Лекция 9 июня (последняя)

оценки за семинары появятся завтра, 10.06

в четверг 11.06 в 10:00 будет контрольная №7

в четверг 18.06 в 10:00 будет письменный экзамен

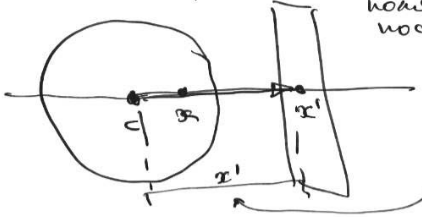
урегулирование претензий в каждом из видов программы происходит по электронной почте в течение суток с момента опубликования результатов, писать письмо нужно своему семинаристу, копию - мне

результаты контрольной и экзамена станут известны во вторник 16 и 23 июня соответственно, во второй половине дня.

Инверсии относительно сфер в $\mathbb{R}^n$

сфера $S(r,c)$ радиуса r с центром в $c \in \mathbb{R}^n$
задаёт инверсию $\mathbb{R}^n \setminus c \xrightarrow{\sim} \mathbb{R}^n \setminus c$

$\sigma_{r,c} : x \longmapsto$ точку пересечения (cx) с полярной к x гиперплоскостью



$$\boxed{(x'-c,\, x-c) = r^2}$$

$$x' = c + \frac{r^2}{x-c}$$

$S(r,c)$ задаётся уравнением $(x-c, x-c) = r^2$ (аффинное)

⇙ $(x - cx_0, x - cx_0) = r^2 x_0^2$

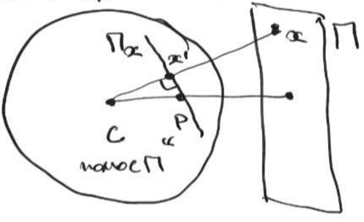
(однородное)

Поляра точки $p \in \mathbb{R}^n$ задаётся уравнением

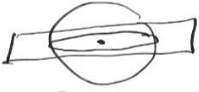
$$\boxed{(p-c, x-c) = r^2 \quad \text{(аффинное)}}$$

Поляра $\perp (pc)$ и находится на таком расстоянии l от т. c, что $(p-c, l) = r^2$

- Гиперплоскость Π (не проходящая через c) переводится инверсией в сферу с диаметром $[c,p]$, где p – полюс Π отн. $S(r,c)$.
- Всякая сфера Q, проходящая через c, переводится в гиперплоскость Π полярную к диаметрально противоположной к c точке сферы Q

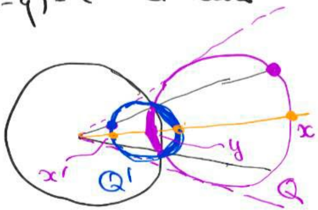


- Очевидно, что гиперплоскости, проходящие через c переходят в себя



- Если сфера $Q = S(t, q)$ не проходит через точку c, то инверсия $\sigma_{r,c}$ переводит её в сферу Q' гомотетичную сфере Q относительно c с коэффициентом $\frac{r^2}{s_Q(c)}$, где

$S_Q(c) = S_{t,q}(c) = (c-q, c-q) - t^2$ - степень точки c отн. Q.



$x \mapsto$ гомотетичный? образ точки y.

По теореме о степени точки

$(x-c, y-c) = S_Q(c)$ $\quad S(r,c)$

инверсная к x точка $x' = \sigma_{r,c}$ удовл. равенству

$$(x-c, x'-c) = r^2 \Rightarrow x'-c = \gamma\cdot(y-c)$$

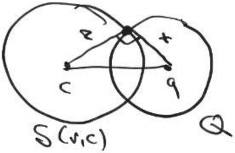
где $\gamma = \dfrac{r^2}{S_Q(c)}$

! ограничение инверсии $\sigma_{r,c}$ на сферу Q не совпадает с ограничением гомотетии γ_c на Q

• Сфера Q переводится инверсией? в себя $\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow$ Q перпендикулярна $S(r,c)$

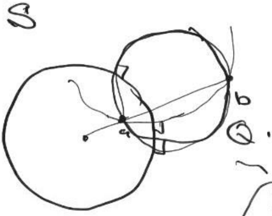
$$\gamma = \frac{r^2}{(c-q, c-q) - t^2} = 1$$

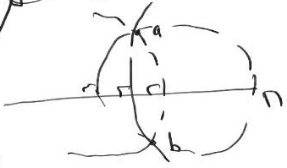


$$r^2 + t^2 = (c-q)^2$$

сферы пересекаются под прямым углом.

