

Проективные пространства, проективные подпространства, проекции, однородные и аффинные координаты

- ГС15♦1.** Сколько k -мерных проективных подпространств в \mathbb{P}_n над полем из q элементов?
- ГС15♦2.** При каком условии на три прямые ℓ_0, ℓ_1, ℓ_2 на проективной плоскости $\mathbb{P}_2 = \mathbb{P}(V)$ в векторном пространстве V^* существует такой базис x_0, x_1, x_2 , что каждая прямая ℓ_i является бесконечно удалённой для стандартной аффинной карты $U_i = \{v \in V \mid x_i(v) = 1\}$?
- ГС15♦3.** Укажите три точки $A, B, C \in \mathbb{P}_2$ так, чтобы точки $A' = (1 : 0 : 0)$, $B' = (0 : 1 : 0)$ и $C' = (0 : 0 : 1)$ лежали, соответственно, на прямых (BC) , (CA) и (AB) , а прямые (AA') , (BB') и (CC') пересекались в точке $(1 : 1 : 1)$.
- ГС15♦4.** Рассмотрим в $\mathbb{P}_n = \mathbb{P}(V)$ аффинную карту $U_\xi = \{v \in V \mid \xi(v) = 1\}$, отвечающую ненулевому ковектору $\xi \in V^*$, и k -мерное проективное подпространство $K = \mathbb{P}(W) \subset \mathbb{P}_n$ — проективизацию $(k + 1)$ -мерного векторного подпространства $W \subset V$. Убедитесь, что либо $K \cap U_\xi = \emptyset$, либо $K \cap U_\xi$ наблюдается в аффинном пространстве U_ξ как k -мерное аффинное подпространство.
- ГС15♦5.** Пусть сумма размерностей двух непересекающихся проективных подпространств L_1 и L_2 в \mathbb{P}_n равна $n - 1$. Покажите, что для любой точки $p \in \mathbb{P}_n \setminus (L_1 \sqcup L_2)$ существует единственная прямая ℓ , которая проходит через p и пересекает как L_1 , так и L_2 .
- ГС15♦6.** Напишите однородные уравнения проективных замыканий аффинных кривых:
 а) $y = x^2$ б) $y = x^3$ в) $y^2 + (x - 1)^2 = 1$ г) $y^2 = x^2(x + 1)$ д) $2xy = x^3 - y^3$,
 а также их аффинные уравнения в двух других стандартных аффинных картах. Нарисуйте все эти 15 аффинных кривых в \mathbb{R}^2 и укажите их асимптотические направления¹.
- ГС15♦7 (кубика Веронезе).** Рассмотрим проективизацию \mathbb{P}_3 векторного пространства однородных кубических многочленов от двух переменных t_0, t_1 . Кубика Веронезе $C_3 \subset \mathbb{P}_3$ состоит из всех ненулевых кубических многочленов, которые являются полными кубами линейных². Опишите проекцию кубики Веронезе а) из точки t_0^3 на плоскость $(3t_0^2t_1, 3t_0t_1^2, t_1^3)$ б) из $3t_0^2t_1$ на $(t_0^3, 3t_0t_1^2, t_1^3)$ в) из $t_0^3 + t_1^3$ на $(t_0^3 - t_1^3, 3t_0^2t_1, 3t_0t_1^2)$. А именно: (1) напишите параметрическое уравнение кривой-образа в однородных координатах на плоскости проекции (2) задайте эту кривую явным (непараметрическим) однородным уравнением (3) напишите аффинное уравнение кривой-образа в каждой из трёх стандартных аффинных карт (4) нарисуйте все 9 получившихся аффинных кривых в \mathbb{R}^2 (5) убедитесь, что кривая-образ в (а) имеет степень³ 2, а в (б) и в (в) — степень 3, причём у кривой в (б) есть остриё, а в (в) — самопересечение.
- ГС15♦8 (пифагоровы тройки).** На плоскости $\mathbb{P}_2 = \mathbb{P}(\mathbb{Q}^3)$ спроектируйте прямую $x_2 = 0$ из точки $(0 : 0 : 1)$ на конику $x_0^2 + x_1^2 = x_2^2$, т.е. для каждой лежащей на прямой точки $(t_0 : t_1 : 0)$ выразите координаты $(x_0 : x_1 : x_2)$ её проекции на конику в виде однородных многочленов от t_0, t_1 . Убедитесь, что и наоборот, координаты $(t_0 : t_1)$ исходной точки являются однородными многочленами от координат $(x_0 : x_1 : x_2)$ её проекции. Получите из этого описание всех целочисленных решений уравнения Пифагора $a^2 + b^2 = c^2$ с точностью до пропорциональности.
- ГС15♦9 (коники над конечным полем).** Покажите, что количество троек $(x_0, x_1, x_2) \in \mathbb{F}_q^3$, удовлетворяющих уравнению $f(x_0, x_1, x_2) = 0$, где $f \in \mathbb{F}_q[x_0, x_1, x_2]$ — однородный многочлен степени 2, зависит только от ранга матрицы Грама квадратичной формы f , и найдите это количество для всех возможных значений ранга (мы считаем, что $p = \text{char } \mathbb{F}_q \neq 2$).

¹Т.е. точки, лежащие на бесконечности.

²Т.е. представимы в виде $(\alpha_0 t_0 + \alpha_1 t_1)^3$ для некоторых $(\alpha_0 : \alpha_1) \in \mathbb{P}_1$.

³Т.е. над алгебраически замкнутым полем пересекается ровно по двум точкам (с учётом кратности) с каждой прямой, которая не содержится в этой кривой целиком.