

§7. Двойственность

7.1. Двойственные пространства. Линейные отображения $V \rightarrow \mathbb{k}$ принято называть *линейными функционалами*¹ или *ковекторами*. Они образуют векторное пространство, которое обозначается $V^* \stackrel{\text{def}}{=} \text{Hom}_{\mathbb{k}}(V, \mathbb{k})$ и называется *двойственным* или *сопряжённым* к пространству V .

ПРИМЕР 7.1 (ЛИНЕЙНЫЕ ФУНКЦИОНАЛЫ НА КООРДИНАТНОМ ПРОСТРАНСТВЕ)

Каждый линейный функционал $\xi : \mathbb{k}^n \rightarrow \mathbb{k}$ однозначно задаётся набором своих значений

$$\xi_i = \xi(e_i) \in \mathbb{k}$$

на стандартных базисных векторах e_i пространства \mathbb{k}^n . Значение функционала ξ на произвольном векторе $v = e_1 x_1 + \dots + e_n x_n$ при этом равно

$$\xi(v) = \xi(e_1 \cdot x_1 + \dots + e_n \cdot x_n) = \xi(e_1) \cdot x_1 + \dots + \xi(e_n) \cdot x_n = \xi_1 x_1 + \dots + \xi_n x_n.$$

Наоборот, для любого набора из n констант $\xi_1, \dots, \xi_n \in \mathbb{k}$ эта формула задаёт линейный функционал $\xi : \mathbb{k}^n \rightarrow \mathbb{k}$. Если записывать векторы v пространства \mathbb{k}^n в виде координатных столбцов высоты n , то двойственное пространство \mathbb{k}^{n*} удобно представлять себе как n -мерное координатное пространство, состоящее из строк ширины n . При этом действие ковектора-строки $\xi \in \mathbb{k}^{n*}$ на вектор-столбец $v \in \mathbb{k}^n$ заключается в матричном умножении: $\xi(v) = \xi v$.

ПРИМЕР 7.2 (СТЕПЕННЫЕ РЯДЫ КАК ФУНКЦИОНАЛЫ НА МНОГОЧЛЕНАХ)

Этот пример является бесконечномерной версией предыдущего. Кольцо многочленов $\mathbb{k}[x]$ является векторным пространством над \mathbb{k} со счётным базисом из мономов x^k , где $k \geq 0$ и $x^0 = 1$. Каждый линейный функционал $\psi : \mathbb{k}[x] \rightarrow \mathbb{k}$ однозначно задаётся последовательностью своих значений $\psi_k = \psi(x^k)$ на базисных векторах пространства $\mathbb{k}[x]$ и действует на произвольный многочлен $a(x) = a_0 + a_1 x + \dots + a_m x^m$ по правилу

$$\psi(a) = \sum_{k=0}^{\deg a} a_k \psi_k = \psi_0 a_0 + \psi_1 a_1 + \dots + \psi_m a_m, \quad \text{где } m = \deg a. \quad (7-1)$$

Каждая бесконечная последовательность чисел $\psi_i \in \mathbb{k}$ задаёт по этой формуле линейный функционал $\psi : \mathbb{k}[x] \rightarrow \mathbb{k}$. Бесконечную последовательность элементов ψ_i поля \mathbb{k} удобно кодировать *производящей функцией* — формальным степенным рядом $\Psi(t) = \sum_{i \geq 0} \psi_i t^i \in \mathbb{k}[[t]]$. Таким образом, двойственное к $\mathbb{k}[x]$ векторное пространство $\mathbb{k}[x]^*$ изоморфно пространству формальных степенных рядов $\mathbb{k}[[t]]$. При этом изоморфизме каждый степенной ряд $\Psi(t) = \sum_{i \geq 0} \psi_i t^i$ задаёт линейный функционал $\psi : \mathbb{k}[x] \rightarrow \mathbb{k}$, переводящий многочлен $a \in \mathbb{k}[x]$ в число (7-1). Например, функционал вычисления $\text{ev}_\alpha : \mathbb{k}[x] \rightarrow \mathbb{k}, f \mapsto f(\alpha)$, сопоставляющий многочленам их значения в точке $\alpha \in \mathbb{k}$ и действующий на базисные мономы по правилу $x^n \mapsto \alpha^n$, задаётся степенным рядом

$$E_\alpha(t) = \sum_{n \geq 0} \alpha^n t^n = \frac{1}{1 - \alpha t} \in \mathbb{k}[[t]].$$

Отметим, что все функционалы вычисления линейно независимы, так как равенство

$$\frac{\lambda_1}{1 - \alpha_1 t} + \frac{\lambda_2}{1 - \alpha_2 t} + \dots + \frac{\lambda_k}{1 - \alpha_k t} = 0$$

¹А также *линейными формами*.

в кольце $\mathbb{k}[[t]]$ после приведения к общему знаменателю превращается в равенство

$$\lambda_1 \prod_{v \neq 1} (1 - \alpha_v t) + \lambda_2 \prod_{v \neq 2} (1 - \alpha_v t) + \dots + \lambda_k \prod_{v \neq k} (1 - \alpha_v t) = 0$$

в кольце многочленов $\mathbb{k}[t]$, подставляя в которое $t = 1/\alpha_i$, мы заключаем, что $\lambda_i = 0$ для каждого $i = 1, \dots, k$. В частности, в пространстве $\mathbb{R}[[t]] \simeq \mathbb{R}[x]^*$, двойственном к счётномерному пространству $\mathbb{R}[x]$, имеется несчётное линейно независимое множество векторов.

УПРАЖНЕНИЕ 7.1. Покажите, что векторное пространство $\mathbb{k}[[t]]$ не порождается линейно никаким счётным множеством векторов ни над каким полем \mathbb{k} .

ПРИМЕР 7.3 (Функционалы вычисления функций на множестве)

Пусть X — любое множество, и $V = \mathbb{k}^X$ — пространство всех функций $X \rightarrow \mathbb{k}$, как в [прим. 4.1](#) на стр. 49. С каждой точкой $x \in X$ связан функционал вычисления¹ $ev_x: \mathbb{k}^X \rightarrow \mathbb{k}$, $f \mapsto f(x)$, переводящий функцию $f: X \rightarrow \mathbb{k}$ в её значение $f(x) \in \mathbb{k}$ в точке x . Функционалы вычисления линейно независимы, поскольку вычисляя обе части равенства $\lambda_1 ev_{x_1} + \dots + \lambda_m ev_{x_m} = 0$ на дельта-функции $\delta_{x_i}: X \rightarrow \mathbb{k}$, равной нулю во всех точках множества X кроме точки x_i , где она равна единице, мы заключаем, что $\lambda_i = 0$ для каждого $i = 1, \dots, m$.

