

### Задачи для подготовки к контрольной № 2

**ПК2♦1° (устный счёт<sup>1</sup>).** В уме найдите матрицы, обратные к следующим матрицам  $2 \times 2$ :

а)  $\begin{pmatrix} 3 & -5 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$    б)  $\begin{pmatrix} -2 & -5 \\ -3 & -7 \end{pmatrix}$    в)  $\begin{pmatrix} -2 & -3 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$    г)  $\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$    д)  $\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 3 & -5 \end{pmatrix}$ .

Проверьте результат умножением на бумажке.

**ПК2♦2.** Найдите базис в пространстве решений системы однородных линейных уравнений

а) 
$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 + 2x_5 = 0 \\ x_1 + 2x_2 + 2x_3 + 3x_4 - x_5 = 0 \\ 3x_1 + 6x_2 + 5x_3 + 7x_4 = 0 \\ -x_1 - 2x_2 - 3x_3 - 5x_4 + 4x_5 = 0 \\ 3x_1 + 6x_2 + 2x_3 + 2x_4 + 7x_5 = 0 \end{cases}$$

б) 
$$\begin{cases} x_1 - x_2 - 2x_3 - 2x_4 - 3x_5 = 0 \\ 2x_1 - 2x_2 - 4x_3 - 4x_4 - 5x_5 = 0 \\ 2x_1 - 2x_2 - 4x_3 - 4x_4 - 3x_5 = 0 \\ 3x_1 - 3x_2 - 6x_3 - 5x_4 - 8x_5 = 0 \\ -2x_1 + 3x_2 + 5x_3 + 6x_4 + 11x_5 = 0 \end{cases}$$

базисные векторы пространства решений  $(1 \ 1 \ -1 \ 1 \ 0 \ 0)$ .

свое описание пространства решений: 
$$\begin{cases} x_1 = x_3 \\ x_2 = -x_3 \\ x_4 = 0 \\ x_5 = 0 \end{cases}$$

параметрическое: 
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$
; в (б) приведённый ступенчатый вид матрицы системы:

базис в пространстве решений составляют строки матрицы 
$$\begin{cases} x_1 = -2x_2 - 3x_5 \\ x_3 = -x_5 \\ x_4 = 2x_5 \end{cases}$$

ОТВЕТ: в (а) приведённый ступенчатый вид матрицы системы: 
$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$
; параметрическое описание

**ПК2♦3.** Найдите базис в ядре и образе линейного оператора  $F : \mathbb{Q}^4 \rightarrow \mathbb{Q}^4$ , матрица которого в стандартном базисе пространства  $\mathbb{Q}^4$  имеет вид

а)  $\begin{pmatrix} 1 & -2 & -2 & -3 \\ 3 & -6 & -5 & -7 \\ 3 & -6 & -9 & -15 \\ 1 & -2 & -1 & -1 \\ 3 & -6 & -9 & -15 \end{pmatrix}$    б)  $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & -2 \\ -2 & -3 & 5 & 3 \\ 3 & 9 & -12 & -9 \\ -1 & -3 & 4 & 4 \end{pmatrix}$

первый, второй и четвёртый столбцы исходной матрицы.

ступенчатый вид матрицы системы: 
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$
; базис в ядре составляет вектор  $(1, 1, 1, 0)$ , базис в образе —

матрицы 
$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$
; базис в образе — первый и третий столбцы исходной матрицы; в (б) приведённый

ОТВЕТ: в (а) приведённый ступенчатый вид матрицы системы: 
$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & -2 & -3 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$
; базис в ядре составляют строки

**ПК2♦4.** Линейный оператор  $F : \mathbb{Q}^3 \rightarrow \mathbb{Q}^3$  имеет матрицу 
$$\begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 3 & 3 & 3 \\ 0 & 3 & 0 \end{pmatrix}$$
 в базисе из векторов

$v_0 = (0, 1, -2), \quad v_1 = (1, -1, -1), \quad v_2 = (-2, 7, -7).$

Напишите матрицу оператора  $F$  в стандартном базисе пространства  $\mathbb{Q}^3$ .

<sup>1</sup>Умение быстро делать эту задачу абсолютно необходимо как на контрольной № 2, так и на всех последующих контрольных.

$$\begin{pmatrix} -2 & -1 & 0 \\ 7 & -1 & 3 \\ 2 & 3 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 3 & 0 \\ 3 & 3 & 3 \\ 2 & 2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 7 \\ -5 & -9 & -14 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -24 & -55 & -107 \\ 83 & 145 & 174 \\ -18 & -33 & -54 \end{pmatrix} = {}^a C^{-1} F^a C = {}^e F^e : \text{ЛВЛО}$$

**ПК2♦5.** Линейный оператор  $F : \mathbb{Q}^3 \rightarrow \mathbb{Q}^3$  имеет в стандартном базисе матрицу  $\begin{pmatrix} 3 & 4 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 4 \end{pmatrix}$ .

