Лекция 12 мая. Классификация квадрик.

В мае поменялся zoom-ID этих лекций. Новый zoom ID был разослан 11 мая на корпоративную почту edu.hse.ru.

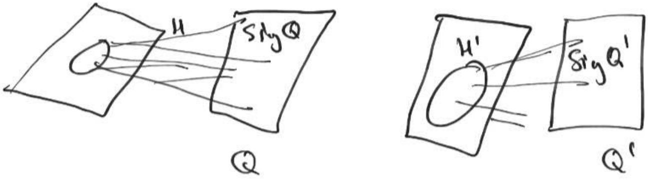
$\mathbb{P}_n = \mathbb{P}(V) \qquad Q = V(q),\ q \in S^2V^*$

любая квадрика является линейным соединением пространства $\mathrm{Sing}\,Q = \{p \in Q \mid \tilde{q}(p,v) = 0\ \forall v\} = \mathbb{P}(\ker \hat{q})$ (пространство особых точек)

и гладкой квадрики в любом дополнительном к $\mathrm{Sing}\,Q$ подпространстве $H < \mathbb{P}_n$

$\dim H + \dim \mathrm{Sing}\,Q = n-1,\quad H \cap \mathrm{Sing}\,Q = \varnothing$.

Опр Две квадрики проективно конгруэнтны, если они переводятся одна в другую линейным проективным преобразованием.



если $\dim \mathrm{Sing}\,Q \neq \dim \mathrm{Sing}\,Q'$ то Q и Q' не конгруэн

Две квадрики проективно конгруэнтны $\Leftrightarrow$ неособые квадрики $H \cap Q$ и $H' \cap Q'$ проективно конгруэнтны и $\dim \mathrm{Sing}\,Q = \dim \mathrm{Sing}\,Q'$!

Над алгебраически замкнутым полем две квадрики Q и Q' проективно конгруэнтны $\Leftrightarrow$

$$\dim \operatorname{Sing} Q = \dim \operatorname{Sing} Q'.$$

(или $\operatorname{rk} Q = \operatorname{rk} Q'$).

Над любым полем невырожденная квадратичная форма q на $V \simeq \Bbbk^{n+1}$ раскладывается в ортогональную сумму гиперболической и анизотропной. Т.е. q записывается в подходящих координатах как

$$\underbrace{\overset{H_2 \dotplus H_2 \dotplus H_2 \dots + H_2}{x_0x_1 + x_2x_3 + \dots + x_{2m}x_{2m+1}}}_{\text{гиперболическая форма размерности } 2(m+1)} = \underbrace{\alpha(x_{2m+2}, \dots, x_n)}_{\text{анизотропная форма}}$$

$$\boxed{\begin{matrix} 0 & 1/2 \\ 1/2 & 0 \end{matrix}}$$

$$-1 \leq m \leq \left[\frac{n-1}{2}\right]$$

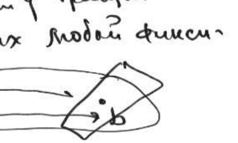
$$\alpha(x_{2m+2}, \dots, x_n) \neq 0 \text{ при } x \neq 0.$$

- Максимальная размерность изотропного подпр-ва формы q в V равна $m+1$
- Геометрически: максимальная размерность проективного пр-ва, целиком лежащего на квадрике равна m.

Планарность квадрики — макс. размерность проективного $L \subset Q$.

$$q \longrightarrow \operatorname{Isom} q \subset GL(V)$$
$$\operatorname{Isom} q = \{f : V \xrightarrow{\sim} V \mid \tilde{q}(fu, fw) = \tilde{q}(u, w)\}$$

группа изометрий. Линейные преобразования сохраняющие квадрику. $\operatorname{Isom} q$ транзитивно действует на изотропных подпр-вах любой фиксированной размерности.



$\Downarrow$

через любую точку m-планарной квадрики можно провести m-мерное проективное подпр-во, а проективных подпр-в размерности $> m$ на m-планарной квадрике нет вообще!

Квадрики разной планарности не конгруэнтны.

планарность m квадрики $Q \subset \mathbb{P}_n$ бегает в пределах $-1 \le m \le \frac{n-1}{2}$

-1-планарность $(m=-1) \Leftrightarrow$ квадрика пуста (гиперболическое слагаемое нулевое, уравнение квадрики анизотропно).

0-планарность $(m=0) \Leftrightarrow$ квадрика $\neq \emptyset$ но на ней нет прямых.

Квадрики максимальной планарности проективно конгруэнтны.