7.1.1. Двойственные базисы. С каждым базисом $e = (e_1, \dots, e_n)$ конечномерного векторного пространства V связан набор координатных функционалов $e^* = (e_1^*, \dots, e_n^*)$, лежащих в двойственном пространстве V^* . По определению, функционал $e_i^*: V \rightarrow \mathbb{k}$ сопоставляет каждому вектору пространства V его i -ю координату в базисе e , т. е. $e_i^*(x_1 e_1 + \dots + x_n e_n) \stackrel{\text{def}}{=} x_i$. Таким образом, значения функционала e_i^* на базисных векторах e_j суть

$$e_i^*(e_j) = \begin{cases} 1 & \text{при } j = i \\ 0 & \text{при } j \neq i. \end{cases} \quad (7-2)$$

УПРАЖНЕНИЕ 7.2. Убедитесь, что все отображения $e_i^*: V \rightarrow \mathbb{k}$ линейны.

Из формулы (7-2) вытекает, что ковекторы e_1^*, \dots, e_n^* линейно независимы: вычисляя обе части равенства $\lambda_1 e_1^* + \dots + \lambda_n e_n^* = 0$ на базисном векторе e_i , мы заключаем, что $\lambda_i = 0$ для каждого $i = 1, \dots, n$. С другой стороны, каждый линейный функционал $\varphi: V \rightarrow \mathbb{k}$ линейно выражается через координатные функционалы e_i^* — коэффициентами этого линейного выражения являются значения функционала φ на соответствующих базисных векторах пространства V , поскольку для любого вектора $v = x_1 e_1 + \dots + x_n e_n$ выполняется равенство

$$\varphi(v) = \varphi(x_1 e_1 + \dots + x_n e_n) = x_1 \varphi(e_1) + \dots + x_n \varphi(e_n) = e_1^*(v) \varphi(e_1) + \dots + e_n^*(v) \varphi(e_n), \quad (7-3)$$

как раз и означающее, что $\varphi = e_1^* \cdot \varphi(e_1) + \dots + e_n^* \cdot \varphi(e_n)$ в пространстве V^* . Таким образом, координатные функционалы e_i^* образуют базис векторного пространства V^* . Этот базис называется *двойственным* к базису из векторов e_i в V . В частности, в противовес [прим. 7.2](#), для конечномерного пространства V выполняется равенство $\dim V^* = \dim V$.

УПРАЖНЕНИЕ 7.3. Пусть $\dim V = n$, а векторы $v_1, \dots, v_n \in V$ и ковекторы $\varphi_1, \dots, \varphi_n \in V^*$ таковы, что $\varphi_i(v_i) = 1$ и $\varphi_i(v_j) = 0$ при $i \neq j$. Покажите, что векторы v_i образуют базис в V , а ковекторы φ_i — двойственный базис в V^* .

¹Обозначение ev происходит от «evaluation».

ПРИМЕР 7.4 (ФОРМУЛА ТЕЙЛОРА)

Пусть поле \mathbb{k} имеет характеристику нуль¹. Зафиксируем число $a \in \mathbb{k}$ и обозначим через

$$\varphi_i : \mathbb{k}[x]_{\leq n} \rightarrow \mathbb{k}, \quad f \mapsto f^{(i)}(a),$$

функционал на пространстве многочленов степени не выше n , сопоставляющий многочлену значение его i -й производной в точке a . При $i = 0$ мы полагаем $\varphi_0(f) = \text{ev}_a(f) = f(a)$. Функционалы $\varphi_0, \varphi_1, \dots, \varphi_n$ и многочлены $f_k(x) = (x - a)^k / k!$, где $k = 0, 1, \dots, n$ и $0! \stackrel{\text{def}}{=} 1$, удовлетворяют условиям [упр. 7.3](#), т. е. $\varphi_i(f_i) = 1$ и $\varphi_i(f_j) = 0$ при $i \neq j$. Следовательно, многочлены f_i составляют базис в пространстве $\mathbb{k}[x]_{\leq n}$ и координатами многочлена $g \in \mathbb{k}[x]_{\leq n}$ в этом базисе являются значение многочлена g и первых n его производных в точке a . Иными словами, для любого многочлена g степени не выше n имеет место *формула Тэйлора*

$$g(x) = g(a) + g'(a) \cdot (x - a) + g''(a) \cdot \frac{(x - a)^2}{2} + \dots + g^{(n)}(a) \cdot \frac{(x - a)^n}{n!}, \quad (7-4)$$

а для любого набора чисел $b_0, b_1, \dots, b_n \in \mathbb{k}$ существует единственный такой многочлен g степени не выше n , что $g^{(i)}(a) = b_i$ при всех $i = 0, 1, \dots, n$, и этот многочлен задаётся формулой

$$g(x) = \sum_{k=0}^n b_k (x - a)^k / k!.$$

7.1.2. Канонический изоморфизм $V \simeq V^{}$.** Каждый вектор $v \in V$ задаёт на двойственном к V пространстве V^* функционал вычисления $\text{ev}_v : V^* \rightarrow \mathbb{k}, \varphi \mapsto \varphi(v)$. Поскольку число $\varphi(v) \in \mathbb{k}$ линейно зависит как от $v \in V$, так и от $\varphi \in V^*$, сопоставление вектору v функционала вычисления ev_v задаёт *каноническое*² линейное вложение

$$\text{ev} : V \hookrightarrow V^{**}, \quad v \mapsto \text{ev}_v. \quad (7-5)$$

УПРАЖНЕНИЕ 7.4. Убедитесь, что отображение (7-5) инъективно³.

Если пространство V конечномерно, то согласно [упр. 7.3](#) каждый базис e_1, \dots, e_n пространства V переводится отображением (7-5) в двойственный к базису e_1^*, \dots, e_n^* пространства V^* базис пространства V^{**} . Тем самым, для конечномерного пространства V отображение (7-5) канонически отождествляет V^{**} с V , т. е. каждая линейная форма $V^* \rightarrow \mathbb{k}$ представляет собою функционал вычисления значений ковекторов из V^* на однозначно задаваемом этой формой векторе $v \in V$, и любой базис $\varepsilon = (\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n)$ пространства V^* состоит из координатных функционалов для однозначно задаваемого этим базисом базиса $\varepsilon^* = (e_1, \dots, e_n) = (\varepsilon_1^*, \dots, \varepsilon_n^*)$ в V . Таким образом, двойственные конечномерные пространства V и V^* играют по отношению друг к другу совершенно симметричные роли: *каждое* из них является пространством линейных функционалов на другом. Чтобы подчеркнуть эту симметрию между векторами и ковекторами, мы будем называть число

$$\langle \varphi, v \rangle \stackrel{\text{def}}{=} \varphi(v) = \text{ev}_v(\varphi) \in \mathbb{k} \quad (7-6)$$

свёрткой ковектора φ с вектором v . Свёртка является билинейным отображением

$$V^* \times V \rightarrow \mathbb{k}, \quad (\varphi, v) \mapsto \langle \varphi, v \rangle.$$

¹Т. е. сумма любого числа единиц поля \mathbb{k} отлична от нуля.

²Т. е. не требующее выбора базиса.

³Для любого, в том числе и бесконечномерного векторного пространства V .

