Лекция 26 мая. Евклидовы квадрики.

Контрольная №7 «Евклидовы квадрики и сферы» будет в четверг 11 июня с 10:00 до 12:00.

Итоговый письменный экзамен за второй семестр будет в четверг 18 июня с 10:00 до 13:30.

Оба мероприятия состоятся на платформе online.hse.ru по тому же регламенту, как и контрольная №6.

Неспособность зайти на сайт и/или своевременно загрузить туда решения

не является уважительной причиной для неучастия.

Аффинная классификация квадрик (над $\mathbb{R}$)

- Аффинная квадрика $Q \subset \mathbb{A}(V)$ однозначно задаётся проективными квадриками $\overline{Q} \subset \mathbb{P}(W)$, $Q_\infty \subset \mathbb{P}(V)$, где $W = e_0 \cdot \Bbbk \oplus V$ $\mathbb{P}(W)$ – проективное замыкание $\mathbb{A}(V)$, $\mathbb{P}(V) = L_\infty \subset \mathbb{P}(W)$ – бесконечно удалённая гиперплоскость.

Центральные гладкие квадрики: $\overline{Q}$ и Q_∞ обе гладкие

над $\mathbb{R}$ $$\underbrace{x_1^2 + \dots + x_p^2 - x_{p+1}^2 - \dots - x_{p+m}^2}_{n \text{ штук}} = \pm 1$$ что Q_∞ надо поставить 0

$$\left[\begin{array}{l} p \geq m \text{ и если } p = m \text{, то справа стоит } +1, \\ \overline{Q} = \left[\begin{array}{l} Q_{n-1,m}, \text{ если справа } +1 \text{ (планарность } m) \\ Q_{n-1,m-1}, \text{ если справа } -1 \text{ (планарность } m-1) \end{array}\right. \end{array}\right.$$

$Q_\infty = Q_{n-2,m-1}$ (планарность $m-1$)

Параболоиды: $\overline{Q}$ гладкая, Q_∞ особая (автоматически: $L_\infty = T_p Q$, $p \in L_\infty \cap Q$ это единственная особая точка)

$$\underbrace{x_1^2+\dots+x_p^2-x_{p+1}-\dots-x_{p+m}}_{n-1 \text{ штук}} = 2x_n$$

над $\mathbb{R}$ $\overline{Q} = Q_{n-1,m}$ m планарна

Q_∞ – это конус с вершиной p над квадрикой $Q_{n-3,m-1}$

Простые конусы: $\overline{Q}$ особая, Q_∞ гладкая (автоматически: у $\overline{Q}$ есть единственная особая точка $p \in \mathbb{A}(V) = U_0$ и Q это конус с вершиной p над гладкой квадрикой $Q_\infty \subset H_\infty$)

$$\underbrace{x_1^2+\dots+x_p^2-x_{p+1}^2-\dots-x_{p+m}^2}_{n \text{ штук}} = 0$$

Цилиндры: обе квадрики и $\overline{Q}$, и Q_∞ особые.

$V = V_1 \oplus V_2$ $V_1 = \ker Q_\infty$

$Q = V(f)$ $f(x) = f_2(x) + f_1(x) + f_0$ $f_2 \in S^2V^*$

$Q_\infty = V(f_2) \subset \mathbb{P}(V)$. $f_2\big|_{V_2}$ невырождена.

Выберем произвольный базис $\underbrace{e_1, \dots, e_k}_{V_2}, \underbrace{e_{k+1}, \dots, e_n}_{\ker f_2}$

уравнение f_2 перестаёт зависеть от переменных

$x_{k+1}, \dots, x_n$

$$Q = \mathbb{A}^{n-k} \times Q_{red} \qquad Q_{red} = \mathbb{A}(e_1, \dots, e_k)$$

квадрики Q_{red} относится к одному из типов; рассмотренных выше — либо гладкая центральная, либо параболоид либо конус.

Примеры: в аффинном $\mathbb{R}^2$ дана непустая $Q \subset \mathbb{R}^3$

$\overline{Q}$ — непустая проективная квадрика.

если $\overline{Q}$ гладкая, то $\overline{Q} = Q_{1,0}$ — коника Веронезе.

