i \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2at & ia \\ ia & -1 \end{pmatrix}$$



вырождена, откуда  $t = a/2$ . Полярное преобразование переводит вектор  $f = (1 : a/2 : 0)$  в прямую, однородное уравнение которой имеет коэффициенты

$$(1 : a/2 : 0) \begin{pmatrix} 0 & a & 0 \\ a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = (a^2/2 : a : 0) = (a/2 : 1 : 0).$$

Упр. 22.1. Модифицируйте решение [упр. 19.3](#) на стр. 233.

Упр. 22.3. Если  $\dim \text{Sing } \bar{Q} = 0$ , то  $Q$  является конусом или цилиндром если и только если эта особая точка, соответственно, конечна или бесконечна. Если же  $\dim \text{Sing } \bar{Q} \geq 1$ , то проективное подпространство  $\text{Sing } \bar{L}$  всегда пересекается с гиперплоскостью  $L_\infty$ .

Упр. 22.4. Среди пространств вида  $\mathbb{R}^m \times S^{n-m}$ , где  $0 \leq m \leq n$ , несвязным является только  $\mathbb{R}^n \times S^0 = \mathbb{R}^m \sqcup \mathbb{R}^m$ .

Упр. 22.5. Ортогональность векторов  $v_i$  относительно формы  $f_2$  на  $V$  означает, что задающая проективное замыкание эллипсоида квадратичная форма  $q$  на пространстве  $W = \mathbb{R}c \oplus V$  имеет в базисе  $c, v_1, \dots, v_n$  этого пространства вид

$$-x_0^2 + x_1^2 + \dots + x_n^2. \tag{23-21}$$

Поэтому все векторы  $c \pm e_i$  изотропны, и ортогонален к каждому такому вектору порождается им самим и векторами  $v_j, c, v \neq i$ . Наоборот, если эти условия выполняются, то при каждом  $i$  линейная оболочка векторов  $v_j, c, v \neq i$  является ортогональным относительно формы  $q$  дополнением к двумерному пространству, натянутому на  $c$  и  $e_i$ , а из равенств

$$\tilde{q}(c + e_i, c + e_i) = 0 = \tilde{q}(c - e_i, c - e_i)$$

вытекает, что  $\tilde{q}(c, e_i) = 0$  и  $\tilde{q}(e_i, e_i) = -\tilde{q}(c, c) = 1$ , т. е. в базисе  $c, v_1, \dots, v_n$  форма  $q$  имеет вид (23-21).

Упр. 23.2. Пусть квадрики  $Q = V(q)$  и  $F = V(f)$  пересекают гиперплоскость  $\Pi = \mathbb{P}(\text{Ann } \xi)$  по одной и той же квадратике  $G = V(g) = Q \cap \Pi = F \cap \Pi$ . Поскольку при  $\xi = 0$  обе квадратичные формы  $q, f$  превращаются в квадратичную форму  $g$ , они имеют вид  $q = g + \xi\psi, f = g + \xi\varphi$  для некоторых линейных форм  $\psi, \varphi$ . Но тогда ограничения форм  $q, f$  на гиперплоскость  $\text{Ann}(\psi - \varphi)$ , на которой  $\psi = \varphi$ , тоже совпадают друг с другом.

Упр. 23.3. Первое утверждение очевидно из [23-8](#) на стр. 288, второе вытекает из [лем. 20.1](#) на стр. 247: простой конус и двойная плоскость имеют в любом пучке кратности  $\geq 1$  и  $\geq n$  соответственно, поэтому никаких других особых квадратик в рассматриваемом пучке больше нет.

Упр. 23.4. Ответ:  $\det \Gamma = \alpha^{n-1}((c, c) - \alpha\beta)$ .

Упр. 23.6. Первое проверяется прямым вычислением, второе вытекает из [сл. 23.2](#) на стр. 296: инверсия  $\sigma$  относительно  $S$  переводит инверсные относительно  $Q$  точки  $c$  и  $c'$  в точки  $\infty$  и  $\sigma(c')$  инверсные относительно  $Q'$ .

Упр. 23.8. Группа движений пространства  $\mathbb{R}^n$ , переводящих каждую из фигур  $\Phi, \Psi$  в себя, транзитивно действует на пересечении  $\Phi \cap \Psi$  и переводит касательные пространства в касательные пространства, сохраняя углы.

Упр. 23.10. По правилу дифференцирования дробей, производная от отображения (23-15)

$$p \mapsto c + \frac{r^2(p - c)}{(p - c, p - c)}$$

действует на касательный вектор  $w \in \mathbb{R}^n$  по правилу

$$\begin{aligned} w \mapsto \frac{r^2}{(p-c, p-c)^2} (w(p-c, p-c) - 2(p-c, w)(p-c)) = \\ = \frac{r^2}{(p-c, p-c)} \left( w - 2 \frac{(p-c, w)}{(p-c, p-c)} (p-c) \right) \end{aligned}$$

(ср. с упр. 12.6 на стр. 152 и н° 15.2 на стр. 181).

Упр. 23.11. На рис. 23♦17 на стр. 297) проекция прямой  $(ab)$  на прямую  $(a'b')$  из точки  $p$  сохраняет двойные отношения. Обозначим через  $e$  и  $f$  точки пересечения прямой  $(ab)$  соответственно с прямой  $(pg)$  и с касательной гиперплоскостью к сфере в точке  $p$ . Тогда  $[\infty, q, a', b'] = [e, f, a, b] = -1$ , поскольку точки  $e$  и  $f$  сопряжены относительно сферы  $S(r, c)$ . Таким образом, точка  $g$  спроектируется из  $p$  в середину отрезка  $[a, b]$ .

Упр. 23.13. Достаточно убедиться, что для любой пары анизотропных векторов  $u, w \in \mathbb{R}^{n+1}$  с  $s(u) = s(w) \neq 0$  существует отражение нужного вида, переводящее  $u$  либо в  $w$ , либо в  $-w$ , после чего повторить доказательство теор. 15.2 на стр. 181. Для этого, как и в доказательстве лем. 15.1 на стр. 181, надо заметить, что векторы  $e_+ = u + w$  и  $e_- = u - w$  ортогональны друг другу. Их скалярные квадраты  $s(e_{\pm})$  не могут быть оба нулевыми, поскольку ограничение формы  $s$  на двумерную линейную оболочку  $U$  этих векторов ненулевое, и не могут быть оба отрицательными, поскольку в этом случае  $\mathbb{R}^{n+1} = U \oplus U^{\perp}$  и, тем самым, сигнатура  $(p, m)$  формы  $s$  должна иметь  $m \geq 2$ . Если один из векторов, скажем  $e_-$ , имеет  $s(e_-) = 0$ , то  $s(e_+) \neq 0$  и  $\mathbb{R}^{n+1} = \mathbb{R}e_+ \oplus e_+^{\perp}$ , причём ограничение формы  $s$  на  $e_+^{\perp}$  невырождено. Поскольку подпространство  $e_+^{\perp}$  содержит изотропный вектор  $e_-$ , оно содержит гиперболическую плоскость и, стало быть, сигнатура  $(p', m')$  ограничения формы  $s$  на  $e_+^{\perp}$  имеет  $m' \geq 1$ , откуда  $s(e_+) > 0$ . Таким образом, как минимум один из скалярных квадратов  $s(e_{\pm})$  положителен, и отражение в ортогонале к соответствующему вектору  $e_{\pm}$  переводит  $u$  либо в  $w$ , либо в  $-w$  (ср. с доказательством лем. 15.1 на стр. 181).