Для координатного пространства $V = \mathbb{k}^n$ в обозначениях из [прим. 7.1](#) на стр. 83 свёртка ковектора-строки $\xi = (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n) \in \mathbb{k}^{n*}$ с вектором-столбцом $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)^t \in \mathbb{k}^n$ задаётся матричным произведением $\langle \xi, x \rangle = \xi x = \xi_1 x_1 + \dots + \xi_n x_n$. Обратите внимание, что правая часть этого равенства абсолютно симметрична по буквам ξ и x .

7.2. Аннуляторы. Каждое множество ковекторов $M \subset V^*$ можно воспринимать как систему однородных линейных уравнений $\xi(x) = 0$ на неизвестный вектор $x \in V$ с левыми частями ξ , пробегающими множество M . Пространство¹ всех решений такой системы обозначается

$$\text{Ann}(M) \stackrel{\text{def}}{=} \{v \in V \mid \xi(v) = 0 \ \forall \xi \in M\} \subset V$$

и называется *аннулятором* множества ковекторов $M \subset V^*$.

Двойственным образом, для любого множества векторов $N \subset V$ положим

$$\text{Ann}(N) \stackrel{\text{def}}{=} \{\varphi \in V^* \mid \varphi(v) = 0 \ \forall v \in N\} \subset V^*.$$

Таким образом, $\text{Ann}(N)$ представляет собою множество всех линейных уравнений $\xi(x) = 0$, пространство решений которых содержит множество N , или — на геометрическом языке — множество уравнений всех содержащих множество N гиперплоскостей² в V . С другой стороны, как и выше, множество $\text{Ann}(N) \subset V^*$ является множеством решений системы однородных уравнений $e_v(y) = 0$ на неизвестный ковектор $y \in V^*$ с левыми частями e_v , пробегающими множество $N \subset V$. В частности, $\text{Ann}(N)$ всегда является векторным подпространством в V^* .

УПРАЖНЕНИЕ 7.5. Убедитесь, что аннулятор любого множества совпадает с аннулятором его линейной оболочки.

Предложение 7.1

Для любых³ векторного пространства V и подпространства $U \subset V$ имеются канонические изоморфизмы $(V/U)^* \simeq \text{Ann } U$ и $V^*/\text{Ann } U \simeq U^*$.

Доказательство. Чтобы задать первый изоморфизм, обозначим через $\pi : V \twoheadrightarrow V/U, v \mapsto [v]_U$, отображение факторизации и сопоставим линейному функционалу $\xi : V/U \rightarrow \mathbb{k}$ композицию $\xi\pi : V \rightarrow \mathbb{k}, v \mapsto \xi([v]_U)$. Получим линейное отображение $F : (V/U)^* \rightarrow V^*, \xi \mapsto \xi \circ \pi$, у которого $\ker F = 0$ и $\text{im } F \subseteq \text{Ann } U$. Обратное отображение $F^{-1} : \text{Ann } U \rightarrow (V/U)^*$ сопоставляет зануляющемуся на подпространстве U линейному функционалу $\psi : V \rightarrow \mathbb{k}$ линейный функционал $\bar{\psi} : (V/U)^* \rightarrow \mathbb{k}$, действующий по правилу $\bar{\psi}([v]_U) = \psi(v)$.

УПРАЖНЕНИЕ 7.6. Убедитесь, что это правило корректно и что $\overline{\xi\pi} = \xi$ для всех $\xi \in (V/U)^*$, а $\overline{\psi\pi} = \psi$ для всех $\psi \in \text{Ann } U \subset V^*$.

Чтобы задать второй изоморфизм, рассмотрим линейное отображение $G : V^* \rightarrow U^*, \xi \mapsto \xi|_U$, которое сопоставляет линейному функционалу $\xi : V \rightarrow \mathbb{k}$ его ограничение на подпространство $U \subset V$. По построению, $\ker G = \text{Ann } U$. Отображение G сюръективно, поскольку каждый функционал $\psi : U \rightarrow \mathbb{k}$ можно продолжить до функционала $\varphi : V \rightarrow \mathbb{k}$ с ограничением $\varphi|_U = \psi$.

УПРАЖНЕНИЕ 7.7. Убедитесь в этом.

Канонический изоморфизм $V^*/\ker G \simeq \text{im } G$ из [прим. 4.9](#) на стр. 58 — это нужный нам изоморфизм $V^*/\text{Ann } U \simeq U^*$. \square

¹Будучи пересечением ядер линейных отображений $\xi : V \rightarrow \mathbb{k}$ по всем $\xi \in M$, аннулятор любого множества $M \subset V^*$ является векторным подпространством в V .

²См. [прим. 4.4](#) на стр. 51.

³В том числе бесконечномерных.

Следствие 7.1

Если векторное пространство V конечномерно, то для любого подпространства $U \subset V$ выполняется равенство $\dim U + \dim \text{Ann } U = \dim V$.

Доказательство. В силу предл. 7.1 $\dim \text{Ann } U = \dim(V/U)^* = \dim(V/U)$, а по предл. 4.8 на стр. 58 $\dim(V/U) = \dim V - \dim U$. \square

УПРАЖНЕНИЕ 7.8. Пусть векторы u_1, \dots, u_k составляют базис в U , а векторы w_1, \dots, w_m дополняют их до базиса в V . Обозначим через $u_1^*, \dots, u_k^*, w_1^*, \dots, w_m^*$ двойственный базис¹ в V^* . Покажите, что ковекторы w_1^*, \dots, w_m^* образуют базис в $\text{Ann } U$.

Следствие 7.2

Для любого векторного подпространства $U \subset V$ выполняется равенство $\text{Ann Ann } U = U$.

Доказательство. По определению аннуляторов, $U \subset \text{Ann Ann } U$. С другой стороны, по сл. 7.1 $\dim \text{Ann Ann } U = \dim V^* - \dim \text{Ann } U = \dim V^* - \dim V + \dim U = \dim U$. \square

Замечание 7.1. Если в сл. 7.1 и сл. 7.2 взять в качестве V двойственное пространство V^* и отождествить двойственное к V^* пространство V^{**} с исходным пространством V при помощи канонического изоморфизма из н° 7.1.2, то мы получим для любого подпространства $U \subset V^*$ равенства $\dim U + \dim \text{Ann } U = \dim V$ и $\text{Ann Ann } U = U$.

Замечание 7.2. На языке линейных уравнений сл. 7.2 утверждает, что любая линейная форма, которая зануляется на всех решениях некоторой системы однородных линейных уравнений, является линейной комбинацией этих уравнений, а сл. 7.1 означает, что каждое подпространство коразмерности m в V можно задать системой из m линейно независимых линейных уравнений, и наоборот, множество решений всякой системы из m линейно независимых уравнений на пространстве V представляет собою векторное подпространство коразмерности m в V .

УПРАЖНЕНИЕ 7.9. Покажите, что $\text{Ann Ann } N = \text{span } N$ для любого подмножества $N \subset V$.

