Евклидова плоскость

ГС3⋄1. На евклидовой плоскости $\mathbb{R}^2$ пишите уравнение прямой ℓ, перпендикулярной вектору $(-1,3)$ и находящейся на расстоянии 3 от начала координат в направлении, противоположном этому вектору. Найдите расстояние от точки $p=(2,5)$ до прямой ℓ, ортогональную проекцию p на ℓ и точку, симметричную точке p относительно ℓ.

ГС3⋄2. Для прямых $2x-y=5$ и $3y+x=2$ в $\mathbb{R}^2$ напишите уравнение прямой, которая симметрична первой из них относительно второй, и найдите: **а)** расстояния от каждой прямой до начала координат и до точки $(-3,2)$ **б)** точку пересечения и косинусы углов между прямыми **в)** какие-нибудь векторы, параллельные биссектрисам этих углов.

ГС3⋄3. Выясните на каком расстоянии от начала координат находится срединный перпендикуляр ℓ к отрезку с концами в точках $(2,3)$ и $(-1,7)$, а также напишите уравнения биссектрис углов, которые прямая ℓ образует с координатными осями.

ГС3⋄4. Для треугольника с вершинами $a=(-1,-1)$, $b=(-5,3)$, $c=(4,1)$ найдите: **а)** косинусы его углов **б)** уравнение опущенной из вершины b высоты и расстояние от неё до вершины a **в)** длины медиан треугольника и косинусы углов между ними **г)** уравнение биссектрисы, опущенной из вершины a и координаты точки её пересечения с противолежащей стороной **д)** центры вписанной и описанной окружностей и их радиусы.

ГС3⋄5. Длины сторон треугольника равны 2 и 3, а косинус угла между ними равен $2/3$. Найдите: **а)** площадь треугольника **б)** длину третьей стороны и косинусы прилежащих к ней углов **в)** длины медианы, высоты и биссектрисы, опущенных из данного угла.

ГС3⋄6. Обозначим через p_a, p_b, p_c ортогональные проекции центра вписанной в $\triangle abc$ окружности на стороны, противолежащие соответствующим вершинам. Выразите длины $|cp_a|$, $|ap_b|$, $|bp_c|$ через длины сторон треугольника.

ГС3⋄7. Выразите через длины сторон треугольника барицентрические координаты[1] центра его **а)** вписанной **б)** описанной окружности.

Дополнительные задачи

ГС3⋄8*. Докажите эквивалентность следующих трёх условий на точку p и $\triangle abc$ на евклидовой плоскости:

- **а)** p лежит на описанной около $\triangle abc$ окружности
- **б)** ортогональные проекции точки p на прямые (ab), (bc) и (ca) коллинеарны[2]
- **в)** три точки, симметричные точке p относительно прямых (ab), (bc) и (ca), коллинеарны[3].

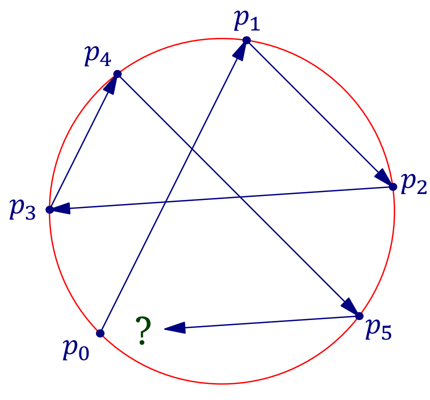

Рис. 1⋄1.

ГС3⋄9*. На евклидовой плоскости $\mathbb{R}^2$ заданы попарно непропорциональные векторы v_1, v_2, v_3 и окружность C. Из точки $p_0 \in C$ проводят параллельно v_1 прямую, пересекающую C в точке p_1, затем из p_1 проводят параллельно v_2 прямую, пересекающую C в точке p_2, из p_2 — прямую, параллельную v_3 и пересекающую C в точке p_3 и т. д. по кругу. Верно ли, что после двух кругов всегда получим $p_6=p_0$ (см. рис. 1⋄1)?

ГС3⋄10*. Точки $a_1 \in (bc)$, $b_1 \in (ac)$, $c_1 \in (ac)$ отличны от вершин $\triangle abc$. Всегда ли описанные окружности $\triangle ab_1c_1$, $\triangle a_1bc_1$ и $\triangle a_1b_1c$ пересекаются в одной точке?

---

[1] Относительно вершин треугольника.

[2] Проходящая через них прямая называется *прямой Симсона* точки p относительно $\triangle abc$.

[3] Проходящая через них прямая называется *прямой Штейнера* точки p относительно $\triangle abc$.