$n = 2m+1$ ($\dim V = 2m+2$ чётно) $\quad x_0x_1 + \dots + x_{2m}x_{2m+1} = 0$

$n = 2m+2$ ($\dim V = 2m+3$ нечётн) $\quad x_0x_1 + \dots + x_{2m}x_{2m+1} = a \cdot x_{2m+2}^2$

$$x_{2k} \to \frac{1}{a} x_{2k}$$

$$x_0x_1 + \dots + x_{2m}x_{2m+1} = x_{2m+2}^2$$

Если над полем $\Bbbk$ есть разумная классификация анизотропных форм, то есть и разумная классификация квадрик.

Например, над $\mathbb{R}$!

$$x_0x_1+\dots+x_{2m}x_{2m+1} = x_{2m+2}^2+\dots+x_n^2 \qquad (*)$$

С точностью до проективной конгруэнтности, гладкая вещественная квадрика однозначно определяется своей планарностью m.

$$(**)$$

$$\left.\begin{aligned} x_{2i} &= t_i + t_{m+1+i} \\ x_{2i+1} &= t_i - t_{m+1+i} \\ x_{2i}x_{2i+1} &= t_1^2 - t_{m+1+i}^2 \end{aligned}\right| \rightarrow \begin{aligned} t_0^2+\dots+t_m^2 &= \\ &= t_{m+1}^2+\dots+t_n^2 \end{aligned}$$

квадрики планарности m

$\exists!$ квадрика планарности -1 (т.е. пустая)

это $t_0^2+\dots+t_n^2=0$

$\exists!$ квадрика планарности 0 $\quad t_0^2=t_1^2+\dots+t_n^2$

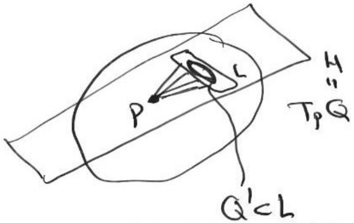
(эллиптическая квадрика)

не пуста и не содержит прямых.

Все остальные квадрики называются гиперболическими. Через каждую точку гиперболической квадрики можно провести прямую.

Лемма Пусть Q – гладкая квадрика в $\mathbb{P}_n$, $H\subset\mathbb{P}_n$ – гиперплоскость. Тогда $Q\cap H$ либо гладкое, либо является конусом с вершиной в одной точке над неособой квадрикой в $(n-2)$-мерном подпр-ве $L \subset H$, не проходящем через эту точку. Второй случай означает, что $H = T_pQ$ для некоторой точки $p \in Q$ и эта точка p как раз и является единственной особой точкой квадрики $H \cap Q$.

Более того, неособая квадрика в L, конусом над которой является квадрика $Q \cap H$ имеет планарность на 1 меньше чем Q.



$Q' \subset L$
имеет планарность на 1 меньше чем Q.

Док-во: $H = \mathbb{P}(U)$ $U < V$
подпр-во коразмерности 1

$$\hat{q} : V \longrightarrow V^* \quad v \longmapsto \left(u \longmapsto \tilde{q}(u,v)\right)$$

невырожденность $Q \Leftrightarrow \ker \hat{q} = 0$

$$\ker\left(\hat{q}|_U\right) = U \cap \operatorname{Ann} U$$

$$\{ w \in U \mid \tilde{q}(w,u) = 0 \ \forall u \in U \}$$

$$\dim \operatorname{Ann} U = \dim V - \dim U = 1$$

Есть ровно 2 возможности:

(1) $U \cap \mathrm{Ann}\,U = 0 \Rightarrow \hat{q}|_U$ невырожден, $Q \cap H$ гладкая

(2) $\mathrm{Ann}\,U \subset U$ $\quad \exists\, w \in U : \hat{q}(w,u) = 0 \ \forall u \in U$

$$U = \mathrm{Ann}\,w \quad , \quad p = \Bbbk \cdot w \in Q$$

$$H = \mathbb{P}(U) = \mathbb{P}(p^{\perp}) = T_pQ$$

$$\mathrm{Sing}\,(Q \cap T_pQ) = \{p\}$$

$Q \cap T_pQ$ это конус с вершиной p над неособой квадрикой в не проходящем через p $(n-2)$-мерном подпр-ве $\underline{L \subset T_pQ} \setminus p$.

$L = \mathbb{P}(W)$ $\quad W \subset V$ имеет $\operatorname{codim} W = 2$.

$q|_W$ невырождене $\Rightarrow V = W \oplus W^{\perp}$

$\dim W^{\perp} = 2$

$W \subset U \quad w \in U^{\perp} \Rightarrow$ w - изотропный вектор, лежащий в $W^{\perp}$

$W^{\perp}$ - гиперболическая плоскость.

