Лекция 19 мая. Классификация квадрик (про...

Две аффинные квадрики $Q, Q' \subset \mathbb{A}(V)$ аффинно конгруэнтны, если и только если их проективные замыкания $\overline{Q}, \overline{Q'} \subset \mathbb{P}(W)$, где $W = e_0 \oplus V$, переводятся друг в друга таким проективным преобразованием $\varphi : \mathbb{P}(W) \xrightarrow{\sim} \mathbb{P}(W)$, которое переводит в себя бесконечно удалённую гиперплоскость $L_\infty = \mathbb{P}(V) \subset \mathbb{P}(W)$, L_∞ задаётся уравнением $\underline{x_0 = 0}$.

Лемма: Если проективная квадрика $Q \subset \mathbb{P}(W)$ и гиперплоскость $H \subset \mathbb{P}(W)$ таковы, что $Q \not\subset H$ и $H \not\subset Q$, то $\underline{Q \cap H}$ однозначно восстанавливается по $Q \setminus H$ (т.е. Q однозначно восстанавливается по $Q \setminus H$). [поле бесконечно]

- квадрика Q гладкая $\Rightarrow$ на Q можно выбрать $n+2$ точки вне H такие, что никакие $(n+1)$ не лежат в одной гиперплоскости $\rightsquigarrow$

поляритет квадрики Q $\bar{q} : \mathbb{P}_n \xrightarrow{\sim} \mathbb{P}_n^\times$
$p \longmapsto \mathbb{P}(p^\perp)$

выбранные точки $p_1, \dots, p_{n+2}$ переводит в касательные гиперплоскости $T_{p_1}, \dots, T_{p_{n+2}}$

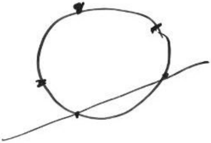
$\Downarrow$

квадратичная форма q задаётся однозначно с точностью до пропорциональности

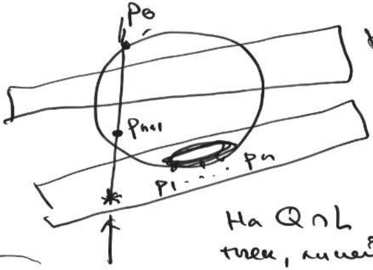
насчёт выбора точек: По индукции.

__На $\mathbb{P}_1$__: гладкие квадрики (т.е. пары точек) однозначно задаётся дополнением до гиперплоского сечения

На $\mathbb{P}_2$: выбор существует.



Любые 3 точки годятся



Проводим $L \neq H$ которая пересекает $L = \mathbb{P}_{n-1}$ Q по гладкой квадрике.

На $Q \cap L$ можно выбрать n точек, линейно порождающих L.

Выберем в L ещё одну точку p_{n+2} __вне__:
$L \cap H$, $L \cap T_{p_0}Q$, $n-1$ гиперплоскостей высекаемых из L гиперплоскостями, проходящими через p и какие-нибудь $n-1$ точек из $p_1, \dots, p_{n-1}$

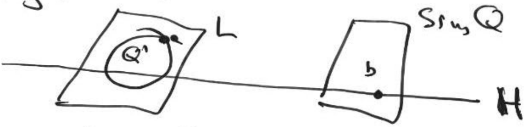
(нужно, чтобы поле было бесконечно)

(1) • На Q есть гладкая точка вне H
(2) • На Q есть особые точки вне H.

Q особа

$\boxed{1}$ $a \in Q \setminus (H \cup \mathrm{Sing}\, Q)$

Q - это конус = линейное соединение $\mathrm{Sing}\, Q$ и гладкой квадрики в дополнительном к $\mathrm{Sing}\, Q$ подпр-ве $L \subset \mathbb{P}_n$, $L \ni a$



$Q' \subset L$ — гладкая

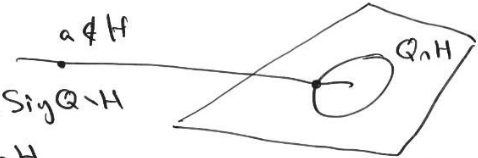
Q' однозначно восстанавливается по $Q' \setminus H$

$\operatorname{Sing} Q$ тоже однозначно восстанавливается по $Q \setminus H$.

