Лекция 2 июня. Сферы и инверсии.

Школьные свойства сфер

Сфера $S(r,c)$ радиуса r с центром в точке $c \in \mathbb{R}^n$ описывается уравнением

$$(x-c, x-c) = r^2$$ на координаты $x \in \mathbb{R}^n$

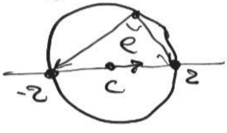
$S_{r,c}(x) = (x-c, x-c) - r^2$ - приведённый многочлен сферы

$S(r,c) =$ ГМТ, удалённых от c на расстояние r

$\forall e \in \mathbb{R}^n \quad (e,e) = 1$

прямая $c+et$ пересечёт сферу в точках

$c+re, \ c-re$



$$\boxed{(x-c, x-c) - r^2 = 0}$$

$$(x-c-re, x-c+re) = 0$$

$$\Updownarrow$$

$$(x-c, x-c) - r^2(e,e) = 0$$

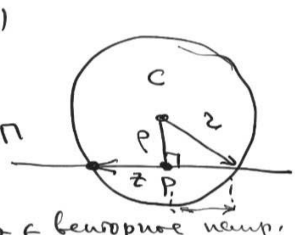
$S(r,c)$ - ГМТ x из которых диаметр $[c-re, c+re]$ виден под прямым углом

Если плоскость Π находится на расстоянии ρ от центра c сферы $S(r,c)$

Пусть p - это ортогональная проекция c на Π

$S(r,c) \cap \Pi = x = p + \vec{z}$

$(x-c, x-c) = r^2$, $z \in$ векторное напр. пр-во плоскости Π



$(p+z-c, p+z-c) = r^2 \qquad p-c \perp z$

$$(z,z) + \underbrace{(p-c, p-c)}_{\rho^2} = r^2$$

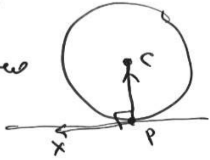
$$(z,z) = r^2 - \rho^2$$

$S(r,c) \cap \Pi =$

- сфера с центром в p и радиусом $\sqrt{r^2-\rho^2}$ если $r^2-\rho^2>0$
- $\varnothing$ если $r^2-\rho^2<0$
- состоит из одной точки p, если $\rho = r$

Касательная гиперплоскость $T_pS(r,c)$ к сфере в точке $p \in S(r,c)$ перпендикулярна радиусу $\overrightarrow{cp} = p-c$

Тем самым, уравнение касательной гиперплоскости: $(x-p, c-p) = 0$



Упр. Проверить, что это согласуется с нашим стандартным проективным определением.

Степень точки q относительно сферы $S(r,c)$

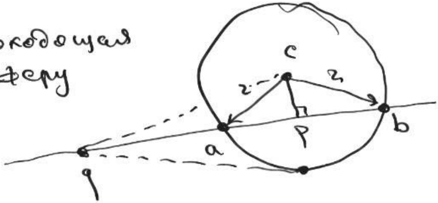
$$\deg_{r,c}(q) := S_{r,c}(q) = (q-c, q-c) - r^2$$

положительна, если q вне шара, ограничиваемого сферой

отрицательна внутри шара (и достигает минимума $-r^2$ в центре)

$= 0 \Leftrightarrow q \in S(r,c)$.

Пусть прямая, проходящая через q пересекает сферу в точках a и b (возможно, что $a=b$)



$$S_{r,c}(q) = (q-c, q-c) - r^2 = |q-p|^2 + \underbrace{|p-c|^2 - r^2}_{} =$$

$$= |q-p|^2 - |p-a|^2 = (q-p+(p-a), q-p-(p-a)) =$$

$$= (q-a, q-b)$$

Теорема о степени точки относительно сферы

Сл: $S_{r,c}(q)$ = квадрат длины отрезка касательной, опущенной из q на сферу.