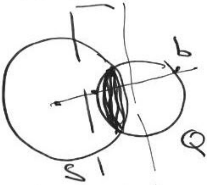
- Две точки a и b инверсны относительно сферы S тогда и только тогда, когда любая проходящая через a и b сфера или гиперплоскость перпендикулярна сфере S





Док-во:

Пусть Q проходит через a и b. и пусть Q' – это это её инверсный образ. Q, Q' и S лежат в одном пучке пересекающихся сфер — сфер, проходящих через $Q \cap S$



$\Downarrow$

раз Q' лежит в пучке (QS) она совпадает с Q, т.к. в любом пучке квадрик есть ровно одна квадрика, проходящая через заданную небазисную точку a (или b).

$$\sigma_{r,c}(Q) = Q \Rightarrow Q \perp S.$$

$\{a,b\} = \bigcap$ всех сфер и гиперплоскостей, проходящих через a и b

если $c \notin \{a,b\}$ и $c \in (ab) \Rightarrow$ сфера через a и b не содержит c

если $c \notin (ab)$ то $\exists$ гиперплоскость $\Pi \ni (ab)$, но ПДС.

$\Rightarrow$ если инверсия переводит в себя любую сферу или гиперплоскость, проходящую через a и b, то она переводит в себя и $\{a\, b\} = \Pi$...

Инверсия является конформным отображением

Наивное (школьное) понимание: инверсия сохраняет углы между сферами и гиперплоскостями.

Что такое угол:

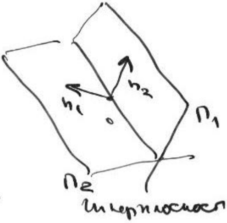
касательное векторное пр-во к S в точке p это $(c-p)^\perp \subset \mathbb{R}^n$ — направляющее векторное пр-во касательной аффинной гиперплоскости $T_pS = \{(x-p, p-c) = = r^2\}$

$//$

касательное векторное пр-во $p+(c-p)^\perp$
к аффинной гиперплоскости $p+V$:= направляющее векторное пр-во V этой гиперплоскости.

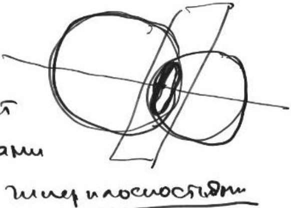
Угол между сферами (между сферой и гиперпл., между двумя гиперплоскостями) — это угол между их касательными векторными пр-вами

в точке пересечения, т.е.
наименьший? из двух смежных
углов между их нормальными
векторами

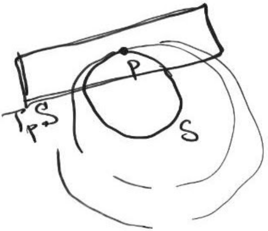


$$\cos\angle(\Pi_1,\Pi_2) = \frac{|(n_1,n_2)|}{|n_1|\cdot|n_2|}$$

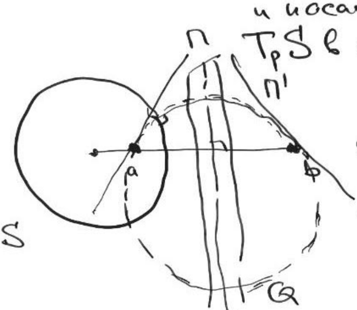
где $n_i = \Pi_i^{\perp}$



Теорема: Инверсия сохраняет углы между сферами, сферами и гиперплоскостями, между гиперплоскостями