$b \in \operatorname{Sing} Q \cap H \Rightarrow (ab)$ целиком лежит на квадрике

все точки кроме b лежат в $Q \setminus H$

(2)



если $a \in \operatorname{Sing} Q \setminus H$

$\forall\, b \in Q \cap H$

прямая $(ab) \subset Q$ и все точки кроме b лежат вне H

Замыкание квадрик.

$Q \subset \mathbb{A}^n \subset \mathbb{P}_n = \mathbb{A}^n \sqcup L_\infty$

$\overline{Q} \subset \mathbb{P}_n : \overline{Q} \cap \mathbb{A}_n = Q$.

$Q_\infty = \overline{Q} \cap L_\infty$

$\mathbb{A}_n = \mathbb{A}(V) = \mathbb{A}(\Bbbk^n)$ с координатами $x_1, \dots, x_n$

$\mathbb{P}_n = \mathbb{P}(W) = \mathbb{P}(\Bbbk^{n+1})$ с координатами $x_0, x_1, \dots, x_n$

$\mathbb{A}_n = U_0$ — стандартная аффинная карта в $\mathbb{P}_n$

$U_0 = e_0 + V = \{x_0 = 0\}$

Квадрика Q имеет аффинное уравнение

$$f_2(x_1, \dots, x_n) + 2f_1(x_1 \dots x_n) + f_0 = 0$$

$\overline{Q}$ имеет уравнение

$$f_2(x_1, \dots, x_n) + 2x_0 f_1(x_1 \dots x_n) + \overset{\beta_{00}}{\overset{\|}{f_0}} x_0^2 = 0$$

и матрицу Грама $B = \begin{array}{c} \\ f_1 \left\{ \right. \end{array} \begin{pmatrix} \beta_{00} & \beta_{01} \dots \beta_{0n} \\ \beta_{01} & \\ \vdots & \begin{matrix} B_\infty \\ \| \\ \beta_{ij} \end{matrix} \\ \beta_{0n} & \underbrace{\qquad}_{f_2} \end{pmatrix} f_2$

- $\overline{Q}$ и $Q_\infty = \overline{Q} \cap L_\infty$ обе гладкие

  гладкие центральные квадрики

  $\det B \neq 0 \quad \det B_\infty \neq 0$

- $\overline{Q}$ гладкая, а Q_∞ особая $\Leftrightarrow$ L_∞ является касательным пр-вом к $\overline{Q}$ в некоторой точке $p \in \overline{Q} \cap L_\infty$

  в этом случае Q_∞ это конус с единств. особой точкой p над гладкой квадрикой в $\mathbb{P}_{n-2} \subset L_\infty$

  $\det B \neq 0, \ \det B_\infty = 0$.

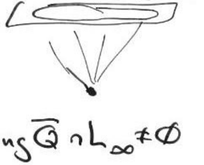
  параболоиды

- $\overline{Q}$ особая, Q_∞ – гладкая.

  $\det B = 0, \ \det B_\infty \neq 0 \Rightarrow \operatorname{cork} B = 1$

  $\overline{Q}$ имеет ровно одну особую точку $p \in U_0$

  и является конусом над гладкой квадрикой $Q_\infty \subset L_\infty$



  простые конусы

- $\overline{Q}$ и Q_∞ обе особые $\Leftrightarrow \operatorname{Sing}\overline{Q} \cap L_\infty \neq \emptyset$

  либо $\overline{Q}$ имеет ровно одну особую точку и она на бесконечности

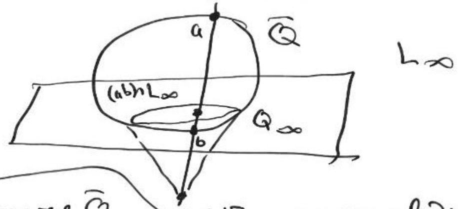
  либо $\operatorname{Sing}\overline{Q}$ имеет размерность ≥ 1 и автоматически пересекает L_∞

цилиндры.

Гладкие центральные квадрики

$\det B \neq 0 \quad \det B_\infty = 0$

у L_∞ имеется полюс, лежащий в U_0.



$c \in U_0$ — центр квадрики Q

либо касается $\overline{Q}$ на бесконечности (т.е. явл. асимптотой)

либо не пересекает Q

Любая прямая, прох. через центр, пересекает квадрику по паре точек a, b, гармонически сопряжённым друг другу точкам c и $(ab)\cap L_\infty$

$$[(ab)\cap L_\infty, c, a, b] = -1$$

c является серединой отрезка $[a, b]$ в аффинной карте на (ab), для которой $(ab)\cap L_\infty$ является ∞.

c — это верхняя строка матрицы $B^\vee$, присоединённой к B.

