

## Квадратичные формы

ГС13♦1. Выясните, вырождено ли ограничение билинейной формы с матрицей Грама

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 & 3 & -4 \\ -1 & -2 & 2 & -2 \\ 3 & 2 & -4 & 1 \\ -4 & -2 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

на пространство  $U$  решений системы линейных уравнений

$$\begin{cases} x_3 - x_4 = 0 \\ x_1 - x_2 - 2x_4 = 0 \end{cases}$$

в  $\mathbb{Q}^4$ , и если нет, найдите проекцию вектора  $v = (14, -3, 10, 8)$  на  $U^\perp$  вдоль  $U$ .

ГС13♦2. Найдите ранг и сигнатуру ограничения квадратичной формы, имеющей в стандартных координатах на  $\mathbb{R}^4$  вид

$$-4x_1^2 - 25x_2^2 - 2x_3^2 - 11x_4^2 + 20x_1x_2 + 4x_1x_3 - 6x_1x_4 - 10x_2x_3 + 16x_2x_4 + 2x_3x_4,$$

на ортогонал к вектору  $v = (0, 3, 0, -7)$  относительно поляризации этой формы.

ГС13♦3. Существует ли на  $\mathbb{R}^7$  квадратичная форма с главными угловыми минорами

- а)  $\Delta_1 > 0, \Delta_2 = 0, \Delta_3 > 0, \Delta_4 < 0, \Delta_5 = 0, \Delta_6 < 0, \Delta_7 > 0$
- б)  $\Delta_1 > 0, \Delta_2 = 0, \Delta_3 < 0, \Delta_4 > 0, \Delta_5 = 0, \Delta_6 < 0, \Delta_7 < 0$
- в)  $\Delta_1 > 0, \Delta_2 = 0, \Delta_3 = 0, \Delta_4 < 0, \Delta_5 = 0, \Delta_6 > 0, \Delta_7 < 0$
- г)  $\Delta_1 > 0, \Delta_2 = 0, \Delta_3 = 0, \Delta_4 > 0, \Delta_5 = 0, \Delta_6 < 0, \Delta_7 < 0$ ?

Если да, выясните, какой может быть её сигнатура, и предъявите явно соответствующие матрицы Грама, если нет — объясните, почему.

ГС13♦4. Для квадратичной формы  $-5x_1^2 - 8x_2^2 - 21x_3^2 - 12x_1x_2 + 20x_1x_3 + 22x_2x_3$  на  $\mathbb{Q}^3$ :

- а) укажите какой-нибудь ортогональный базис
- б) разложите  $\mathbb{Q}^3$  в прямую ортогональную сумму гиперболического и анизотропного подпространств
- в) опишите все изотропные векторы.

ГС13♦5. Пусть в поле  $\mathbb{k}$  уравнение  $x^2 = a$  разрешимо относительно  $x$  при любом  $a \in \mathbb{k}$ .

Покажите, что любая невырожденная квадратичная форма на  $\mathbb{k}^n$ , где  $n \geq 2$ , обладает:

- а) изотропным подпространством размерности  $[n/2]$
- б) парой трансверсальных<sup>1</sup> изотропных подпространств размерности  $[n/2]$ .

ГС13♦6. Проверьте, что для анизотропного вектора  $e$  на пространстве с симметричной билинейной формой  $\beta$  отражение  $\sigma_e : v \mapsto v - 2e \beta(v, e) / \beta(e, e)$  является инволютивным<sup>2</sup> изометрическим линейным изоморфизмом.

ГС13♦7. Покажите, что каждая изометрия невырожденной квадратичной формы над любым полем характеристики  $\neq 2$  имеет определитель  $\pm 1$ .

ГС13♦8. Покажите, что число минусов (соотв. плюсов) в сигнатуре невырожденной вещественной квадратичной формы равно максимуму размерностей таких подпространств, на которых эта форма отрицательна<sup>3</sup> (соотв. положительна<sup>4</sup>).

<sup>1</sup>Т. е. с нулевым пересечением.

<sup>2</sup>Т. е. обратным самому себе.

<sup>3</sup>Т. е.  $q(u) < 0$  для всех ненулевых векторов  $u$ .

<sup>4</sup>Т. е.  $q(u) > 0$  для всех ненулевых векторов  $u$ .