гладкие центральные $\quad Q_\infty = Q_{0,0} \neq \emptyset \qquad Q_\infty = Q_{0,-1} = \emptyset$

гипербола $x_1^2 - x_2^2 = 1$ $\qquad$ эллипс $x_1^2 + x_2^2 = 1$

парабола $\qquad Q_\infty$ = особая = двойная точка

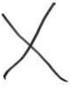
$x_1^2 = 2x_2$ парабола.

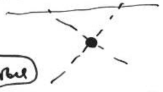
конусы над гладкими квадриками в $\mathbb{P}_1$

$Q_\infty = Q_{0,0}$ · две точки $\qquad Q_\infty = Q_{0,-1} = \emptyset$

$x_1^2 - x_2^2 = 0 \qquad x_1^2 + x_2^2 = 0$

двойная точка

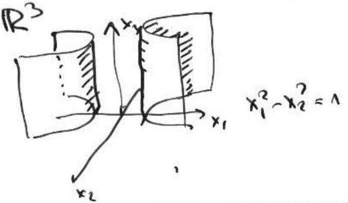




Цилиндры над всевозможными (непустые) квадриками в $\mathbb{A}_1$

$x_1^2 = 0$ цилиндр над двойной точкой $\qquad x_1^2 = 1$ цилиндр над парой точек

в $\mathbb{R}^3$ имеются цилиндры над всеми семью "кривыми" степени 2 в $\mathbb{R}^2$ с теми же уравнениями, но теперь в $\mathbb{R}^3$



Гладкие центральные:

$\overline{Q} = Q_{2,1}$ $\qquad\qquad$ $\overline{Q} = Q_{2,0}$

$Q_\infty = Q_{1,0}$ $\qquad\qquad$ $Q_\infty = Q_{1,0}$ $\quad$ $Q_\infty = Q_{1,-1}$

$x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 = 1$

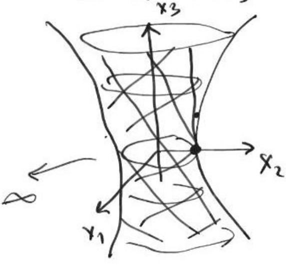
1-полостный гиперболоид

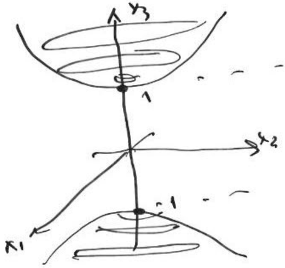
$Q_\infty = \emptyset$ эллипсоид $\quad$ $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1$ $\quad (Q_{1,-1})$

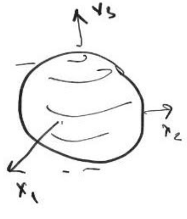
Q_∞ = коника $\quad$ $x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 = -1$ $\quad (Q_{1,0})$

Вероятно 2-полостный? гиперболоид

$x_1^2 + x_2^2 = 1 + x_3^2$ $\qquad$ $x_1^2 + x_2^2 = x_3^2 - 1$ $\qquad$ $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1$

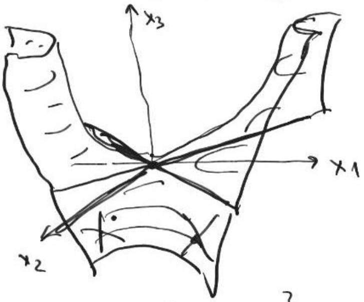






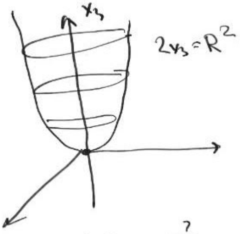
Параболоиды $\quad$ $\overline{Q} = Q_{2,1}$ $\qquad$ $\overline{Q} = Q_{2,0}$

$x_1^2 - x_2^2 = 2x_3$



Гиперболический параболоид
(седлообразная поверхность,
заметаемая 2-мя семействами
прямых).

$x_1^2 + x_2^2 = 2x_3$



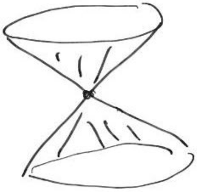
Эллиптический
параболоид

Простые конусы над гладкими квадриками в $\mathbb{P}_2 = L_\infty$

$Q_\infty = Q_{2,0}$ (Вероне)

$Q_\infty = Q_{1,-1} = \emptyset$.

$x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 = 0$



- $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 0$
двойная точка
$(x_1\, x_2\, x_3) = (0,0,0)$.

7 нецилиндрических
и 7 цилиндров.