Радикальная ось двух сфер $S(r_1,c_1)$ и $S(r_2,c_2)$

это ГМТ x : степени $S_{r_1,c_1}(x) = S_{r_2,c_2}(x)$

$$(x-c_1, x-c_1) - r_1^2 = (x-c_2, x-c_2) - r_2^2$$

$$\underline{(x,x)} - 2(x,c_1) + (c_1,c_1) - r_1^2 =$$
$$\underline{(x,x)} - 2(x,c_2) + (c_2,c_2) - r_2^2$$

$$2(x, c_2-c_1) + (c_1,c_1) - (c_2,c_2) = r_1^2 - r_2^2$$

$$(x, c_2-c_1) + \left(\frac{c_1+c_2}{2}, c_1-c_2\right) = \frac{r_1^2-r_2^2}{2}$$

$$\left(x - \frac{c_1+c_2}{2}, c_2-c_1\right) = \frac{r_1^2-r_2^2}{2}$$

Это гиперплоскость ⊥ линии центров и удалённая от середины отрезка $[c_1, c_2]$ на расстояние $\frac{r_1^2 - r_2^2}{2|c_2 - c_1|}$ в сторону центра сферы меньшего радиуса.

Ⅱ Сферы как комплексные проективные квадрики

$$\mathbb{R}^n \subset \mathbb{C}^n = U_0 \subset \mathbb{P}_n = \mathbb{P}(\mathbb{C}^{n+1})$$

$$(x_1, \dots, x_n) \qquad (x_0 : x_1 : \dots : x_n)$$

$$U_0 = \{x_0 = 1\}$$

евклидово скалярное произведение продолжим на $\mathbb{C}^n = V$ по комплексной билинейности

$$(\underset{\overset{\uparrow}{\mathbb{C}^n}}{(x_1, \dots, x_n)}, \underset{\overset{\uparrow}{\mathbb{C}^n}}{(y_1, \dots, y_n)}) = x_1 y_1 + \dots + x_n y_n \in \mathbb{C}$$

аффинное уравнение $(x - c, x - c) - r^2 = 0$

имеет проективное замыкание

$x = (x_1, \dots, x_n)$

$c = (c_1, \dots, c_n)$

$$\boxed{(x - c \cdot x_0, x - c \cdot x_0) - r x_0^2 = 0}$$

$$(x, x) - 2(x, c) + \underbrace{(c, c) - r} = 0$$

$$(x, x) - 2(x, c) \cdot x_0 - (c, c) x_0^2 - r x_0^2 = 0$$

скалярное произведение в $\mathbb{C}^n$

Вывод: у всех сфер одна и та же асимптотическая квадрика в L_∞ (где $x_0=0$), $L_\infty = \mathbb{P}(V) = \mathbb{P}(\mathbb{C}^n)$

$$\boxed{(x,x)=0}$$

гладкая квадрика без вещественных точек.

т.е. у всех сфер есть общее гиперплоское сечение $S(r,c)\cap L_\infty$ в $\mathbb{P}_n$

Факт: Если две квадрики имеют общее гиперплоское сечение, то у них есть и второе общее гиперплоское сечение

$$(x,x) - 2(x,c_1)\cdot x_0 + \left((c_1,c_1)-r_1^2\right)\cdot x_0^2$$

$$(x,x) - 2(x,c_2)\cdot x_0 + \left((c_2,c_2)-r_2^2\right)\cdot x_0^2$$

Эти два уравнения совпадают если $x_0=0$ и если то, на что умножается x_0 в правых слагаемых совпадает

$$-2(x,c_1)+\left((c_1,c_1)-r_1^2\right)x_0 =$$

$$= -2(x,c_2)+\left((c_2,c_2)-r_2^2\right)x_0$$

это второе общее гиперплоское сечение

это радикальная ось двух сфер!

$$2(x, c_2-c_1) + x_0\left((c_1,c_1)-(c_2,c_2)\right) = x_0(r_1^2-r_2^2)$$

$$\left(x-\frac{c_1+c_2}{2}x_0,\ c_2-c_1\right) = x_0\,\frac{r_1^2-r_2^2}{2}$$

при $x_0=1$ получается радикальная ось. (если $c_1\neq c_2$)

если $c_1=c_2$ (т.е. сферы концентрические) $\Rightarrow$

радикальная ось это $x_0=0$. L_∞

"Пространство сфер $\mathbb{P}_{n+1}(\mathbb{R}) = \mathbb{P}(\mathbb{R}^{n+1})$

в $\mathbb{R}^n$"

(в $\mathbb{P}_n = \mathbb{P}(\mathbb{C}^{n+1})$)

Это всевозможные квадрики с уравнениями

$$\boxed{\alpha(x,x) - 2(c,x)x_0 + \beta x_0^2} \quad (*)$$

"псевдо сфера"

