Лекция 7 апреля. Гладкие проективные квад...

"Затяжные учения по гражданской обороне воздействуют сокрушительнее иной войны..."

Н.Бонапарт. Из невысказанного.

Если Вы меня не слышите, дайте знать!

Полярные преобразования

относительно гладкой квадрики $Q=V(q)\subset\mathbb{P}_n=\mathbb{P}(V)$

$\tilde q: V\times V\to V$ $\quad\hat q: V\to V^*$, $\quad v\mapsto\hat q(v): V\to\Bbbk$, $\quad u\mapsto\tilde q(u,v)$

гладкость $Q\Leftrightarrow\hat q$ биективен

он задаёт Л.П.И. $\bar q:\mathbb{P}(V)\xrightarrow{\sim}\mathbb{P}(V^*)$ — полярное преобразование

в координатах относит. двойственных базисов

$\begin{pmatrix}x_0\\ \vdots\\ x_n\end{pmatrix}$ в $\mathbb{P}_n$ $\qquad(\xi_0,\dots,\xi_n)$ в $\mathbb{P}_n^\times$

пусть A — матрица Грама формы q

$\hat q:\begin{pmatrix}x_0\\ \vdots\\ x_n\end{pmatrix}\to(x_0\dots x_n)\cdot A=(\xi_0\dots\xi_n)=\hat q(x)$

$x\mapsto x^t\cdot A=\xi$, где $x=\begin{pmatrix}x_0\\ \vdots\\ x_n\end{pmatrix}$ $\qquad x^t=\xi A^{-1}$, $x=(A^{-1})^t\xi^t=A^{-1}\xi^t$

x пробегает какую-то квадрику $H=V(\beta)$ с матрицей Грама B $\quad H=\{x\mid x^tBx=0\}$

$\bar q: H\to\bar q(H)=\{\xi\mid\xi A^{-1}BA^{-1}\xi^t\}$

квадрика H переходит тоже в квадрику $\bar q(H)\subset\mathbb{P}_n^\times$ с матрицей Грама $A^{-1}BA^{-1}$ (того же ранга, что и B)

Сама квадрика Q перейдёт в квадрику с матрицей $A^{-1}AA^{-1}=A^{-1}\sim A^\vee$ — присоединённая матрица из $n\times n$-миноров матрицы A.

$A\to A^\vee$ полиномиальное степени $\underline{\underline{n}}$

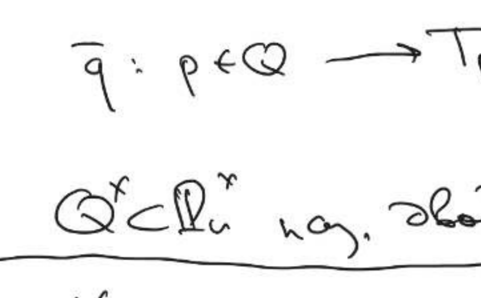
На геометрическом языке полярное преобразование

$\bar q:\mathbb{P}_n\to\mathbb{P}_n^\times$ — пр-во гиперплоскостей в $\mathbb{P}_n$

$p\mapsto\mathbb{P}(p^\perp)$ $\qquad\xi: V\to\Bbbk\leftrightarrow\mathrm{Ann}\,\xi$ с уравнением $\xi(x)=0$ — гиперплоскость

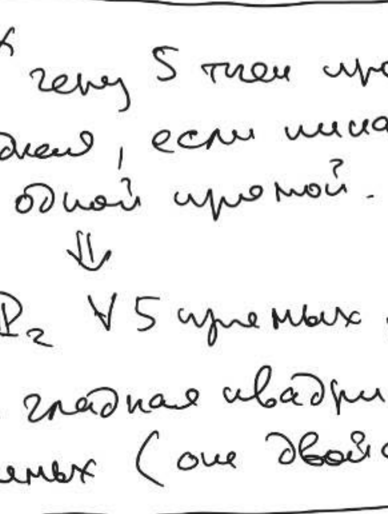
полюсом гиперплоскости $p^\perp$ $\qquad\mathrm{Ann}\,\hat q(p)=\{x\mid\tilde q(x,p)=0\}$ — полярой точки p

полярное преобразование (поляритет).



