ПРОГРАММА СЕМЕСТРОВОГО КУРСА «ЛИНЕЙНАЯ АЛГЕБРА И ГЕОМЕТРИЯ»

интенсивность занятий: 1,5 пары лекций + 1,5 пары упражнений в неделю
темы, набранные *курсивом* могут стать необязательными или упраздниться вовсе.

ПЕРВАЯ ЧЕТВЕРТЬ (7 НЕДЕЛЬ)

НЕДЕЛЯ 1. Двумерное векторное пространство $\Bbbk^2$: пропорциональность векторов, определитель 2×2, базисы и координаты, правило Крамера, форма площади. Аффинное пространство $\Bbbk^2$: аффинный репер и аффинные координаты, деление отрезка в заданном отношении, прямые и их уравнения, площади треугольников и многоугольников. Центр тяжести и барицентрические координаты.

НЕДЕЛЯ 2. Линейные и аффинные преобразования плоскости, дифференциал аффинного преобразования. Замены координат. Матричная запись линейных и аффинных преобразований. *Преобразования, переводящие прямые в прямые (полуаффинные преобразования)*.

ТРЕБУЕТ: *поля и гомоморфизмы полей* (алгебра).

НЕДЕЛЯ 3. Евклидова плоскость = комплексная прямая. Скалярное произведение, существование ортонормального базиса, неравенства КБШ и треугольника, квадрат евклидовой площади равен определителю Грама. Угол между векторами. Ещё раз об уравнении прямой, угол между прямыми. Геометрическое описание поля комплексных чисел.

НЕДЕЛЯ 4. Определение и примеры векторных пространств: «школьные свободные векторы», координатные пространства, матрицы, многочлены и степенные ряды, вложения полей. Порождающие наборы векторов, линейная зависимость, лемма о замене, существование и свойства базисов, размерность. Подпространства: размерность суммы и пересечения, взаимное расположение, трансверсальность, прямые суммы.

НЕДЕЛЯ 5. Линейные отображения, размерность ядра и образа, непустые слои являются сдвигами ядра. Матричные обозначения для линейных отображений, размерность пространства линейных отображений, произведение матриц и композиция отображений. Матричные обозначения для линейных выражений одних векторов через другие (матрицы перехода). Алгебра матриц, обратная матрица, критерии обратимости, *обращение верхней унитреугольной матрицы над произвольным ассоциативным кольцом с единицей.*

ТРЕБУЕТ: *ассоциативное кольцо, формула включения-исключения* (алгебра, комбинаторика)..

НЕДЕЛЯ 6. Матричная запись и геометрическая интерпретация систем линейных уравнений и их решений, критерии совместности и оценка размерности пространства решений. Задание векторных и аффинных подпространств линейными уравнениями, взаимное расположение аффинных подпространств. Фактор пространства.

ТРЕБУЕТ: *факторизация, фактор абелевой группы по подгруппе (хотя бы на уровне примеров — вычеты и т. п.)* (комбинаторика, алгебра).

НЕДЕЛЯ 7. Метод Гаусса: отыскание базиса подпространства в $\Bbbk^n$ и фактора $\Bbbk^n$ по этому подпространству, комбинаторный тип подпространства и единственность базиса с приведённой ступенчатой матрицей, обращение матрицы методом Гаусса, отыскание базисов в ядре и образе линейного оператора, ранг матрицы. Решение систем линейных уравнений методом Гаусса, свободные и зависимые переменные.

ЗАЧЁТНАЯ НЕДЕЛЯ. Коллоквиум по материалу первой четверти.