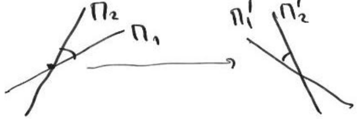
- Угол который образует сфера S со сферами или гиперплоскостями, проходящими через данную точку $p\in S$ он одинаков для всех сфер S из пучка соприкасающихся сфер, проходящих через p. и касающихся плоскости T_pS в точке p



инверсия σ_S переводит пучок сфер, касающихся данной гиперплоскости П эа в точке a переводится в

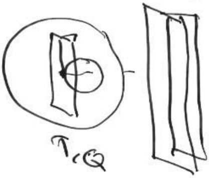
4

пучок сфер, касающихся в точке b гиперплоскости Π' симметричной к Π отн. серединного перпендикуляра к $[a,b]$



Π_1' и Π_2' получаются из Π_1 и Π_2 отражением в гиперплоскости $\frac{a+b}{2}+(a-b)^{\perp}$ (сер. пер. к $[a,b]$)

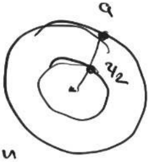
про центр.:



сферы $Q \ni C$

перейдёт в гиперплоскость, параллельную T_cQ

про точки лежащие на S



$$S_{r,c} = \gamma \circ S_{r/2,c}$$

является композицией инверсии отн. сферы половинного радиуса и гомотетии с к-том 4.

$\sigma_{r,c}: x \longrightarrow x'$ $(x-c, x'-c) = r^2$

$\sigma_{r/2,c}: x \longmapsto x''$ $(x-c, x''-c) = \frac{r^2}{4}$

$\varphi: \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ — $\boxed{\text{отображение аффинных пр-в.}}$

что такое

$\bigcirc\!\!\!\!D_p\varphi$ — дифференциал (производная от φ) в точке $p \in \mathbb{R}^n$?

$D_p\varphi : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ линейное отображение подлежащих векторных пр-в.

φ наз. диф.-ным если $\exists\, D_p\varphi$

$$\underbrace{\varphi(p+v) = \varphi(p) + D_p\varphi(v) + o(v)}$$

где $o(v)$ – эта такая функция $o : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, что

$$\underbrace{\frac{|o(v)|}{|v|} \to 0 \text{ при } |v| \to 0.}$$

Честно убедиться, что отображение

$$\sigma_{r,c} : x \longmapsto \underbrace{c + \frac{(x-c)\cdot r^2}{|x-c|^2}}$$

гладкое при $x \neq c$ и его производная является композицией отражения в гиперплоскости и гомотетии.

Упр-е по анализу:

Опр: Гладкое отображение $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ наз. конформным, если его производная ($D\varphi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ линейное отображение евклидовых пространств) является композицией ортогонального оператора и гомотетии

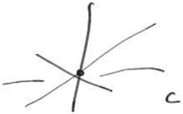
Группа Мёбиуса (группа, порождённая инверсиями и отражениями в гиперплоскостях.

$\mathbb{R}^n \rightsquigarrow \hat{\mathbb{R}}^n$ – одноточечная компактификация

$\mathbb{R}^n$, $\hat{\mathbb{R}}^n = \mathbb{R}^n \sqcup \infty$, окрестности т. ∞ — это дополнения до компактов в $\mathbb{R}^n$.

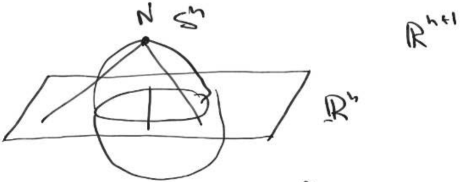
точка ∞ лежит на всех аффинных подпр-вах в $\mathbb{R}^n$.