$\mathbb{P}(p^\perp)\cap Q$ = ГМТ x: (px) касается квадрики Q в точке x

(Условие касания: прямая (ab) касается квадрики $Q=V(q)$ в точке $a\in Q\Leftrightarrow\tilde q(a,b)=0$)



$\mathbb{P}(p^\perp)=T_pQ$

$\bar q: p\in Q\to T_pQ$ — когда p пробегает Q, многообр-ие T_pQ, рассматр. как точки в $\mathbb{P}_n^\times$, заметают квадрику $Q^\times$ с матрицей Грама $A^\vee$ в двойств. базисе

$Q^\times\subset\mathbb{P}_n^\times$ наз. двойственной к квадрике Q.

в $\mathbb{P}_2^\times$ через 5 точек проходит квадрика, единств. и гладкая, если никакие 3 из точек не лежат на одной прямой.

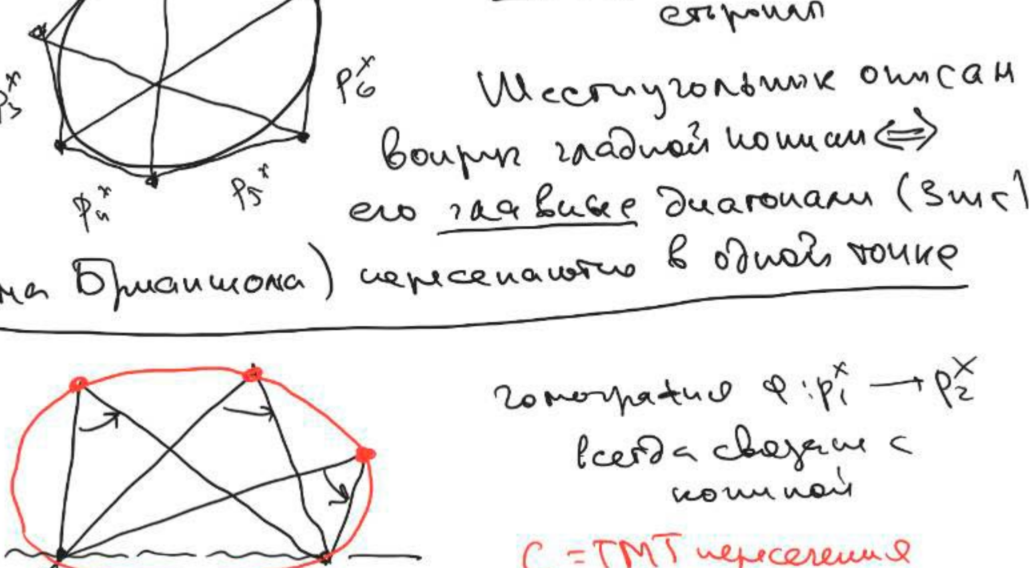
⇓

В $\mathbb{P}_2$ $\forall$ 5 прямых, никакие 3 из которых не конкур (не пересек. в одной точке)

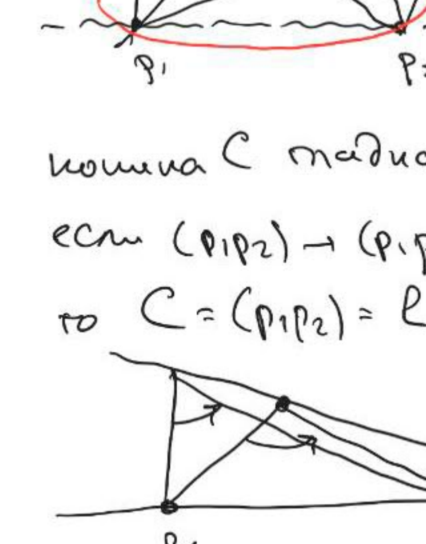
$\exists!$ гладкая квадрика, касающаяся всех пяти прямых (она двойственна к квадрике через 5 точек в $\mathbb{P}_2^\times$)