Напишите матрицу оператора  $F$  в базисе из векторов

$$v_0 = (1, 2, -1), \quad v_1 = (1, 2, 0), \quad v_2 = (-1, -1, -1).$$

$$\begin{pmatrix} 10 & 6 & 0 \\ 9 & -2 & -2 \\ -3 & 13 & 18 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 \\ -1 & 2 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & 3 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \\ 0 & 4 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 \\ 1 & 2 & -3 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix} = {}^a C^{-1} F^a C = {}^e F^e : \text{ЛВЛО}$$

**ПК2♦6.** Выясните, обратимы ли нижеследующие матрицы, и для обратимых найдите обратные, а для необратимых — их ранги:

$$\text{а) } \begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 & 1 \\ 1 & -4 & 2 & 0 \\ 3 & -3 & -12 & 10 \\ -3 & 8 & 3 & -4 \end{pmatrix} \quad \text{б) } \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & -2 \\ 1 & 1 & -1 & 4 \\ 1 & 1 & 0 & 2 \\ -1 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{в) } \begin{pmatrix} 1 & -2 & -2 & -1 \\ 3 & -6 & -5 & 0 \\ 2 & -4 & -6 & -8 \\ 2 & -3 & -10 & -21 \end{pmatrix}.$$

$$\text{ОТВЕТ: в (а) } \begin{pmatrix} 0 & 1 & -3 & -9 \\ 1 & 0 & 3 & 4 \\ 2 & -1 & 9 & 18 \\ 6 & -4 & 31 & 64 \end{pmatrix} \text{ в (б) } \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & -1 \\ 2 & -3 & 5 & -2 \\ -2 & 4 & -6 & -2 \\ 0 & 3 & -2 & 6 \end{pmatrix} \text{ в (в) матрица не обратима ранга 3.}$$

**ПК2♦7.** Обозначим через  $U, W \subset \mathbb{Q}^4$  наименьшие по включению аффинные подпространства, проходящие, соответственно,

а) через точки  $(-4, -4, 6, 1)$ ,  $(-4, -5, 9, 0)$ ,  $(-8, -1, 21, -4)$ ,  $(-10, -1, 33, -8)$  и через точки  $(4, -15, -14, -3)$ ,  $(-13, 25, -23, 21)$ ,  $(-11, 17, -13, 13)$ ,  $(-9, 9, -3, 5)$ .

б) через точки  $(-4, -5, 3, -3)$ ,  $(0, 7, -5, -4)$ ,  $(-7, -14, 9, 0)$ ,  $(-10, -23, 15, 0)$  и через точки  $(-7, -14, 11, 6)$ ,  $(-14, -35, 28, 20)$ ,  $(-9, -20, 17, 14)$ ,  $(-1, 4, -5, -11)$ .

Найдите  $\dim U$ ,  $\dim W$  и  $\dim U \cap W$  или докажите, что  $U \cap W = \emptyset$ .

ОТВЕТ: в (а) две непересекающиеся двумерные плоскости, в (б) две двумерные плоскости, пересекающиеся по прямой, проходящей через точку  $(-3, -2, 1, -3)$  параллельно вектору  $(2, 6, -4, -1)$ .

**ПК2♦8.** Решите в поле  $\mathbb{Q}$  системы уравнений

$$\text{а) } \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 - 6x_4 - x_5 - 3x_6 = 2 \\ x_1 + 2x_2 - x_3 - 9x_4 - 4x_5 - 13x_6 = 3 \\ 3x_1 + 5x_2 - x_3 - 24x_4 - 8x_5 - 26x_6 = 7 \\ 3x_1 + x_2 + 7x_3 - 12x_4 + 4x_5 + 14x_6 = 3 \\ 2x_1 + x_2 + 4x_3 - 9x_4 + 2x_5 + 7x_6 = 2 \end{cases}$$

$$\text{б) } \begin{cases} x_1 + 2x_2 - 7x_3 - 2x_4 - 2x_5 + 7x_6 = 4 \\ -3x_1 - 6x_2 + 21x_3 + 7x_4 + 9x_5 - 32x_6 = -16 \\ 3x_1 + 6x_2 - 21x_3 - 3x_4 + 3x_5 - 12x_6 = 0 \\ -3x_1 - 5x_2 + 19x_3 + 6x_4 + 14x_5 - 47x_6 = -25 \\ x_1 + x_2 - 5x_3 + 2x_4 + 3x_5 - 14x_6 = -1 \end{cases}$$

и укажите базисный репер в каждом аффинном пространстве решений.

ОТВЕТ: в (а) приведённый ступенчатый вид расширенной матрицы системы:  $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & -3 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & -2 & -3 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$  па-

раметрическое описание пространства решений:  $\begin{cases} x_1 = -3x_3 + 3x_4 - x_6 + 3 \\ x_2 = 2x_3 + 3x_4 + x_6 - 2 \\ x_5 = -3x_6 - 1, \end{cases}$  аффинное пространство решений

проходит через точку  $(3, -2, 0, 0, -1, 0)$ , а базис его направляющего векторного пространства составляют стро-  
ки матрицы  $\begin{pmatrix} -3 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & -3 & 1 \end{pmatrix}$ ; в (б) приведённый ступенчатый вид расширенной матрицы системы:

параметрическое описание пространства решений:  $\begin{cases} x_1 = 3x_3 - x_6 - 2 \\ x_2 = 2x_3 + 2x_6 + 3 \\ x_4 = 2x_6 + 2 \\ x_5 = 3x_6 - 2, \end{cases}$  аффинное

пространство решений проходит через точку  $(-2, 3, 0, 2, -2, 0)$ , а базис его направляющего векторного простран-  
ства составляют строки матрицы  $\begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 0 & 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$ .