Пример 7.5 (ТЕОРЕМА О РАНГЕ МАТРИЦЫ)

Столбцы a_1, \dots, a_n произвольной матрицы $A \in \text{Mat}_{m \times n}(\mathbb{k})$ являются векторами координатного пространства \mathbb{k}^m . Обозначим через $U \subset \mathbb{k}^m$ их линейную оболочку. Каждый максимальный по включению линейно независимый набор столбцов является базисом в U и состоит ровно из $\dim U$ векторов. В i -й строке матрицы A стоят вычисленные на векторах a_1, \dots, a_n значения базисного ковектора $e_i^* \in \mathbb{k}^{m*}$ из двойственного к стандартному базису в \mathbb{k}^m базиса в \mathbb{k}^{m*} . Согласно предл. 7.1, ограничения функционалов e_1^*, \dots, e_n^* на подпространство U линейно порождают двойственное к U пространство U^* . Поэтому любой максимальный по включению линейно независимый набор функционалов $e_i^*|_U$ составляет базис в U^* и тоже состоит из $\dim U^* = \dim U = \text{rk } A$ векторов. Поскольку линейная зависимость функционалов $e_i^*|_U$ равносильна линейной зависимости строк значений этих функционалов на порождающих пространство U векторах² a_1, \dots, a_n , ограничения на подпространство U ковекторов $e_{i_1}^*, e_{i_2}^*, \dots, e_{i_{\text{rk } A}}^*$

¹См. н° 7.1.1 на стр. 84.

²Ибо равенство $\lambda_1 \varphi_1 + \lambda_2 \varphi_2 + \dots + \lambda_k \varphi_k = 0$ в U^* , где $\lambda_i \in \mathbb{k}$, а $\varphi_i \in U^*$, равносильно выполнению равенств $\lambda_1 \varphi_1(u) + \lambda_2 \varphi_2(u) + \dots + \lambda_k \varphi_k(u) = 0$ для всех векторов u из какого-нибудь линейно порождающего пространство U набора векторов.

тогда и только тогда составляют базис в U^* , когда строки с номерами $i_1, i_2, \dots, i_{\text{rk} A}$ составляют базис линейной оболочки строк матрицы A в пространстве \mathbb{k}^n . Мы получаем новое, более простое и концептуальное доказательство *теоремы о ранге матрицы*¹: линейная оболочка строк $m \times n$ матрицы в координатном пространстве \mathbb{k}^n имеет ту же размерность, что и линейная оболочка столбцов этой матрицы в координатном подпространстве \mathbb{k}^m .

ТЕОРЕМА 7.1

Соответствие $U \leftrightarrow \text{Ann } U$ задаёт биекцию между подпространствами дополнительных размерностей в двойственных пространствах V и V^* . Эта биекция оборачивает включения:

$$U \subset W \iff \text{Ann } U \supset \text{Ann } W,$$

и переводит суммы подпространств в пересечения, а пересечения — в суммы.

Доказательство. Обозначим через $\mathcal{S}(V)$ множество всех подпространств векторного пространства V . Равенство $\text{Ann Ann } U = U$ означает, что отображения, сопоставляющие подпространству его аннулятор в двойственном пространстве

$$\mathcal{S}(V) \begin{array}{c} \xrightarrow{U \mapsto \text{Ann } U} \\ \xleftarrow{\text{Ann } W \mapsto W} \end{array} \mathcal{S}(V^*)$$

обратны друг другу, и следовательно, биективны. Импликация $U \subset W \Rightarrow \text{Ann } U \supset \text{Ann } W$ очевидна. Если взять в ней в качестве U и W , соответственно, подпространства $\text{Ann } W$ и $\text{Ann } U$ и воспользоваться равенствами $\text{Ann Ann } W = W$ и $\text{Ann Ann } U = U$, получим обратную импликацию $\text{Ann } U \supset \text{Ann } W \Rightarrow U \subset W$. Равенство

$$\bigcap_{\nu} \text{Ann } U_{\nu} = \text{Ann} \left(\sum_{\nu} U_{\nu} \right) \quad (7-7)$$

тоже очевидно: любая линейная форма, зануляющаяся на каждом из подпространств U_{ν} , зануляется и на их линейной оболочке, а форма, зануляющаяся на сумме подпространств, зануляется и на каждом подпространстве в отдельности. Если взять в (7-7) в качестве подпространств U_{ν} пространства $\text{Ann } U_{\nu}$, получаем равенство $\bigcap_{\nu} U_{\nu} = \text{Ann} \left(\sum_{\nu} \text{Ann } U_{\nu} \right)$. Беря в нём аннуляторы обеих частей, приходим к равенству $\text{Ann} \left(\bigcap_{\nu} W_{\nu} \right) = \sum_{\nu} \text{Ann } W_{\nu}$. \square

Следствие 7.3

Две системы однородных линейных уравнений $Ax = 0$ и $Bx = 0$ на переменный вектор-столбец $x \in \mathbb{k}^n$ имеют одно и то же пространство решений если и только если приведённые ступенчатые матрицы A_{red} и B_{red} этих систем совпадают друг с другом с точностью до добавления или удаления нулевых строк.

Доказательство. Обозначим через U и W линейные оболочки строк матриц A и B в пространстве \mathbb{k}^{n*} ковекторов-строк ширины n . Согласно [упр. 7.9](#) пространства решений систем уравнений $Ax = 0$ и $Bx = 0$ суть не что иное как лежащие в пространстве векторов-столбцов \mathbb{k}^n высоты n аннуляторы $\text{Ann } U$ и $\text{Ann } W$ пространств U и W . По [теор. 7.1](#) равенство $\text{Ann } U = \text{Ann } W$ пространств решений равносильно равенству $U = W$ линейных оболочек строк матриц A и B . По [сл. 6.1](#) на стр. 82 эти линейные оболочки совпадают если и только если совпадают их базисы с приведёнными ступенчатыми матрицами координат. \square

¹Ср. с [теор. 5.1](#) на стр. 66.

7.3. Двойственные линейные отображения. С каждым линейным отображением векторных пространств $F : U \rightarrow W$ канонически связано двойственное отображение

$$F^* : W^* \rightarrow U^*, \quad \xi \mapsto \xi \circ F, \quad (7-8)$$

действующее между двойственными пространствами в противоположном к F направлению и переводящее линейную форму $\xi : W \rightarrow \mathbb{K}$ в линейную форму $F^*\xi$, значение которой на векторе $v \in U$ равно $F^*\xi(v) \stackrel{\text{def}}{=} \xi(Fv)$.

УПРАЖНЕНИЕ 7.10. Убедитесь, что композиция $F \circ \xi$ является линейной формой на U и что отображение F^* линейно.

На языке свёрток между векторами и ковекторами¹ связь между двойственными операторами описывается равенством

$$\forall \langle F^*\xi, v \rangle = \langle \xi, Fv \rangle \quad \text{для всех } v \in W \text{ и } \xi \in U^*, \quad (7-9)$$

из которого видно, что операторы F и F^* играют симметричные роли по отношению друг к другу: двойственный к оператору $F^* : W^* \rightarrow U^*$ оператор $F^{**} : U^{**} \rightarrow W^{**}$ превращается в оператор $F : U \rightarrow W$ при канонических отождествлениях $U^{**} \simeq U$ и $W^{**} \simeq W$ из п° 7.1.2 на стр. 85.