$\Uparrow$

двойная прямая
$x_1^2 + x_2^2 = 0$
(двойная ось x_3)
цилиндр над
двойной точкой.

$$x_1^2+x_2^2+\dots+x_p^2 = 1+\underbrace{x_{p+1}^2+\dots+x_{p+m}^2}_{''\,\rho}$$

$\overline{Q} = Q_{n-1,m}$

гомеоморфна $\boxed{\underset{\overset{''}{x_{p+1},\dots,x_{p+m}}}{\mathbb{A}^m}\times S^{p-1}}$, $\underset{\text{сфера}}{S^{p-1}} \subset \mathbb{A}^p = \mathbb{A}(x_1,\dots,x_p)$

$\forall\, p \in \mathbb{A}^m$ сечение плоскостью $\mathbb{A}^p \times p$

имеет уравнение $x_1^2+\dots+x_p^2 = 1+(p,p) \rightsquigarrow$

гомотетия с к-том $\sqrt{1+(p,p)}^{\,-1}$ преобразует

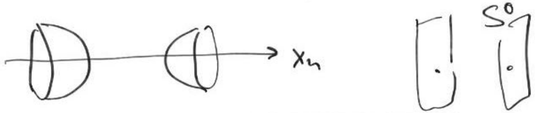
это в сферу радиуса 1

$$x_1^2+\dots+x_p^2+1 = x_{p+1}^2+\dots+x_{p+m}^2$$

$\overline{Q} = Q_{n-1,m-1}$ гомеоморфна $\mathbb{A}^p \times S^{m-1}$

имеется ровно одна непустая невырожденная гладкая центральная квадрика — двуполостный гиперболоид

$$x_1^2+\dots+x_{n-1}^2 = x_n^2-1 \quad \left(x_1^2+\dots+x_n^2+1 = x_n^2\right)$$



Евклидовы квадрики (аффинные квадрики в евклидовом пр-ве $\mathbb{R}^n$)

$\mathbb{R}^n = U_0 \subset \mathbb{P}(W)$

$W = e_0\cdot\mathbb{R} \oplus \mathbb{R}^n$

в $\mathbb{R}^n$ координаты $x_1,\dots,x_n$

в $\mathbb{P}_n = \mathbb{P}(W)$ координаты $x_0,\dots,x_n$

Евклидово скалярное произведение задаёт на $L_\infty = \mathbb{P}(\mathbb{R}^n)$ гладкую квадрику $x_1^2+\dots+x_n^2=0$ без вещественных точек. — аналог точек $i_\pm$ в теории коник в $\mathbb{R}^2$

В евклидовом пр-ве каждой квадратичной (или билинейной симметричной) форме q можно сопоставить линейный оператор $\varphi_q : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$

$$\boxed{\tilde q(u,w) = (u, \varphi_q w)} \quad \forall\ u,w \in \mathbb{R}^n$$

Симметричность $\tilde q$, т.е. равенство $\tilde q(u,w) = \tilde q(w,u)$ равносильно самосопряжённости оператора φ_q

$$\underset{\overset{\shortparallel}{\tilde q(w,u)}}{(\varphi_q u, w)} = \underset{\overset{\shortparallel}{\tilde q(u,w)}}{(u, \varphi_q w)} \quad \forall u,w$$

$$(w, \varphi_q u) = \tilde q(w,u)$$

- У самосопряжённого оператора есть евклидово ортонормальный базис из собственных векторов. В этом базисе матрица оператора диагональна, по диагонали стоят собственные числа.

- Из $\tilde q(u,w) = (u, \varphi_q w)$ вытекает, что матрица Грама B формы $\tilde q$ и матрица Грама G евклидова скалярного произведения связаны с матрицей F оператора φ_q в том же базисе соотношением: $B = GF$, откуда

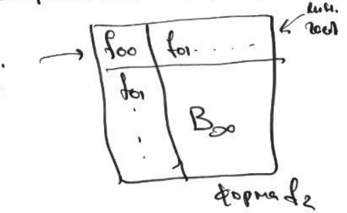
$$\boxed{F = G^{-1}B}$$

В частности в евклидово ортонормальном базисе оператор φ_q имеет ту же матрицу, что и матрица Грама формы q, т.е. $\boxed{F = B}$

Вывод: Любую квадратичную форму в евклидовом пространстве можно диагонализовать в ортонормальном базисе и диагональные элементы полученной матрицы равны собственным значениям матрицы Грама формы в любом евклидово ортонормальном базисе и не зависит от выбора такого базиса.