где $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$, $c\in\mathbb{R}^n$ - всего $n+2$ веществ. параметр. $\Rightarrow$ проективное пр-во квадрик

$$\mathbb{P}_{n+1} = \mathbb{P}(\mathbb{R}^{n+2})$$

$$\mathbb{R}\ni\alpha \quad \underset{\mathbb{R}^n}{\underset{\cap}{c}} \quad \beta\in\mathbb{R}$$

То, что видно в $\mathbb{R}^n$ как нечто, задаваемое уравнением второй степени — это стандартная аффинная карта $\boxed{\alpha=1}$ (или $\alpha\neq 0$)

В этом случае (*) записывается:

$$(x,x) - 2\left(x,\frac{c}{\alpha}\right)x_0 + \frac{\beta}{\alpha}x_0^2$$

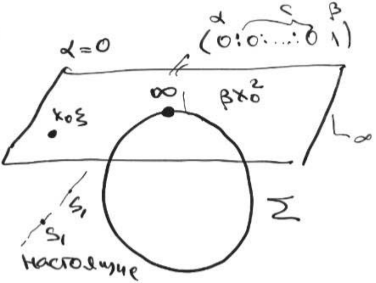
$$0 = \underbrace{\left(x-\frac{c}{\alpha}x_0,\ x-\frac{c}{\alpha}x_0\right) - \left(\frac{(c,c)}{\alpha^2} - \frac{\beta\alpha}{\alpha^2}\right)x_0^2}$$

Это
- настоящая сфера, если $(c,c)-\beta\alpha>0$
- гладкая квадрика без вещественных точек если $(c,c)-\beta\alpha<0$. [мнимая сфера]

- $(c,c)-\beta\alpha=0$ — двойные точки $\frac{c}{\alpha}$.

$$\frac{(c,c)-\beta\alpha}{\alpha^2}=r^2$$ квадрат радиуса сферы если это сфера

Квадратичная форма $(c,c)-\beta\alpha$ на $\mathbb{R}_{n+1}$ играет важную роль.



$\Sigma=V((c,c)=\alpha\beta)$

сферический параболоид (0-планарный)

бесконечно удалённая гиперплоскость состоит из распавшихся квадрик $x_0\xi$ $\quad\xi\in(\mathbb{R}^n)^*$

$\{\alpha=0\}\cup\Sigma$ — особые псевдосферы

все остальные — гладкие

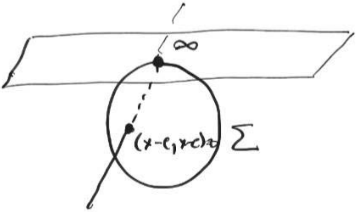
снаружи от аффинного параболоида $\Sigma\cap U_0$ — настоящие сферы

внутри — мнимые сферы (бы веществ. также отрицательного радиуса)

Пример: пучки сфер:

Прямые, проходящие через 2 настоящие сферы $S(r_1,c_1)$ и $S(r_2,c_2)$, $r_1\geq r_2$,

в пространстве квадрик — пучок сфер —
все состоит из сфер и лежит в $\mathbb{P}_{n+1}$ (в
пр-ве псевдосфер)



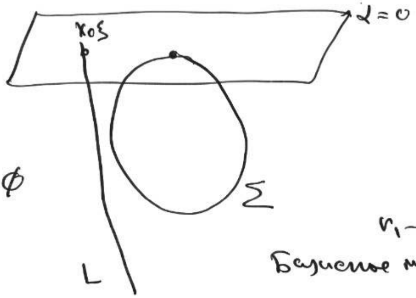
пучок натянут на двойную плоскость x_0^2 и конус над $(x,x)=0$ с вершиной в некоторой точке $C\in\mathbb{R}^n$ т.е. двойной точкой C

Пучок концентрических сфер с центром в точке c

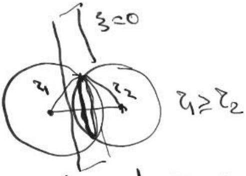
$$(x-c, x-c)+\underbrace{\lambda x_0^2}=0$$

$\lambda<0$ наст. сфер

$\lambda>0$ $\varnothing$.