УПРАЖНЕНИЕ 7.11. Убедитесь в этом.

Предложение 7.2

Для двойственных операторов $F : U \rightarrow W$ и $F^* : W^* \rightarrow U^*$ имеют место равенства

$$\begin{aligned} (1) \ker F &= \text{Ann im}(F^*) & (2) \ker(F^*) &= \text{Ann im } F \\ (3) \text{im}(F^*) &= \text{Ann ker } F & (4) \text{im } F &= \text{Ann ker}(F^*). \end{aligned}$$

Доказательство. Вектор $F(v) \in W$ нулевой если и только если все линейные функционалы $\xi : W \rightarrow \mathbb{K}$ принимают на нём нулевое значение, т. е. $\langle \xi, Fv \rangle = 0$ для всех $\xi \in W^*$. В силу (7-9) это требование равносильно требованию $\langle F^*\xi, v \rangle = 0$ для всех $\xi \in W^*$, которое означает, что $v \in \text{Ann im } F^*$. Это доказывает равенство (1). Равенство (2) представляет собою равенство (1), написанное для оператора F^* в роли F и оператора $F^{**} = F$ в роли F^* . Равенства (3) и (4) получаются из равенства (1) и (2) взятием аннуляторов обеих частей. \square

Следствие 7.4

Векторные пространства $\text{im } F \subset U$ и $\text{im}(F^*) \subset W^*$ канонически двойственны друг другу. Свёртка вектора $Fv \in \text{im } F$ с ковектором $F^*\xi \in \text{im } F^*$ задаётся формулой

$$\langle F^*\xi, Fv \rangle \stackrel{\text{def}}{=} \langle F^*\xi, v \rangle = \langle \xi, Fv \rangle. \quad (7-10)$$

Доказательство. В прим. 4.9 на стр. 58 и предл. 7.1 на стр. 86 были построены канонические изоморфизмы $\text{im } F \simeq U/\ker F$ и $(U/\ker F)^* \simeq \text{Ann ker } F$, последний из которых спаривает ковектор $\eta \in \text{Ann ker } F \subset U^*$ с вектором $[u] \in U/\ker F$ по правилу $\langle \eta, [u] \rangle = \langle \eta, u \rangle$, а первый отождествляет класс $[u] \in U/\ker F$ с вектором $F(u) \in \text{im } F$. Равенство (3) из предл. 7.2 утверждает, что каждый $\eta \in \text{Ann ker } F$ однозначно записывается в виде $F^*\xi$, где $\xi \in W^*$. Собирая

¹См. 7-6 на стр. 85.

всё это вместе и пользуясь равенством $\langle F^* \xi, u \rangle = \langle \xi, Fu \rangle$, мы заключаем, что свёртка ковектора $\eta = F^* \xi \in \text{im } F^* = \text{Ann ker } F \subset U^*$ с вектором $Fu \in \text{im } F$, который представляет класс $[u] \in U/\text{ker } F$ при изоморфизме $\text{im } F \simeq U/\text{ker } F$, задаётся формулой (7-10). \square

УПРАЖНЕНИЕ 7.12. Убедитесь непосредственно, что формула (7-10) корректна, т. е. результат свёртки не зависит от выбора ковектора $\xi \in W^*$ и вектора $v \in U$, использованных для записи элементов из $\text{im } F^*$ и $\text{im } F$.

Следствие 7.5

Векторное пространство $\text{ker } F \subset U$ канонически двойственно фактор пространству $U^*/\text{im } F^*$, а пространство $\text{ker } F^* \subset W^*$ — фактор пространству $W/\text{im } F$. Свёртки между ними задаются формулами

$$\langle \psi + F^*(W^*), v \rangle \stackrel{\text{def}}{=} \langle \psi, v \rangle \quad \text{и} \quad \langle \xi, w + F(U) \rangle \stackrel{\text{def}}{=} \langle \xi, w \rangle, \quad (7-11)$$

где $\psi + F^*(W^*) \in U^*/\text{im}(F^*)$, $v \in \text{ker } F$, $\xi \in \text{ker } F^*$, $w + F(U) \in W/\text{im } F$. \square

УПРАЖНЕНИЕ 7.13. Проверьте корректность определений (7-11), т. е. независимость правых частей от выбора представителей ψ и w в классах $\psi + F^*(W^*)$ и $w + F(U)$, и докажите сл. 7.5 по образцу сл. 7.4.

Замечание 7.3. Принимая во внимание двойственности из сл. 7.5, фактор по образу линейного отображения F часто называют *коядром* отображения F и обозначают $\text{coker}(F) \stackrel{\text{def}}{=} W/\text{im } F$. В этих обозначениях первые два утверждения из сл. 7.5 записываются равенствами

$$(\text{ker } F)^* = \text{coker}(F^*) \quad \text{и} \quad (\text{coker } F)^* = \text{ker}(F^*).$$

Предложение 7.3

Пусть отображение $F : U \rightarrow W$ имеет в некоторых базисах $\mathbf{u} = (u_1, \dots, u_n)$ и $\mathbf{w} = (w_1, \dots, w_m)$ пространств U и W имеет матрицу¹ $F_{\mathbf{w}\mathbf{u}} = (f_{ij})$. Тогда матрица $F_{\mathbf{u}^*\mathbf{w}^*} = (f_{ij}^*)$ двойственного отображения $F^* : W^* \rightarrow U^*$ в двойственных базисах $\mathbf{u}^* = (u_1^*, \dots, u_n^*)$ и $\mathbf{w}^* = (w_1^*, \dots, w_m^*)$ пространств W^* и U^* является транспонированной² к матрице отображения F :

$$F_{\mathbf{u}^*\mathbf{w}^*} = F_{\mathbf{w}\mathbf{u}}^t, \quad \text{т. е. } f_{ij}^* = f_{ji}.$$

Доказательство. Число f_{ij}^* равно i -й координате ковектора $F^*(w_j^*)$ в базисе \mathbf{u}^* , т. е. свёртке этого ковектора с базисным вектором³ u_i :

$$f_{ij}^* = \langle F^* w_j^*, u_i \rangle = \langle w_j^*, F u_i \rangle = \langle w_j^*, \sum_k w_k \cdot f_{ki} \rangle = \sum_k \langle w_j^*, w_k \rangle \cdot f_{ki} = f_{ji},$$

что и утверждалось. \square

Пример 7.6 (ещё раз о ранге матрицы)

Каждая матрица $A = (a_{ij}) \in \text{Mat}_{m \times n}(\mathbb{k})$ является матрицей линейного отображения

$$F : \mathbb{k}^n \rightarrow \mathbb{k}^m,$$

¹См. п° 5.1 на стр. 59.

²См. обсуждение перед упр. 5.5 на стр. 61 из п° 5.2.

³См. форм. (7-3) на стр. 84 и сопутствующее обсуждение.