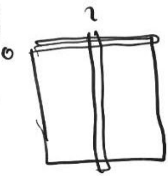
$$c = (1, 0, \dots, 0)\cdot B^{-1}$$

прообраз x_0 при полярном преобразовании отн. Q $\quad x \longmapsto xB$

$x_0 = 0$ уравнение гиперплоскости L_∞

$$c = (\underset{\det B_\infty}{\underset{\shortparallel}{B_{00}}} : -B_{01} : \ldots : (-1)^n B_{0n})$$ в $\mathbb{P}_n$

B_{0i} = минор



аффинные координаты центра:

$$c = \left(-\frac{B_{01}}{B_{00}}, \frac{B_{02}}{B_{00}}, \ldots, (-1)^n \frac{B_{0n}}{B_{00}}\right)$$
в $\mathbb{A}^n$

В аффинном репере с центром в c и ортогональным базисом формы $f_2 = B_\infty$ $e_1, \ldots, e_n$ в $V = c^\perp$

квадрика $\overline{Q}$ запишется уравнением с диагональной матрицей Грама

$$\underline{b_0x_0^2 + \ldots + b_nx_n^2 = 0} \leftarrow \begin{pmatrix} b_0 & & & \\ & b_1 & & 0 \\ & & \ddots & \\ 0 & & & b_n \end{pmatrix}$$

Q запишется аффинным уравнением

$$\boxed{c_1x_1^2 + c_2x_2^2 + \ldots + c_nx_n^2 = 1}$$
где $c_i = -b_i/b_0$

над $\underline{\text{полем } \mathbb{C}}$ можно перемасштабировать $x_i \mapsto \lambda x_i$

так, что все $c_i = 0$

над алгебраически замкнутым полем все гладкие центральные квадрики аффинно конгруэнтны.

$\underline{\text{Над } \mathbb{R}}$: уравнение можно сделать таким:

$$x_1^2 + \ldots + x_p^2 - x_{p+1}^2 - \ldots - x_{\underbrace{p+s}_{\shortparallel}}^2 = \pm 1$$

n

где либо $s<p$

либо $p=s$ и в правой части $\underline{\underline{+1}}$

Все эти квадрики попарно аффинно не конгруэнтны.

Обозначение $Q_{n,m} \subset \mathbb{R}_{\underline{\underline{n+1}}}$ гладкая вещественная проективная квадрика размерности n и планарности m. $\boxed{\frac{n}{2} \geq m \geq -1}$

$$\overline{Q} \setminus L_\infty = Q \qquad x_1^2+\dots+x_p^2-x_{p+1}^2-\dots-x_{p+s}^2=\pm 1$$

$$Q_\infty \qquad x_1^2+\dots+x_p^2-x_{p+1}^2-\dots-x_{p+s}^2=0$$

$\overline{Q}$ имеет планарность $\begin{cases} s & \text{если справа } +1 \\ s-1 & \text{если справа } -1 \end{cases}$

Q_∞ всегда имеет планарность $s-1$

есть ровно одна квадрика планарности $\textcircled{-1}$ $\varnothing$

$s=0$ справа -1

$$x_1^2+\dots+x_n^2=-1$$

есть ровно одна квадрика планарности 0, у которой $Q_\infty=\varnothing$ (имеет планарность -1)

$x_1^2+\dots+x_n^2=1$ Эллипсоид

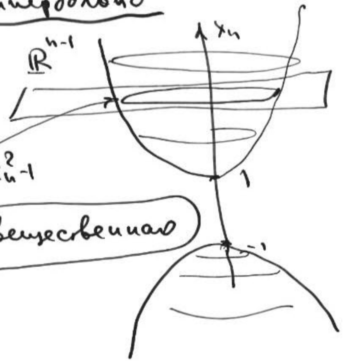
все остальные наз. гиперболоидами

среди гиперболоидов ровно 1 0-планарный

$$\boxed{x_1^2+\ldots+x_{n-1}^2 = x_n^2-1}$$

$$(x_1^2+\ldots+x_{n-1}^2 - x_n^2 = -1)$$

двуполостный гиперболоид



Упр:
- Это Единственная несводимая вещественная квадрика

Параболоиды $\underline{\det B \neq 0}$ $B_{00} = \det B_\infty = 0$

$$c = (1:0:\ldots:0)B^\vee = (\underset{\underset{B_{00}}{\shortparallel}}{0} : -B_{01} : \ldots : (-1)^n B_{0n})$$

точка касания квадрики $\overline{Q} \subset \mathbb{P}_n \subset H_\infty = \mathbb{P}(V)$

Ограничение формы B на любое подпр-во $U \subset V$, не содержащее c, невырождено.