Пример 2: 6 точек лежат на конике

Три точки пересечения пр. противопол. сторон коллинеарны

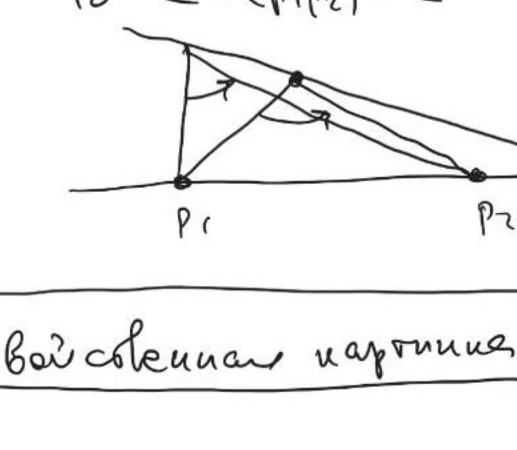


в $\mathbb{P}_2$



вершины двойств. шестиуг. стороны

Шестиугольник описан вокруг гладкой коники $\Leftrightarrow$ его главные диагонали (3 шт) (теорема Брианшона) пересекаются в одной точке

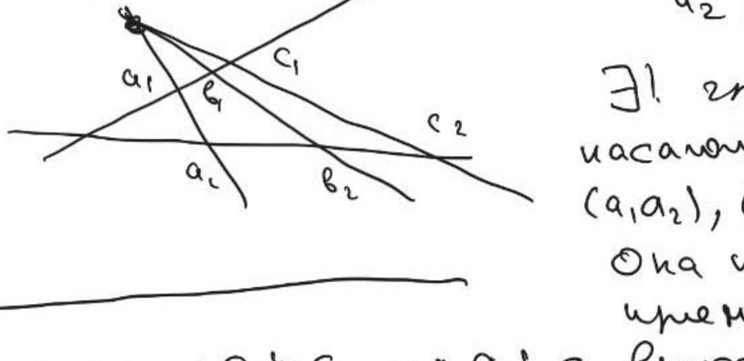


гомография $\varphi: p_1^\times\to p_2^\times$ всегда связана с коникой

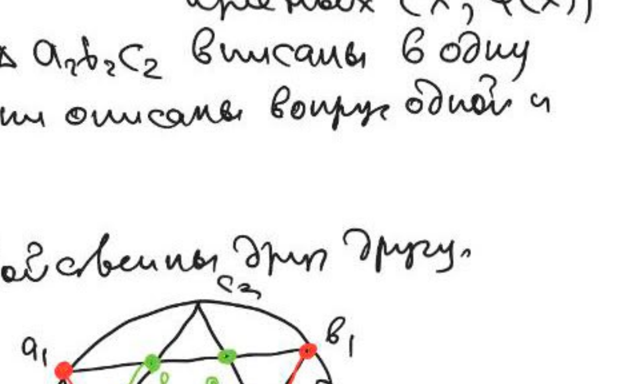
C = ГМТ пересечения $\ell\cap\varphi(\ell)$, $\ell\in p_1^\times$

коника C гладкая $\Leftrightarrow$ гомография неперспективна

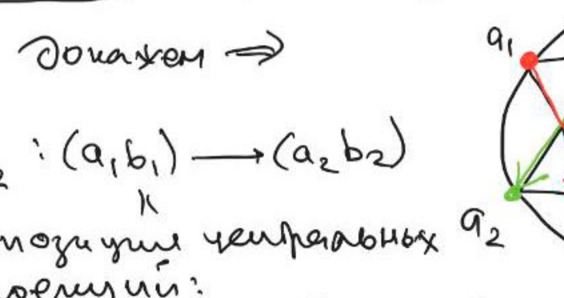
если $(p_1p_2)\to(p_1p_2)$, т.е. φ перспектива, то $C=(p_1p_2)=\ell$



Двойственная картинка:



если гомография не перспективна

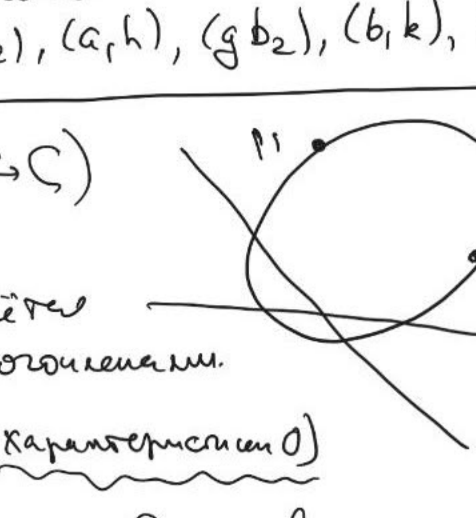


$\exists!$ гладкая коника, касающаяся ℓ_1,ℓ_2 и $(a_1a_2),(b_1b_2),(c_1c_2)$. Она касается всех прямых $(x,\varphi(x))$

Пример: $\Delta a_1b_1c_1$ и $\Delta a_2b_2c_2$ вписаны в одну и ту же конику $\Leftrightarrow$ они описаны вокруг одной и той же коники

Док-во: $\Rightarrow$ и $\Leftarrow$ двойственны друг другу.

докажем $\Rightarrow$



$C_{c_1c_2}:(a_1b_1)\to(a_2b_2)$ композиция центральных проекций:

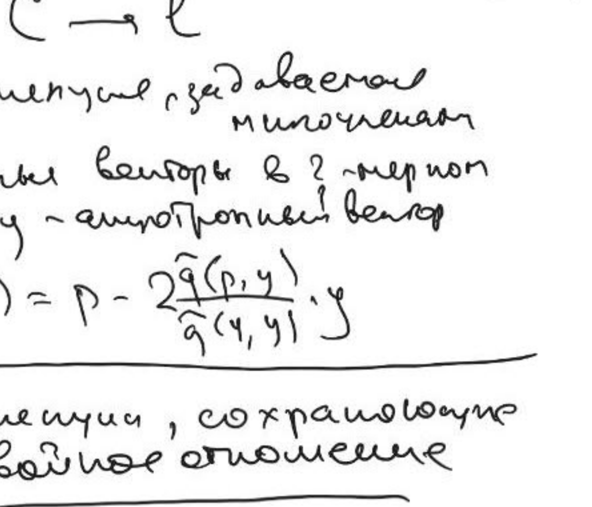
$(c_1: C\to(a_2,b_2))\circ(c_2:(a_1,b_1)\xrightarrow{\sim}C)$

$p\to a_2$, $a_1\to h$, $b_1\to k$, $g\to b_2$

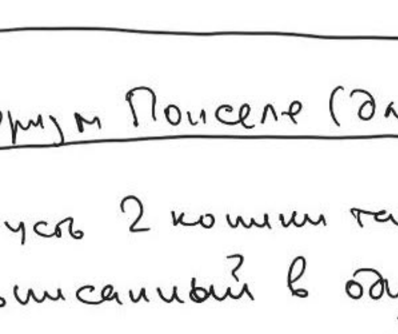
Она неперспективная $\Rightarrow$ $\exists!$ коника касающаяся всех прямых: $(pa_2),(a_1h),(gb_2),(b_1k),(a_1b_1),(a_2b_2)$

$(p_2: C\to\ell_2)\circ(p_1:\ell_1\xrightarrow{\sim}C)$

это гомография биективна и задаётся в координатах многочленами.