и линейная оболочка столбцов матрицы A совпадает с образом $\operatorname{im} F$ этого отображения, т. е. $\operatorname{rk} A = \dim \operatorname{im} F$. Согласно [предл. 7.3](#), двойственное отображение $F^* : \mathbb{K}^{m^*} \rightarrow \mathbb{K}^{n^*}$ задаётся в двойственных базисах транспонированной матрицей A^t , откуда

$$\operatorname{rk} A^t = \dim \operatorname{im} F^* = m - \dim \ker F^* = m - \dim \operatorname{Ann} \operatorname{im} F = \dim \operatorname{im} F = \operatorname{rk} A,$$

что даёт ещё одно доказательство теоремы о ранге матрицы¹.

7.4. Отступление: бесконечномерие. Этот раздел относится скорее к теории множеств, чем к линейной алгебре. В нём изложена стандартная машинерия, позволяющая отбросить предположения о конечномерности, которые для упрощения первого знакомства с предметом были сделаны нами в теореме о базисе².

7.4.1. Отношения порядка. Множество X называется *частично упорядоченным* если между некоторыми парами элементов $x, y \in X$ установлено такое отношение $x \leq y$, что для всех $x, y, z \in X$ из $x \leq y$ и $y \leq z$ вытекает, что $x \leq z$, а одновременное выполнение условий $x \leq y$ и $y \leq x$ равносильно равенству $x = y$. Запись $x < y$ означает, что $x \leq y$ и $x \neq y$.

Например, пусть $X = 2^M$ является множеством всех подмножеств некоторого множества M . Отношение нестрого включения $x \subseteq y$ подмножества $x \subseteq M$ в подмножество $y \subseteq M$ задаёт на множестве 2^M частичный порядок. Запись $x \subset y$ означает строгое включение.

Частичный порядок на множестве X называется *линейным*, если для любой пары элементов $x, y \in X$ выполняется неравенство $x \leq y$ или неравенство $y \leq x$. Например, множество рациональных чисел \mathbb{Q} со стандартным отношением неравенства между числами линейно упорядочено, а множество 2^M всех подмножеств множества M с отношением включения не является линейно упорядоченным, если в M не меньше двух элементов.

Линейно упорядоченное множество X называется *вполне упорядоченным*, если каждое непустое подмножество $S \subset X$ содержит такой элемент $s_* \in S$, что $s_* \leq s$ для всех $s \in S$. Этот элемент автоматически единствен и называется *начальным элементом* подмножества S . Например, множество натуральных чисел \mathbb{N} со стандартным отношением неравенства между числами вполне упорядочено, как и любое дизъюнктивное объединение вида $\mathbb{N} \sqcup \mathbb{N} \sqcup \mathbb{N} \sqcup \dots$, в котором все элементы каждой копии множества \mathbb{N} полагаются строго большими всех элементов всех предыдущих копий. Пустое множество тоже вполне упорядочено. Напротив, множество $\mathbb{Q} \supset \mathbb{N}$ со стандартным отношением неравенства между числами не является вполне упорядоченным.

Вполне упорядоченные множества замечательны тем, что их элементы можно рекурсивно перебрать точно так же, как и элементы множества \mathbb{N} . А именно, пусть некоторое зависящее от элемента x вполне упорядоченного множества X утверждение $\Phi(x)$ истинно для начального элемента x_* множества X , и пусть для каждого $x \in X$ истинность утверждения $\Phi(y)$ при всех $y < x$ влечёт за собою истинность утверждения $\Phi(x)$. Тогда $\Phi(x)$ истинно для всех $x \in X$.

Упражнение 7.14. Убедитесь в этом.

Такой способ доказательства утверждения $\Phi(x)$ для всех $x \in X$ называется *трансфинитной индукцией*. Используемые для индуктивного перехода специальные подмножества

$$[x) \stackrel{\text{def}}{=} \{y \in X \mid y < x\}$$

¹Ср. с [прим. 7.5](#) на стр. 87.

²См. [теор. 4.1](#) на стр. 48.

называются *начальными интервалами* частично упорядоченного множества X . Элемент $x \in X$ называется *точной верхней гранью* начального интервала $[x) \subset X$. Отметим, что начальный элемент $x_* \in X$ является точной верхней гранью пустого начального интервала $[x_*) = \emptyset$.

УПРАЖНЕНИЕ 7.15. Покажите, что собственное подмножество $I \subsetneq X$ тогда и только тогда является начальным интервалом вполне упорядоченного множества X , когда $[y) \subset I$ для каждого $y \in I$, и в этом случае точная верхняя грань интервала I однозначно восстанавливается по I как начальный элемент дополнения $X \setminus I$.

7.4.2. Лемма Цорна. Рассмотрим произвольное частично упорядоченное множество P и обозначим через $\mathcal{W}(P)$ множество всех подмножеств $W \subset P$, которые вполне упорядочены имеющимся на P отношением $x \leq y$. Множество $\mathcal{W}(P)$ непусто и содержит пустое подмножество $\emptyset \subset P$, а также все конечные линейно упорядоченные подмножества¹ $L \subset P$ и, в частности, все элементы множества P .

ЛЕММА 7.1

Не существует такого отображения $\varrho : \mathcal{W}(P) \rightarrow P$, что $\varrho(W) > w$ для всех $W \in \mathcal{W}(P)$ и $w \in W$.

Доказательство. Пусть такое отображение ϱ существует. Назовём вполне упорядоченное подмножество $W \subset P$ ϱ -рекурсивным, если $\varrho([y)) = y$ для всех $y \in W$. Например, множество

$$\left\{ \varrho(\emptyset), \varrho(\{\varrho(\emptyset)\}), \varrho(\{\varrho(\emptyset), \varrho(\{\varrho(\emptyset)\})\}) \right\}$$

ϱ -рекурсивно и может неограниченно расширяться вправо. Любые два различных ϱ -рекурсивных вполне упорядоченных подмножества с общим начальным элементом обладают тем свойством, что одно из них является начальным интервалом другого.

УПРАЖНЕНИЕ 7.16. Докажите это.

Обозначим через $U \subset P$ объединение всех ϱ -рекурсивных вполне упорядоченных подмножеств в P с начальным элементом $\varrho(\emptyset)$.

УПРАЖНЕНИЕ 7.17. Убедитесь, что подмножество $U \subset P$ вполне упорядочено и ϱ -рекурсивно.

Поскольку элемент $\varrho(U)$ строго больше всех элементов из U , он не лежит в U . С другой стороны, множество $W = U \cup \{\varrho(U)\}$ вполне упорядочено, ϱ -рекурсивно, и его начальным элементом является $\varrho(\emptyset)$. Следовательно, $W \subset U$, откуда $\varrho(U) \in U$. Противоречие. \square

Предложение 7.4

Пусть каждое вполне упорядоченное подмножество W частично упорядоченного множества P имеет в P верхнюю грань². Тогда в P есть такой (возможно не единственный) элемент $p^* \in P$, что неравенство $p^* \leq x$ выполняется в P только для $x = p^*$.

