

Евклидовы коники (продолжение)

ГС19♦13. Канонические уравнения параболы, эллипса и гиперболы имеют вид

$$2ax = y^2, \quad \text{где } a > 0,$$

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \quad \text{где } a^2 > b^2 \neq 0,$$

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1, \quad \text{где } ab \neq 0.$$

Покажите, что для отличной от окружности гладкой непустой вещественной коники существует единственный с точностью до смены знаков у базисных векторов ортонормальный аффинный репер, в котором эта коника задаётся каноническим уравнением.

ГС19♦14. Определите типы коник, напишите их канонические уравнения и укажите ортонормальные реперы, в которых эти коники задаются каноническими уравнениями:

- а) $19x^2 + 50xy + 28x + 33y^2 + 36y + 11 = 0$
- б) $x^2 + 4xy + 4y^2 - 2y + 3 = 0$
- в) $7x^2 - 8xy + 8x + 2y^2 - 4y + 3 = 0$
- г) $10x^2 + 26xy - 2x + 17y^2 - 4y + 4 = 0$
- д) $-6x^2 - 28xy - 32y^2 - 4y + 5 = 0$
- е) $x^2 + 2xy + y^2 + 2y = 3$

ГС19♦15. Покажите, что ГМТ с фиксированной суммой σ расстояний до двух данных точек f_1, f_2 является эллипсом, напишите его каноническое уравнение и найдите фокусы и директрисы.

ГС19♦16. Покажите, что ГМТ с фиксированной абсолютной величиной разности ρ расстояний до двух данных точек f_1, f_2 является гиперболой, напишите её каноническое уравнение и найдите фокусы и директрисы.

ГС19♦17. Покажите, что ГМТ с фиксированным отношением $\varepsilon > 0$ расстояния до данной точки f к расстоянию до данной прямой $\ell \not\ni f$ является коникой¹, определите её тип в зависимости от ε и напишите её каноническое уравнение.

ГС19♦18. Опишите ГМТ, делящих в заданном отношении α все параллельные заданной прямой хорды данной окружности.

ГС19♦19. Опишите геометрическое место середин всех параллельных заданной прямой хорд данного эллипса.

ГС19♦20. Касательные к параболе, проведённые через две различные точки a, b этой параболы, пересекаются в точке c . Покажите, что прямая, соединяющая середины отрезков $[a, c]$ и $[b, c]$, тоже касается параболы.

ГС19♦21. На сторонах заданного угла bac откладывают точки $s \in [a, b]$ и $t \in [a, c]$ с фиксированной суммой расстояний до вершины $|s - a| + |a - t| = \sigma$. Покажите, что все прямые (st) касаются некоторой параболы.

ГС19♦22. Напишите зависящее от параметра уравнение, описывающее все центральные коники на \mathbb{R}^2 с фокусами в точках $(\pm 3, 0)$, и определите типы этих коник в зависимости от значения параметра.

¹Число ε называется эксцентриситетом этой коники.