Зафиксируем такое U, $U \oplus c = V$,

выберем в U ортогональный базис формы $\overline{q}|_U$.

$W = \Bbbk \cdot e_0 \oplus V = U \oplus U^\perp \Rightarrow$ $\overline{q}|_{U^\perp}$ невырождено

$c \in U^{\perp}$ изотропен $\Rightarrow U^{\perp} \simeq H_2$ гиперболическая плоскость. $\Rightarrow$ в $U^{\perp}$ можно выбрать гиперболический базис $\underbrace{e_0, e_n}$: $e_0 \in c$

Выберем ортогональный базис $e_1, \dots, e_{n-1}$ в U.

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & b_1 & & & 0 & 0 \\ 0 & & \ddots & & & 0 \\ 0 & & 0 & & \ddots & 0 \\ 0 & & & & b_{n-1} & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \begin{aligned} U &= \langle e_1 \dots e_{n-1} \rangle \\ U^{\perp} &= \langle e_0, e_n \rangle \end{aligned}$$

однородное уравнение параболоида превратится

в $\quad -2x_0x_n = b_1x_1^2 + \dots + b_{n-1}x_{n-1}^2$

в карте U_0, где $x_0 = 1$, получаем уравнение

$$\boxed{c_1x_1^2 + \dots + c_{n-1}x_{n-1}^2 = 2x_n} \quad \text{где } c_i = -b_i$$

над алг. замкнутым полем можно сделать все $c_i = 1$. $\Rightarrow$ все параболоиды аффинно конгруэнтны.

над $\mathbb{R}$: $\quad x_1^2 + \dots + x_p^2 \underbrace{- x_{p+1}^2 - \dots - x_{n-1}^2}_{s} = 2x_n$

где $\boxed{p \geq s}$

аффинно не конгруэнтны, т.к. у них разные планарность $\underline{s}$ (у $\overline{Q}$ планарность s)

0-планарный параболоид

$$x_1^2 + \dots + x_{n-1}^2 = 2x_n$$

наз. эллиптическим, все остальные — гиперболическими

Конусы $\det B_\infty \neq 0$ $\det B = 0$.

$\operatorname{rk} B = n-1$

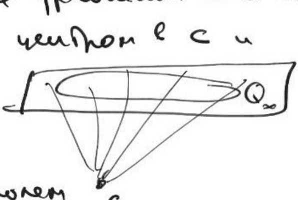
$$\boxed{B^\vee \cdot B = B \cdot B^\vee = \underset{0}{\underset{\parallel}{\det B}} \cdot E}$$

строки матрицы $B^\vee$ лежат в ядре B

Особая точка конуса $C = (B_{00} : -B_{01} : \dots : (-1)^n B_{0n})$.

Если дополнить C до ортогонального базиса формы $\bar q$ в W векторами $e_1, \dots, e_n \in V$ ($q|_V$ невырождено!) квадрика $\bar Q$ запишется уравнением $\boxed{b_1 x_1^2 + \dots + b_n x_n^2 = 0}$

это одновременно однородное уравнение для $\bar Q$ и аффинное уравнение для Q в аффинном репере с центром в C и базисом $e_1, \dots, e_n$



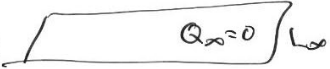
- Над алг. замкнутым полем все конусы аффинно конгруэнтны
- над $\mathbb{R}$ различаются планарностью

$$x_1^2 + \dots + x_p^2 \underbrace{- x_{p+1}^2 - \dots - x_n^2}_{s} = 0$$

планарность $\overline{Q}$ равна s, а планарность Q_∞ $\underline{\underline{s-1}}$

Важно: при $\underline{\underline{S=0}}$ (планарность $=0$)

$x_1^2+\dots+x_n^2=0$



Двойные точки: конус • c

с вершиной c над пустой квадрикой $Q_\infty\subset L_\infty$