

Задачи для подготовки к контрольной №7

ПК7♦1. Постройте рациональные параметризации аффинных коник

- а) $-4x^2 + 28xy + 8x - 28y^2 - 12y - 1 = 0$ б) $-12x^2 - 44xy - 65y^2 + 10y - 1 = 0$
 в) $-20x^2 - 36xy - 8x - 28y^2 - 4y - 1 = 0.$

ОТВЕТ: с точностью до преобразования параметра
 (а) $x = \frac{-2t^2 - 2t + 1}{(6t^2 + 6t - 2)}, y = \frac{-2t^2 - 2t + 1}{(6t^2 + 6t - 2)}$;
 (б) $x = \frac{-2t^2 + 12t - 2}{(5t^2 - 28t + 5)}, y = \frac{-2t^2 + 12t - 2}{(5t^2 - 28t + 5)}$;
 (в) $x = \frac{-5t^2 + 6t - 3}{(14t^2 - 18t + 10)}, y = \frac{-5t^2 + 6t - 3}{(14t^2 - 18t + 10)}$.

ПК7♦2. Доподлинно выясните, совпадают ли Ваши ответы к предыдущей задаче с указанными в ней ответами с точностью до дробно линейного преобразования параметра t .

ПК7♦3. В евклидовом пространстве \mathbb{R}^3 определите тип, укажите начальную точку и направления координатных осей канонического ортонормального репера и напишите в нём уравнение квадрики, заданной в стандартном ортонормальном базисе уравнением

- а) $14x^2 + 4xy - 8xz - 48x + 17y^2 + 4yz - 12y + 14z^2 + 96z = -162$
 б) $5x^2 - 4xy - 4xz + 18x + 2y^2 - 8yz + 2z^2 = -3$
 в) $-19x^2 + 28xy - 56xz + 150x + 2y^2 + 28yz - 48y - 19z^2 + 150z = 180$
 г) $11x^2 - 20xy + 4xz - 60x + 14y^2 + 16yz + 30y + 20z^2 + 21z = -18$
 д) $4x^2 + 8xy - 12xz - 14x - 4yz + 8y + 5z^2 + 26z = 27$
 е) $4x^2 - 28xy + 4xz - 12x + 13y^2 - 32yz - 48y + 19z^2 + 66z = -63$

ОТВЕТ: в (а) эллипсоид $\frac{x^2}{2} + x^2 + x^2 = 1$ в ортонормальном репере с началом в точке $(\frac{2}{3}, \frac{2}{3}, \frac{1}{3})$ и осями, направленными вдоль векторов $e_1 = (\frac{2}{3}, -\frac{1}{3}, \frac{2}{3}), e_2 = (\frac{2}{3}, \frac{2}{3}, \frac{2}{3}), e_3 = (-\frac{1}{3}, -\frac{2}{3}, \frac{2}{3})$.
 в (б) эллипсоид $3x^2 + 2x^2 + 3x^2 = 0$ в ортонормальном репере с началом в точке $(\frac{1}{3}, -\frac{2}{3}, -\frac{7}{3})$ и осями, направленными вдоль векторов $e_1 = (\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{2}{3}), e_2 = (-\frac{2}{3}, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}), e_3 = (\frac{2}{3}, -\frac{2}{3}, \frac{1}{3})$.
 в (в) не связная гиперболоид $\frac{x^2}{2} + \frac{z^2}{2} - 3x^2 = -1$ в ортонормальном репере с началом в точке $(1, -2, 1)$ и осями, направленными вдоль векторов $e_1 = (-\frac{2}{3}, \frac{2}{3}, \frac{2}{3}), e_2 = (\frac{2}{3}, \frac{1}{3}, -\frac{1}{3}), e_3 = (-\frac{1}{3}, -\frac{2}{3}, -\frac{2}{3})$.
 в (г) связный гиперболоид $\frac{x^2}{2} + x^2 + x^2 = 1$ в ортонормальном репере с началом в точке $(-1, 1, 1)$ и осями, направленными вдоль векторов $e_1 = (\frac{2}{3}, -\frac{1}{3}, \frac{2}{3}), e_2 = (-\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{2}{3}), e_3 = (-\frac{2}{3}, \frac{2}{3}, \frac{1}{3})$.
 в (д) эллипсоид $\frac{x^2}{2} + x^2 + x^2 = 1$ в ортонормальном репере с началом в точке $(\frac{2}{3}, \frac{2}{3}, -\frac{10}{3})$ и осями, направленными вдоль векторов $e_1 = (\frac{2}{3}, -\frac{1}{3}, \frac{2}{3}), e_2 = (-\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{2}{3}), e_3 = (-\frac{2}{3}, \frac{2}{3}, \frac{1}{3})$.
 в (е) конус $2x^2 + \frac{z^2}{2} - \frac{z^2}{2} = 0$ в ортонормальном репере с началом в точке $(\frac{1}{3}, -\frac{2}{3}, -\frac{7}{3})$ и осями, направленными вдоль векторов $e_1 = (\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{2}{3}), e_2 = (-\frac{2}{3}, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}), e_3 = (\frac{2}{3}, -\frac{2}{3}, \frac{1}{3})$.

ПК7♦4. Центр c_1 сферы радиуса 9 находится на расстоянии 8 от центра c_2 сферы радиуса 4. Опишите все инверсии, переводящие первую сферу во вторую.

ОТВЕТ: инверсия с центром $-\frac{5}{4}c_1 + \frac{5}{9}c_2$ и квадратом радиуса 1404

ПК7♦5. Центр c_1 сферы радиуса 8 находится на расстоянии 1 от центра c_2 сферы радиуса 3. Опишите все инверсии, переводящие эти две сферы в пару концентрических сфер.

ОТВЕТ: центр инверсии находится в точке $(-27 - 12\sqrt{5}, -27 + 12\sqrt{5}) \cdot c_1 + (-12\sqrt{5} + 28) \cdot c_2$, а радиус может быть любым отличным от расстояний от центра инверсии до центров двух данных сфер.

ПК7♦6. Сфера A с центром a имеет радиус 4, центр b сферы B радиуса 1 находится на расстоянии 2 от a . Найдите неподвижные точки композиции инверсий $\sigma_B \circ \sigma_A$.

$$\left(-\frac{8}{11} + \frac{8}{\sqrt{105}}\right)a + \left(-\frac{8}{19} + \frac{8}{\sqrt{105}}\right)b \quad \text{и} \quad \left(-\frac{8}{11} - \frac{8}{\sqrt{105}}\right)a + \left(\frac{8}{\sqrt{105}} + \frac{8}{19}\right)b.$$

ОТВЕТ: две лежащие на линии центров точки.

ПК7♦7 (10 баллов). Рассмотрим стереографическую проекцию сферы $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ в \mathbb{R}^3 из точки $(0, 0, 1)$ на плоскость $z = 0$. Найдите центр и радиус окружности, в которую спроектируется сечение сферы плоскостью $-5x - 3y + 4z = 1$.

ОТВЕТ: центр $(\frac{3}{5}, 1)$, квадрат радиуса $\frac{6}{49}$.