($q|_{W^{\perp}}$ невырождено и содержит изотропный вектор)

$\Downarrow$

размерность гиперболического слагаемого у $q|_W$ на 2 меньше, чем у q. $\Rightarrow$

$$\boxed{x_0x_1 + x_2x_3 = 0}$$

$\Downarrow$

квадрика Сегре. S

$\mathbb{P}_3 = \mathbb{P}(\mathrm{Mat}_{2\times 2}(\Bbbk))$.

$S \subset \mathbb{P}_3$ — матрицы ранга 1

$$\begin{matrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \neq 0 \text{, но } ad-bc=0 \qquad \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \\ \parallel \\ \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \end{pmatrix} (\xi_0\ \xi_1) = \begin{pmatrix} x_0\xi_0 & x_0\xi_1 \\ x_1\xi_0 & x_1\xi_1 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \end{matrix}$$

где $x_0 : x_1$ = к-т пропорциональности между строками матрицы $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$

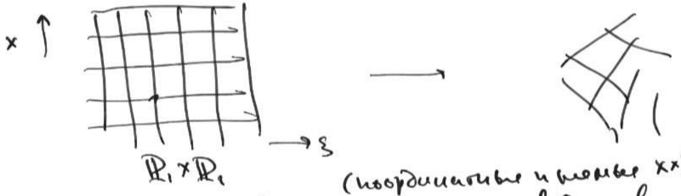
$\xi_0 : \xi_1$ = к-т пропорциональности между столбцами матрицы $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$

$$\mathbb{P}_1 \times \mathbb{P}_1 \longrightarrow \mathbb{P}_3 = \mathbb{P}(\mathrm{Mat}_{2\times 2}(\Bbbk)).$$

$$\begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \end{pmatrix} (\xi_0\ \xi_1) \longmapsto \begin{pmatrix} x_0\xi_0 & x_0\xi_1 \\ x_1\xi_0 & x_1\xi_1 \end{pmatrix}$$

вложение Сегре биективно отображает $\mathbb{P}_1 \times \mathbb{P}_1$ на квадрику Сегре $\det A = 0$

Матрицы с фиксированным к-том пропорциональности между строками составляют 2-мерное векторное пр-во в $\mathrm{Mat}_{2\times 2}$.



$\mathbb{P}_1 \times \mathbb{P}_1$ (координатные прямые $x \times \mathbb{P}_1$ и $\mathbb{P}_1 \times \xi$

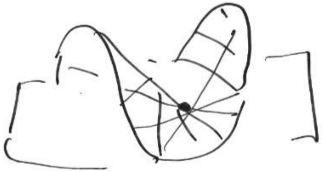
отображение Сегре прямые переводит в прямые

Вывод: На квадрике Сегре есть 2 семейства прямых, таких что: (1) прямые в каждом семействе попарно скрещиваются

(2) любые 2 прямые из разных семейств пересекаются

(3) через каждую точку квадрики проходит ровно по одной прямой из каждого семейства

Никаких других прямых на квадрике Сегре нет.

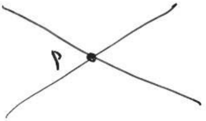


$\forall p \in S$

$T_pS \cap S$

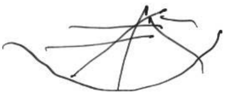
особая квадрика с единственной особой точкой p

$T_pS = \mathbb{P}_2$



Любая прямая $l \ni p$, $l \subset S$ лежит в $T_pS \Rightarrow$ l - одна из двух прямых и семейств прямолинейных образующих квадрики S, проходящих через p.

См: крыша велотрека в Крылатском



Шуховская телебашня (на Шаболовке).

Квадрики максимальной планарности в $\mathbb{P}_5$
(квадрика Плюккера).

$V \simeq \mathbb{k}^4$ $\qquad \mathbb{P}_3 = \mathbb{P}(V)$. $\qquad e_1, e_2, e_3, e_4$ - базис в V

$\Lambda^2 V$ - грассмановы квадратичные формы от векторов $v \in V$

$\quad ||$

линейная оболочка всевозможных произведений

$u \wedge w$, $u, w \in V$ $\qquad e_i \wedge e_j \quad i<j$

$\dim \Lambda^2 V = \binom{4}{2} = 6 \qquad \underline{e_{12} = e_1 \wedge e_2, e_{13}, e_{14}, e_{23}, e_{24}, e_{34}}$

$\mathbb{P}_5 = \mathbb{P}(\Lambda^2 V)$

Отображение Плюккера:

$$\left\{\text{прямые в } \mathbb{P}_3\right\} \quad (ab) \longmapsto a \wedge b \quad \xrightarrow{\qquad\qquad} \mathbb{P}_5(\Lambda^2 V)$$

$$||$$

$$\left\{\begin{array}{l}\text{2-мерные векторные}\\ \text{подпр-ва } U \subset V\end{array}\right\} \quad \underset{\substack{\uparrow \\ \text{2-мерное в } V}}{U} \longmapsto \underset{\nwarrow \ \text{1-мерное в } \Lambda^2 V}{\Lambda^2 U} \subset \Lambda^2 V$$

Образ отображения Плюккера состоит из разложимых квадратичных форм $\omega \in \Lambda^2 V : \exists a, b \in V : \omega = a \wedge b$.