- Если квадрика $Q \subset \mathbb{R}^n$ гладкая центральная с матрицей Грама B в ортонормальном базисе.

$f(x) = f_2(x) + f_1(x) + f_0(x) = 0$



в W

$c\, e_1, \dots, e_n$

$\mathbb{R}^n = V$

со св-вами: $\underset{\substack{\uparrow \\ \text{центр квадрики}}}{c} \cdot \mathbb{R} = V^{\perp}$ $\quad \mathbb{R}^{n+1} = W = \mathbb{R}e_0 \oplus V$

c = верхняя строка матрицы $B^{\vee}$

$= (B_{00} : -B_{01} : \dots : (-1)^n B_{0n})$

$e_1, \dots, e_n$ – евклидово ортонормальный базис в V в котором форма f_2 диагональна (т.е. базис из собственных векторов матрицы Грама B_∞, по диагонали матрицы Грама формы f_2 в базисе $e_1, \dots, e_n$ стоят собственные числа матрицы B_∞). В базисе $c, e_1, \dots, e_n$ пр-ва W у f будет матрица Грама:

$$\begin{pmatrix} f(c) & & & \\ & \lambda_1 & & 0 \\ & 0 & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

собств. числа матрицы B

$$a_1 x_1^2 + a_2 x_2^2 + \dots + a_n x_n^2 = 1$$

где $a_i = -\frac{\lambda_i}{f(c)}$

каноническое уравнение гладкой центральной квадрики.

базисные векторы $e_1, \dots, e_n$ наз. главными осями

числа $\sqrt{|a_i|^{-1}}$ наз. полуосями центральной квадрики

если все $a_i > 0$, то пересечение с осью cx_i состоит из точек $\pm \frac{1}{\sqrt{a_i}}$

$$a_i x_i^2 = 1$$
$$x_i = \pm \frac{1}{\sqrt{|a_i|}}$$

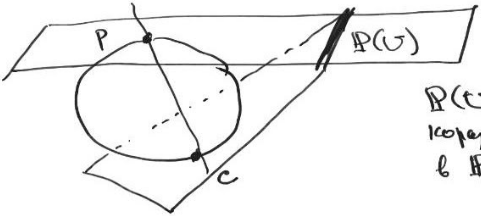
- Две центральные квадрики евклидово конгруэнтны, если наборы коэффициентов $a_1, \dots, a_n$ у них одинаковы с точностью до перестановки

- Параболоиды Q_∞ особа и является простым конусом с вершиной в точке $p \in L_\infty$

p - одномерное подпр-во в V

евклидов ортогонал $p^\perp = U$ — n-1-мерное подпр-во в V и квадратичная форма f_2 ограничивается на него невырожденно

$L_\infty = \mathbb{P}(V)$



$\mathbb{P}(U)$ имеет коразмерность 2 в $\mathbb{P}(W)$

В пучке гиперплоскостей через $\mathbb{P}(U)$ кроме L_∞ есть ещё ровно одна касательная гиперплоскость

$$T_c Q$$

c наз. вершиной параболоида

$$(pc) = \mathbb{P}(U_{\underset{\uparrow}{q}}^{\perp})$$

ортогонал к подпр-ву U в W относительно квадратичной формы

$$q = \overline{f} = f_2 + x_0 f_1 + x_0^2 f_{00}$$

выберем базис в W из $\overset{e_0}{p}, e_1, \dots, e_{n-1}, \overset{e_n}{c}$

на (p,c) натянута гиперболическая плоскость а в качестве $e_1, \ldots, e_n$ берём евклидово ортонорм. базис в U, состоящий из собственных векторов матрицы Грама B_∞ с ненулевыми собственными числами

$$\left(\begin{array}{c|ccc|c} 0 & & 0 & & 1 \\ \hline & \alpha_1 & & & \\ 0 & & \ddots & 0 & 0 \\ & & 0 & \alpha_{n-1} & \\ \hline 1 & & 0 & & 0 \end{array}\right)$$

$$\alpha_1 x_1^2 + \ldots + \alpha_{n-1} x_{n-1}^2 = -2x_n$$

два параболоида евклидово конгруэнтны, если у них одинаковые $\alpha_1, \ldots, \alpha_{n-1}$ с точностью до перестановки.