Доказательство. Если требуемого элемента p^* нет, то для каждого элемента $p \in P$ найдётся такой элемент $p' \in P$, что $p < p'$. Тогда для каждого вполне упорядоченного подмножества $W \subset P$ найдётся такой (возможно не единственный) элемент $w^* \in P$, что $w < w^*$ для всех $w \in W$. Сопоставляя каждому $W \in \mathcal{W}$ один из этих элементов w^* , мы получаем отображение $\varrho : \mathcal{W} \rightarrow P$, которого не может быть по **лем. 7.1**. \square

¹Линейно упорядоченные подмножества частично упорядоченного множества называются *цепями*.

²Т. е. такой (возможно не единственный) элемент $w^* \in P$, что $w \leq w^*$ для всех $w \in W$.

Следствие 7.6 (лемма Цорна)

Пусть каждое линейно упорядоченное подмножество L частично упорядоченного множества P имеет в P верхнюю грань, т. е. такой (возможно не единственный) элемент $s^* \in P$, что $x \leq s^*$ для всех $x \in L$. Тогда в P есть такой (возможно не единственный) элемент¹ p^* , что неравенство $p^* \leq x$ выполняется в P только при $x = p^*$. \square

7.4.3. Теоремы о базисах. Подмножество B векторного пространства V называется *порождающим*, если каждый вектор $v \in V$ записывается в виде

$$v = \lambda_1 b_1 + \lambda_2 b_2 + \dots + \lambda_n b_n, \quad \text{где } n \in \mathbb{N}, b_i \in B, \lambda_i \in \mathbb{K}.$$

Иначе можно сказать, что каждый вектор $v \in V$ допускает линейное разложение

$$v = \sum_{b \in B} \lambda_b b, \quad \text{где } \lambda_b \in \mathbb{K}, \quad (7-12)$$

в котором лишь конечное число коэффициентов λ_b отлично от нуля. Порождающее подмножество $B \subset V$ называется *базисом* пространства V , если для каждого $v \in V$ разложение (7-12) единственно, то есть равенство $\sum_{b \in B} \lambda_b b = \sum_{b \in B} \mu_b b$, в котором лишь конечное число коэффициентов λ_b, μ_b отлично от нуля, равносильно тому, что $\lambda_b = \mu_b$ при всех $b \in B$. Непустое множество $A \subset V$ называется *линейно независимым* если равенство

$$\lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + \dots + \lambda_n a_n = 0, \quad \text{где } n \in \mathbb{N}, a_i \in A, \lambda_i \in \mathbb{K},$$

возможно только когда все $\lambda_i = 0$.

УПРАЖНЕНИЕ 7.18. Убедитесь в том, что множество $E \subset V$ является базисом если и только если оно линейно независимо и порождает V .

ТЕОРЕМА 7.2 (СУЩЕСТВОВАНИЕ БАЗИСА)

В каждом отличном от нуля векторном пространстве V для любого² линейно независимого множества $A \subset V$ и любого³ порождающего V множества векторов $B \supset A$ существует базис E , содержащий A и содержащийся в B .

Доказательство. Линейно независимые множества векторов $X \subseteq V$ со свойством $A \subseteq X \subseteq B$ образуют частично упорядоченное отношением включения множество, удовлетворяющее лемме Цорна⁴. В качестве верхней грани линейно упорядоченной цепи вложенных друг в друга линейно независимых наборов векторов можно взять их объединение. Оно линейно независимо, поскольку любой конечный набор его векторов лежит в каком-то одном из множеств цепи, а оно линейно независимо. По лемме Цорна существует такое линейно независимое множество E , что $A \subseteq E \subseteq B$ и для любого линейно независимого множества X со свойством $A \subseteq X \subseteq B$ включение $E \subseteq X$ влечёт равенство $E = X$. Покажем, что E линейно порождает V . Достаточно убедиться, что каждый вектор $b \in B \setminus E$ линейно выражается через E . Так как множество $E \cup \{b\}$ строго больше E , оно линейно зависимо. Поскольку само множество E линейно независимо, любое линейное соотношение между векторами из $E \cup \{b\}$ содержит с ненулевым коэффициентом вектор b . Тем самым, он линейно выражается через E . \square

¹Элементы с таким свойством принято называть *максимальными*.

²В том числе, пустого.

³В том числе, совпадающего с V .

⁴См. сл. 7.6 на стр. 93.

Следствие 7.7

Каждое ненулевое векторное пространство имеет базис, и любой базис любого подпространства можно дополнить до базиса во всём пространстве. \square

ТЕОРЕМА 7.3 (РАВНОМОЩНОСТЬ БАЗИСОВ)

В каждом векторном пространстве все базисы равномощны.

Доказательство. Пусть базис B строго мощнее базиса E . Поскольку в конечномерном пространстве это невозможно по теор. 4.1 на стр. 48, оба базиса бесконечны. Каждый вектор $e \in E$ является линейной комбинацией конечного множества векторов $B_e \subset B$. Так как множество E бесконечно, объединение $B_E = \bigcup_{e \in E} B_e$ всех этих конечных множеств равномощно E .

УПРАЖНЕНИЕ 7.19. Убедитесь в этом.

Стало быть, существует вектор $b \in B$, не лежащий в B_e . Линейно выражая b через векторы базиса E , а каждый из входящих в это выражение векторов $e \in E$ — через векторы из B_e , мы получим линейное выражение вектора $b \in B \setminus B_E$ через векторы из B_E . Тем самым, множество B линейно зависимо. Противоречие. \square

Следствие 7.8

Всякое более мощное, чем базис, множество векторов линейно зависимо. \square

ТЕОРЕМА 7.4 (ПРОДОЛЖЕНИЕ ЛИНЕЙНЫХ ОТОБРАЖЕНИЙ)

Для каждого линейного отображения $F : U \rightarrow W$, заданного на подпространстве U векторного пространства V , существует такое (возможно, не единственное) линейное отображение $G : V \rightarrow W$, что $G|_U = F$.

Доказательство. Каждое линейное отображение $G : V \rightarrow W$ однозначно задаётся своими значениями на векторах любого базиса E пространства V , и для любого отображения множеств $g : E \rightarrow W$ существует единственное такое линейное отображение $G : V \rightarrow W$, что $G(e) = g(e)$ для всех $e \in E$.

УПРАЖНЕНИЕ 7.20. Убедитесь в этом.

Рассмотрим произвольный базис B в U , дополним его до базиса $E = B \sqcup C$ в V и рассмотрим любое отображение множеств $g : E \rightarrow W$, переводящее каждый вектор $b \in B$ в $F(b)$. Отвечающее этой функции линейное отображение обладает требуемым свойством. \square

Ответы и указания к некоторым упражнениям

Упр. 7.1. Множество всевозможных конечных \mathbb{k} -линейных комбинаций счётного множества векторов равномощно $\mathbb{k} \times \mathbb{N}$ — дизъюнктному объединению счётного множества одинаковых копий множества \mathbb{k} , тогда как множество $\mathbb{k}[[t]]$ равномощно множеству $\mathbb{k}^{\mathbb{N}}$ всевозможных отображений $\mathbb{N} \rightarrow \mathbb{k}$, которое строго мощнее, чем $\mathbb{k} \times \mathbb{N}$ (используйте рассуждение Кантора).