(поле алг. замкнуто и характеристики 0) $\quad\mathbb{P}(\Bbbk^n)$ $\quad\mathbb{P}(\Bbbk^n)$



$p: C\to\ell$ биекция, задаваемая многочлен.

p и x — изотропные векторы в 2-мерном пр-ве, точка y — анизотропный вектор

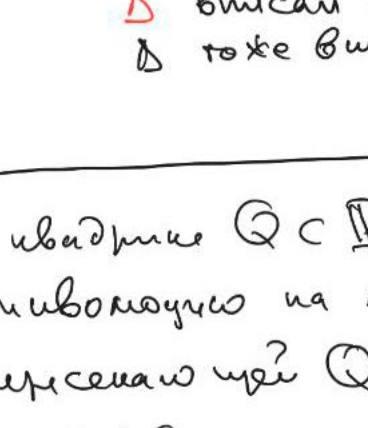
$$x=\sigma_y(p)=p-2\frac{\tilde q(p,y)}{\tilde q(y,y)}\cdot y$$

Гомографии — это биекции, сохраняющие двойное отношение

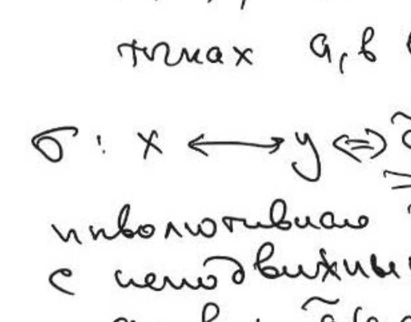
Поризм Понселе (для треугольников)

Пусть 2 коники таковы, что $\exists$ треугольник, вписанный в одну и описанный около другой

D — единственная коника, касающаяся 5 прямых !!! !!

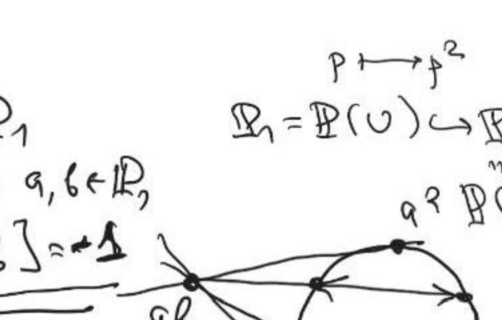


Тогда такой треугольник можно нарисовать, начав с любой точки на C, кроме точек $C\cap D$, и точек, в которых конику C встречает касательная и для C и для D (таких не больше 4)



Δ вписан в C, Δ тоже вписан в C $\Rightarrow$ оба описаны около коники

Гладкая квадрика $Q\subset\mathbb{P}_n$, $Q=V(q)$, задаёт инволюцию на любой прямой (a,b), пересекающей Q в двух различных точках $a,b\in Q$



$\sigma: x\leftrightarrow y\Leftrightarrow\tilde q(x,y)=0$

инволютивная гомография с неподвижными точками a и b: $\tilde q(a,a)=\tilde q(b,b)=0$ $\quad\boxed{\text{Сопряжение отн. } Q}$

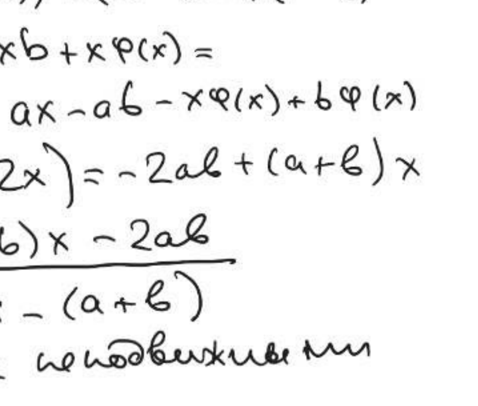
$\tilde q(x,*)$ это ненулевая линейная форма на ℓ $\exists!\, y\in\ell$: $\tilde q(x,y)=0$ и он линейно зависит от x.