$\omega \in \Lambda^2 V$ разложима $\Leftrightarrow \omega \wedge \omega = 0$

$$\omega = a \wedge b \Rightarrow \omega \wedge \omega = a \wedge b \wedge a \wedge b = 0$$

$\omega = \underline{\xi_1 \wedge \xi_2 + \xi_3 \wedge \xi_4}$ в подходящем базисе

либо

$\boxed{\omega = \xi_1 \wedge \xi_2}$

$$\Downarrow$$

$$\omega \wedge \omega = 2 \xi_1 \wedge \xi_2 \wedge \xi_3 \wedge \xi_4 \neq 0$$

$$\Downarrow$$

ω неразложима

$\omega\wedge\omega=0$ — это квадрика, задаваемая симметричной билинейной формой $\tilde g$ на $\Lambda^2 V$, которая определяется равенством

$$\boxed{\underset{\Lambda^4}{\underset{\cap}{\omega_1\wedge\omega_2}} = e_1\wedge e_2\wedge e_3\wedge e_4\cdot \underset{K}{\underset{\cap}{\tilde g}}(\omega_1,\omega_2)}$$

в другом базисе e_1', e_2', e_3', e_4'

$$e_1'\wedge e_2'\wedge e_3'\wedge e_4' = e_1\wedge e_2\wedge e_3\wedge e_4\cdot\det C_{ee'}$$

Такая форма $\tilde g$ единственна с точностью до умножения на $\neq 0$ константу.

$\tilde g$ симметрична, т.к. $\omega_1\wedge\omega_2=\omega_2\wedge\omega_1$

$\tilde g$ невырождена, т.к. её матрица Грама в базисе $e_{ij}=e_i\wedge e_j$ имеет вид:

$$\begin{array}{c|cccccc}
 & e_{12} & e_{13} & e_{14} & e_{23} & e_{24} & e_{34} \\
\hline
e_{12} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\
e_{13} & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\
e_{14} & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
e_{23} & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
e_{24} & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
e_{34} & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0
\end{array}$$

$e_{12}\wedge e_{12} =$
$= e_1\wedge e_2\wedge e_1\wedge e_2 = 0$

$$\boxed{\begin{array}{l} e_{12}\wedge e_{34} = \\ = e_1\wedge e_2\wedge e_3\wedge e_4 \\ \tilde g(e_{12},e_{34}) = 1\end{array}}$$

$e_{24}\wedge e_{13} = e_2\wedge e_4\wedge e_1\wedge e_3 =$
$= e_1\wedge e_2\wedge e_3\wedge e_4.$

В координатах x_{ij} относительно базиса e_{ij}

$$x_{12}x_{34} - x_{13}x_{24} + x_{14}x_{23} = 0$$

невырождена и гиперболична (квадрика максимальной планарности)

Это множество прямых в $\mathbb{P}_3$!

Лемма $\tilde{q}(l_1, l_2) = 0 \Leftrightarrow l_1 \cap l_2 \neq 0$ в $\mathbb{P}_3$

(для прямых $l_1, l_2 \subset \mathbb{P}_3$)

$l_1 \cap l_2 = \emptyset$ $\quad l_1 = (ab) \quad l_2 = (cd)$

где a, b, c, d — это базис в V

$l_1 \wedge l_2 = a \wedge b \wedge c \wedge d \neq 0$ ← базисный вектор в $\Lambda^4 V = \mathbb{k}$

$l_1 \cap l_2 \neq 0$ $\quad l_1 = (ab)$, $l_2 = (ac)$ $\quad a = l_1 \cap l_2$

$l_1 \wedge l_2 = a \wedge b \wedge a \wedge c = 0$

Сл1 $T_l Q \cap Q = \{ l' \mid l \cap l' \neq \emptyset \}$

Сл2 Отображение Плюккера инъективно, т.е. является биекцией между множеством прямых в $\mathbb{P}_3$ и квадрикой Плюккера в $\mathbb{P}_5$.

$l_1 \neq l_2 \Rightarrow \exists l : \quad l \cap l_1 \neq \emptyset \quad l \cap l_2 = \emptyset$

т.к. $\tilde{q}(l_1, l) = 0 \quad \tilde{q}(l_2, l) \neq 0$

$\Downarrow$

l_1 и l_2 — это разные точки в $\mathbb{P}_5$.