в $\hat{\mathbb{R}}^n$

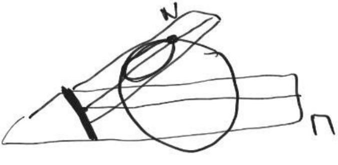


$\sigma_{r,c} : \hat{\mathbb{R}}^n \xrightarrow{\sim} \hat{\mathbb{R}}^n$

$c \longleftrightarrow \infty$

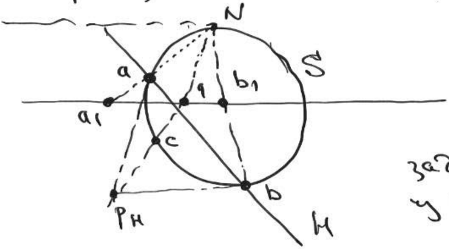


можно думать про $\hat{\mathbb{R}}^n$ как про $S^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$ отождествив $\mathbb{R}^n$ с экваториальной гиперплоскостью.



сферы на S^n, высекаемые гиперплоскостями, проходящими через N
$\parallel$
гиперплоскости в П

сферы на S^n высекаемые гиперплоскостями $H \subset \mathbb{R}^{n+1}$ переходят в сферы с центрами в проекций полюсов гиперплоскостей H.



q - середина $[a_1, b_1]$

инволюция на сфере задаваемая проекцией из P_H $a \leftrightarrow a$, $b \leftrightarrow b$, $N \leftrightarrow c$

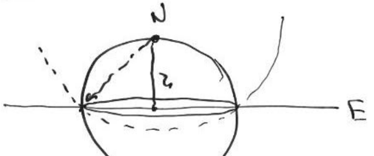
проекция из N на $(a_1 b_1)$ переводит $N \to \infty$ $a \to a_1$ $b \to b_1$ $c \to q$ $\leftarrow [a, b, N, c] = -1$

$$[a_1, b_1, q, \infty] = -1$$

$$[\infty, \overset{0}{q}, \overset{1}{a_1}, \overset{-1}{b_1}] = -1$$

q середина отрезка $[a_1, b_1]$

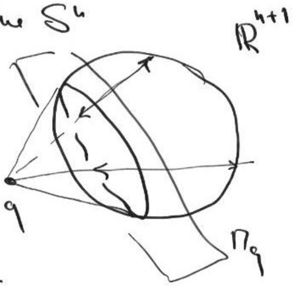
стереографическая проекция сохраняет углы!



стереографическая проекция является ограничением на S^n инверсии $\sigma_{N, \sqrt{2}r}$ относительно сферы с центром в N, пересекающей E по той же сфере, что и S.

группа Möb(E), порождённая инверсиями в E относительно сфер в E и отражениями в гиперплоскостях.

группу преобразований сферы S^n, порождённую инволюциями $S^n \xrightarrow{\sim} S^n$ с центрами в точках вне S^n



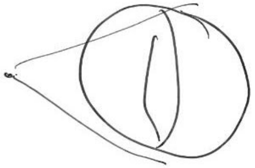
инверсия сферы с центром в q.

отражение $\mathbb{R}^{n+2} \to \mathbb{R}^{n+2}$ в ортогонале к анизотропному вектору q относительно квадратичной формы в $\mathbb{R}^{n+2}$, задающей проективное замыкание сферы $S^n < U_0 < \mathbb{P}^{n+1}$

$\mathbb{R}^{n+1} \simeq U_0 < \underset{\mathbb{P}(\mathbb{R}^{n+2})}{\overset{\shortparallel}{\mathbb{P}^{n+1}}}$

$$x_1^2 + \dots + x_n^2 + x_{n+1}^2 = x_0^2 \quad \boxed{r=1}$$

форма сигнатуры $(n+1, 1)$.

$\boxed{\text{Факт}}$ Группа изометрий $\underbrace{O(n+1,1)}$ квадратичной формы $x_1^2 + \dots + x_{n+1}^2 - x_0^2 = 0$ порождается отражениями в ортогональных гиперплоскостях к векторам с положительным квадратом $\sigma_q : (q,q) > 0$