$\tilde q(x,*)=(\alpha:\beta)\quad y=(-\beta:\alpha)$

$\quad\hat q(x)$

При любой инволюции $\sigma_{ab}:\mathbb{P}_1\to\mathbb{P}_1$ с неподвижными точками $a,b\in\mathbb{P}_1$ $\qquad p\mapsto p^2$, $\mathbb{P}_1=\mathbb{P}(U)\hookrightarrow\mathbb{P}_2=\mathbb{P}(S^2U)$

$\sigma_{ab}: x\leftrightarrow y\Leftrightarrow[x,y,a,b]=-1$



Сама формула $[x,\varphi(x),a,b]=-1$ задаёт дробно линейное преобразование $x\mapsto\varphi(x)$ $\quad\dfrac{(a-x)(b-\varphi(x))}{(a-\varphi(x))(b-x)}=-1$

$(a-x)(b-\varphi(x))=(a-\varphi(x))(x-b)$

$ab-a\varphi(x)-xb+x\varphi(x)=$

$=ax-ab-x\varphi(x)+b\varphi(x)$

$\varphi(x)(-a-b+2x)=-2ab+(a+b)x$

$\varphi(x)$ дробно линейно. $\qquad\varphi(x)=\dfrac{(a+b)x-2ab}{2x-(a+b)}$

проверим, что это инволюция с неподвижными точками a и b

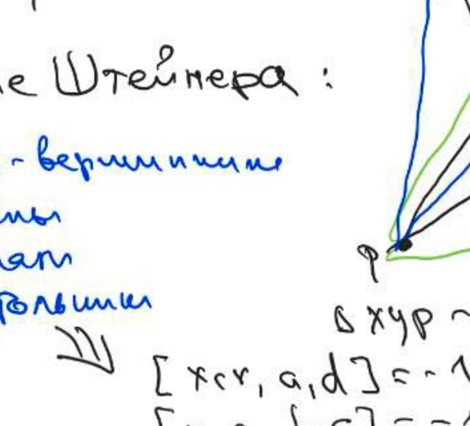
Опр: Точки x и y наз. сопряжёнными отн. гладкой квадрики $Q=V(q)$, если $\tilde q(x,y)=0$

$\Leftrightarrow$ x лежит на поляре точки y

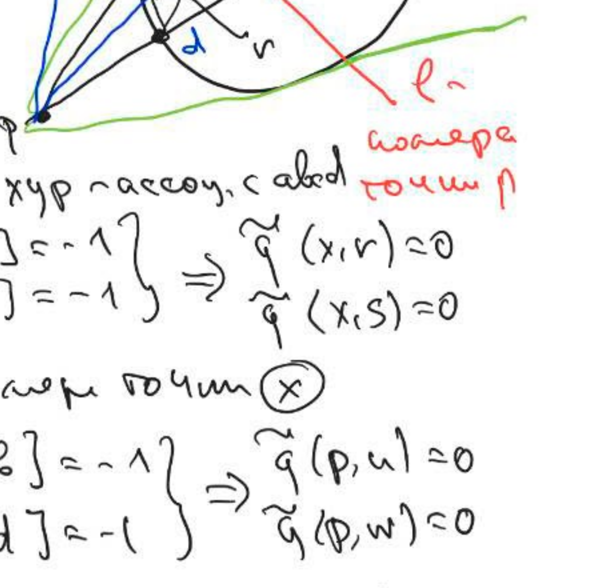
$\Leftrightarrow$ y лежит на поляре точки x.

Вывод: Точки x и y на прямой (a,b), пересекающей гладкую квадрику Q в различных точках $a,b\in Q$, сопряжены отн. Q (т.е. $\tilde q(x,y)=0$) если и только если $[x,y,a,b]=-1$.

Пример:



Построение Штейнера:



стороны 4-вершинника гармоничны сторонам треугольника

Δxyp ассоц. с $abcd$ $\qquad\ell$ — поляра точки p

$\Rightarrow$ $\left.\begin{matrix}[x,r,a,d]=-1\\ [x,s,b,c]=-1\end{matrix}\right\}\Rightarrow\begin{matrix}\tilde q(x,r)=0\\ \tilde q(x,s)=0\end{matrix}$

прямая (rs) = поляра точки x

$\left.\begin{matrix}[p,u,a,b]=-1\\ [p,w,c,d]=-1\end{matrix}\right\}\Rightarrow\begin{matrix}\tilde q(p,u)=0\\ \tilde q(p,w)=0\end{matrix}$

$(uw)=\ell$ — поляра точки p.