Упр. 7.3. Достаточно убедиться, что векторы v_1, v_2, \dots, v_n линейно независимы. Применяя к обеим частям соотношения $\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \dots + \lambda_n v_n = 0$ функционал ξ_i , получаем $\lambda_i = 0$, и так для каждого $i = 1, \dots, n$.

Упр. 7.4. Ядро $\ker \text{ev} = \{v \in V \mid \forall \varphi \in V^* \varphi(v) = 0\} = 0$, поскольку для любого ненулевого вектора $v \in V$ существует такой линейный функционал $\varphi : V \rightarrow \mathbb{k}$, что $\varphi(v) \neq 0$. Например, можно дополнить вектор v до базиса пространства V и взять в качестве φ функционал, сопоставляющий вектору его координату в направлении базисного вектора v относительно этого базиса.

Упр. 7.5. Если линейная форма зануляется на каком-то множестве векторов, то она зануляется и всех линейных комбинациях этих векторов.

Упр. 7.7. Выберем базис u_1, \dots, u_n в U , дополним его векторами w_1, \dots, w_m до базиса в V и зададимся любыми m числами $c_1, \dots, c_m \in \mathbb{k}$. Существует единственный линейный функционал $\varphi : V \rightarrow \mathbb{k}$, принимающий на выбранных базисных векторах значения $\varphi(u_i) = \psi(u_i)$, $\varphi(w_j) = c_j$, где $1 \leq i \leq n$, $1 \leq j \leq m$. Ограничение $\varphi|_U = \psi$.

Упр. 7.8. Ковекторы w_1^*, \dots, w_m^* лежат в $\text{Ann } U$ и линейно независимы, так как являются частью базиса в V^* . Поскольку координатами каждого линейного функционала $\varphi \in V^*$ в базисе

$$u_1^*, \dots, u_k^*, w_1^*, \dots, w_m^*$$

являются значения $\varphi(u_1), \dots, \varphi(u_k), \varphi(w_1), \dots, \varphi(w_m)$, ковектор $\varphi \in \text{Ann } U$ если и только если он является линейной комбинацией ковекторов w_1^*, \dots, w_m^* . Тем самым, эти ковекторы линейно порождают $\text{Ann } U$.

Упр. 7.9. По упр. 7.5 на стр. 86 $\text{Ann } N = \text{Ann span } N$, откуда $\text{Ann Ann } N = \text{Ann Ann span } N = \text{span } N$.

Упр. 7.11. Оператор $F^{**} : U^{**} \rightarrow W^{**}$ переводит функционал вычисления $\text{ev}_u : U^* \rightarrow \mathbb{k}$ в композицию $\text{ev}_u \circ F^* : W^* \rightarrow \mathbb{k}$, которая в свою очередь переводит ковектор $\xi : W \rightarrow \mathbb{k}$ в число $\text{ev}_u(F^* \xi) = F^* \xi(u) = \xi(Fu) = \text{ev}_{Fu}(\xi)$. Таким образом, $F^{**}(\text{ev}_v) = \text{ev}_{F(v)}$. Отождествления $U^{**} \simeq U$ и $W^{**} \simeq W$ переводят функционалы вычисления $\text{ev}_u : U^* \rightarrow \mathbb{k}$ и $\text{ev}_w : W^* \rightarrow \mathbb{k}$ в векторы $u \in U$ и $w \in W$, на которых эти вычисления производятся. Формула $F^{**}(\text{ev}_v) = \text{ev}_{F(v)}$ утверждает, что при этом действие оператора F^{**} на функционалы вычисления превращается в действие F на векторы.

Упр. 7.14. Пусть множество $S \subset X$ состоит из всех таких элементов $z \in X$, что утверждение $\Phi(z)$ ложно. Если $S \neq \emptyset$, то в нём есть начальный элемент $s_* \in S$. Поскольку утверждение $\Phi(y)$ истинно для всех $y < s_*$, утверждение $\Psi(s_*)$ тоже истинно, т. е. $s_* \notin S$. Противоречие.

Упр. 7.15. Обозначим через x_I начальный элемент дополнения $X \setminus I$. Начальный интервал $[x_I) \subset X$ является объединением начальных интервалов $[y) \subset X$ по всем $y < x$. Если I содержит все интервалы $[y) \subset X$, то $I \supseteq [x_I)$, откуда $I = [x_I)$.

Упр. 7.16. Рассмотрим подмножество $Z \subseteq W_1$, состоящее из всех таких $z \in W_1$, что начальный интервал $[z)_1$ в множестве W_1 является одновременно начальным интервалом $[z)_2$ множества W_2 .

Множество Z не пусто, поскольку содержит общий начальный элемент множеств W_1 и W_2 . Если $Z \subsetneq W_1$ и $Z \subsetneq W_2$, то по [упр. 7.15](#) на стр. 92 подмножество Z является начальным интервалом как в W_1 , так и в W_2 , что невозможно, поскольку точные верхние границы этих интервалов в W_1 и W_2 , с одной стороны, не лежат в Z и, стало быть, различны, а с другой стороны в силу ϱ -рекурсивности множеств W_1 и W_2 обе они равны $\varrho(Z)$, то есть совпадают. Тем самым, $Z = W_1$ или $Z = W_2$. По [упр. 7.15](#) в первом случае W_1 является начальным интервалом в W_2 , а во втором — W_2 является начальным интервалом в W_1 .

Упр. 7.17. Каждое подмножество $S \subset U$ имеет непустое пересечение с каким-нибудь ϱ -рекурсивным вполне упорядоченным подмножеством $W \subset P$ с начальным элементом $\varrho(\emptyset)$. По [упр. 7.16](#) подмножество W является начальным интервалом всех содержащих W ϱ -рекурсивных вполне упорядоченных подмножеств с начальным элементом $\varrho(\emptyset)$. Поэтому начальный элемент пересечения $S \cap W$ не зависит от выбора W с $W \cap S \neq \emptyset$ и является начальным элементом подмножества S . Каждый начальный интервал $[u) \subset U$ является начальным интервалом любого содержащего u множества W из цепи. В силу ϱ -рекурсивности W элемент $\varrho[u) = u$.

Упр. 7.18. Годится дословно то же рассуждение, что и в доказательстве [лем. 4.1](#) на стр. 48.

Упр. 7.19. Очевидно, что E вкладывается в B_E , а B_E вкладывается в множество $\mathbb{N} \times E$ — дизъюнктное объединение счётного множества копий множества E , которое равномощно E , так как E бесконечно. Тем самым, B_E вкладывается в E . Остаётся применить теорему Кантора – Бернштейна.

Упр. 7.20. Линейное отображение G действует на каждый вектор $v = \sum_{e \in E} x_e e$ по правилу $G(v) = \sum_{e \in E} x_e g(e)$, и для любого отображения множеств $g : E \rightarrow W$ это правило задаёт линейное отображение $G : V \rightarrow W$.