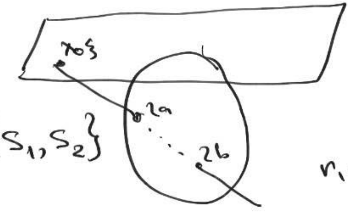


$L\cap\Sigma=\varnothing$



$r_1-r_3<|c_2-c_1|<r_1+r_3$

Базисное множество непусто



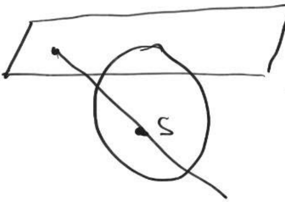
$L\cap\Sigma=\{S_1,S_2\}$

пучок натянутый на непересекающиеся сферы. $(r_1\geq r_2)$

$r_1+r_2<|c_2-c_1|<r_1-r_2$

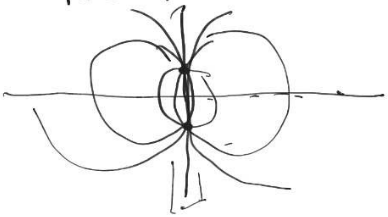
$c_2-c_1+r_2<r_1$

$L \subset T_S \Sigma$



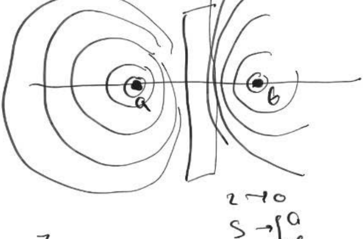
— пучок сфер, касающихся данной гиперпл-ти в данной точке.

пучок пересекающихся сфер



при $c \to \infty$ и $r \to \infty$ сферы стремятся к радикальной гиперплоскости

пучок __не__ пересекающ. сфер



$r \to 0$
$S \to \left\{\begin{matrix} a \\ b \end{matrix}\right.$

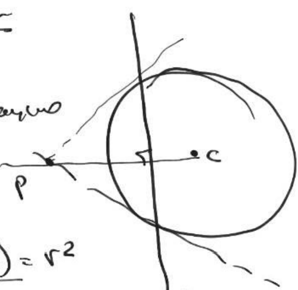
__Упр.__ Проверить всё это явными вычислениями, т.е. алгебраически убедиться, что $r_1 - r_2 \le |c_2 - c_1| \le r_1 + r_2$ $\Leftrightarrow$ ограничение формы $(c,c) - 2\beta$ на прямую, прох. через $S(r_1, c_1)$ и $S(r_2, c_2)$ имеет отрицательный дискриминант.

Инверсия отн. сферы

$(x-c, x-c) - r^2 = 0$

$(x-c, y-c) - r^2$ поляризация

полярная гиперплоскость точки p задаётся уравнением $\underline{(x-c, p-c) = r^2}$

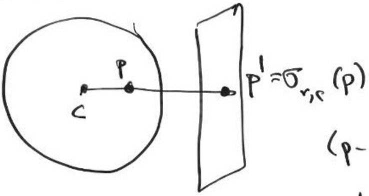


$(x-c, p-c) = r^2$

она перпендикулярна $\overrightarrow{cp}$ и находится от точки c на таком расстоянии ρ, что

$$|c-p|\cdot r = r^2$$

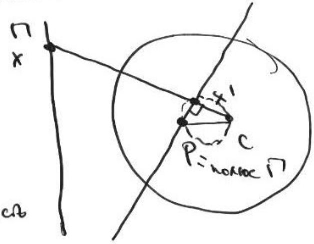
Опр.: точка пересечения луча $[cp)$ с полярной гиперплоскостью точки p отн. сферы называется инверсной к точке p и обозначается $\sigma_{r,c}(p)$



$$(p-c, p'-c) = r^2$$
$$\Updownarrow$$
$$p'-c = \frac{(p-c)\cdot r^2}{(p-c, p-c)}$$

$$\boxed{p' = \sigma_{r,c}(p) = c + \frac{(p-c)\cdot r^2}{(p-c, p-c)}}$$

Факты: Гиперплоскость Π с полюсом p, не проходящая через центр инверсии c, переходит в сферу из которой отрезок $[p,c]$ виден под прямым углом



$x' = [px) \cap \Pi'$

полярная гиперплоскость к x'

любая прох. через c сфера переходит при инверсии в полярную гиперплоскость точки, диаметрально противоположной к точке c.