ВТОРАЯ ЧЕТВЕРТЬ (8 НЕДЕЛЬ)

НЕДЕЛЯ 1. Двойственное пространство, примеры линейных форм. Вложение $V \hookrightarrow V^{**}$, *продвинутый пример: многочлены и степенные ряды, теневой анализ*. Изоморфизм $V \xrightarrow{\sim} V^{**}$ для конечномерного V, двойственный базис, примеры двойственных базисов, координаты линейной формы в двойственном базисе. Описание двойственного пространства к линейной оболочке заданного набора векторов, ранг матрицы. Пространство, двойственное к подпространству. Аннуляторы, биекция $U \leftrightarrow \mathrm{Ann}U$ обращает включения и переводит суммы в пересечения и наоборот. Двойственные линейные отображения, связь между их ядрами и образами. Ещё раз о системах линейных уравнений, методе Гаусса и явном отыскании базисов в пересечениях и суммах подпространств и в фактор пространствах.

НЕДЕЛЯ 2. Объём ориентированного параллелепипеда, полилинейные кососимметричные и знакопеременные формы, пространство кососимметричных n-линейных форм на n-мерном пространстве одномерно. Знак перестановки, знак тасующей перестановки. Определитель матрицы и его простейшие свойства: полилинейность, инвариантность относительно транспонирования, мультипликативность. Техника вычисления определителей. Отношение объёма симплекса к объёму параллелепипеда (над $\mathbb{R}$).

ТРЕБУЕТ: *группа перестановок, знак перестановки, биномиальные коэффициенты, суммирование по треугольнику Паскаля* (алгебра, комбинаторика).

НЕДЕЛЯ 3. Грассмановы многочлены, линейные замены переменных и миноры, разложение определителя по набору строк или столбцов. Правила Крамера и «векторные произведения», присоединённая матрица, тождество $A \cdot A^{\vee} = \det A \cdot E$. *Определитель пучка матриц.* Матрицы с элементами в алгебре многочленов = многочлены с коэффициентами в алгебре матриц, тождество Гамильтона – Кэли (подстановка $t = A$ в равенство $\det(tE - A) \cdot E = (tE - A)(tE - A)^{\vee}$).

НЕДЕЛЯ 4. Собственные числа и собственные подпространства линейных операторов. Характеристический и минимальный многочлены. Разложение пространства в прямую сумму инвариантных подпространств по разложению аннулирующего многочлена на множители. Критерии диагонализуемости, примеры недиагонализуемых операторов. Корневое разложение. Вычисление аналитических функций от операторов и матриц с помощью полиномиальной интерполяции.

ТРЕБУЕТ: *алгебра многочленов: вычисление значения и деление с остатком, корни, НОД и взаимная простота, китайская теорема об остатках; разложение Тейлора и струи гладких функций* (алгебра, анализ).

НЕДЕЛЯ 5. Общие собственные векторы коммутирующих операторов, одновременная диагонализация произвольного множества коммутирующих диагонализуемых операторов. Разложение Жордана и жорданова нормальная форма.

НЕДЕЛЯ 6. Евклидовы пространства: ортогонализация, евклидов объём и ориентация, матрицы Грама и как они преобразуются при замене координат, определитель Грама равен квадрату евклидова объёма, вычисление углов и расстояний между подпространствами. Евклидова геометрия пространства $\mathbb{R}^3$: уравнения прямых и плоскостей, углы и расстояния между ними, векторное произведение.

НЕДЕЛЯ 7. Ортогональные дополнения и ортогональное проектирование в $\mathbb{R}^n$, евклидово двойственные базисы, метод наименьших квадратов, общий перпендикуляр к набору векторов. Практика отыскания углов и расстояний в $\mathbb{R}^n$: расстояние от точки до гиперплоскости, угол между гиперплоскостями, расстояние между аффинными подпространствами, угол между прямой и подпространством.

НЕДЕЛЯ 8. Ортогональные преобразования и движения, описание движений плоскости и трёхмерного пространства. Отражения в гиперплоскостях, композиция отражений является поворотом, разложение ортогонального оператора в композицию отражений и в ортогональную сумму поворотов в двумерных плоскостях. *Простота группы* $\mathrm{SO}_3(\mathbb{R})$.

ТРЕБУЕТ: *группы, сопряжение, нормальные подгруппы* (алгебра).