

§10. Линейные операторы

10.1. Пространство с оператором. Пусть \mathbb{k} — произвольное поле, V — конечномерное векторное пространство над \mathbb{k} , а $F : V \rightarrow V$ — линейный эндоморфизм пространства V . Мы будем называть пару (F, V) *пространством с оператором* или просто *линейным оператором* над \mathbb{k} . Линейное отображение $C : U_1 \rightarrow U_2$ между пространствами с операторами (F_1, U_1) и (F_2, U_2) называется *гомоморфизмом*, если $F_2 \circ C = C \circ F_1$, т. е. диаграмма линейных отображений

$$\begin{array}{ccc} U_1 & \xrightarrow{C} & U_2 \\ F_1 \uparrow & & \uparrow F_2 \\ U_1 & \xrightarrow{C} & U_2 \end{array}$$

коммутативна¹. Если при этом отображение C биективно, операторы F_1 и F_2 называются *изоморфными* или *подобными*. Таким образом, подобие операторов F_1 и F_2 означает равенство

$$F_2 = C F_1 C^{-1}$$

для некоторого обратимого линейного отображения C . В этой ситуации также говорят, что F_2 получается из F_1 *сопряжением* посредством C .

Подпространство $U \subset V$ называется *F-инвариантным*, если $F(U) \subset U$. В этой ситуации пара $(F|_U, U)$ тоже является пространством с оператором и вложение $U \hookrightarrow V$ является гомоморфизмом пространств с операторами. Оператор, не имеющий инвариантных подпространств, отличных от нуля и всего пространства, называется *неприводимым* или *простым*.

УПРАЖНЕНИЕ 10.1. Покажите, что оператор умножения на класс $[t]$ в фактор кольце $\mathbb{R}[t]/(t^2 + 1)$ неприводим.

Оператор $F : V \rightarrow V$ называется *разложимым*, если пространство V можно разложить в прямую сумму двух ненулевых F -инвариантных подпространств, и *неразложимым* — в противном случае. Если оператор неприводим, то он и неразложим. Обратное неверно, как показывает следующий пример.

УПРАЖНЕНИЕ 10.2. Покажите, что оператор умножения на класс $[t]$ в фактор кольце $\mathbb{k}[t]/(t^n)$ при всех $n > 1$ приводим, но неразложим.

Таким образом, над любым полем \mathbb{k} имеются неразложимые пространства с оператором любой размерности, и они могут быть приводимы. Каждое конечномерное разложимое пространство с оператором является прямой суммой неразложимых инвариантных подпространств.

УПРАЖНЕНИЕ 10.3. Покажите, что двойственные операторы² $F : V \rightarrow V, F^* : V^* \rightarrow V^*$ либо оба разложимы, либо оба неразложимы.

ЗАМЕЧАНИЕ 10.1. (КЛАССИФИКАЦИЯ ПРОСТРАНСТВ С ОПЕРАТОРОМ) Над произвольным полем \mathbb{k} каждое конечномерное неразложимое пространство с оператором изоморфно оператору умножения на класс $[t]$ в кольце вычетов $\mathbb{k}[t]/(p^m)$, где $p \in \mathbb{k}[t]$ — неприводимый многочлен, а $m \in \mathbb{N}$,

¹Диаграмма отображений между множествами называется *коммутативной*, если композиции отображений вдоль любых двух путей с общим началом и концом одинаковы.

²См. п. 7.3 на стр. 89.

и все такие пространства не изоморфны друг другу при разных p или m . Пространство $\mathbb{k}[t]/(p^m)$ неприводимо если и только если $m = 1$. Произвольное пространство с оператором изоморфно оператору умножения на класс $[t]$ в прямой сумме фактор колец вида¹ $\mathbb{k}[t]/(p^m)$, и такое представление пространства с оператором единственно с точностью до перестановки слагаемых. Доказательства всех этих фактов обычно даются в курсе алгебры². Мы не собираемся использовать данную классификацию в полной общности, а все её следствия, которые нам понадобятся, будут отдельно и независимо установлены нами ниже по мере необходимости.

10.1.1. Характеристический многочлен. Пусть оператор $F : V \rightarrow V$ имеет матрицу F_v в каком-либо базисе v пространства V . Её характеристический многочлен $\det(tE - F_v)$ называется *характеристическим многочленом* оператора F и обозначается $\chi_F(t)$. Он не зависит от выбора базиса, в котором пишется матрица оператора, поскольку в любом другом базисе $w = v C_{vw}$ матрица³ $F_w = C_{wv} F_v C_{vw} = C_{vw}^{-1} F_v C_{vw}$ имеет

$$\begin{aligned} \det(tE - F_w) &= \det(tC_{vw}^{-1} F_v C_{vw} - C_{vw}^{-1} F_v C_{vw}) = \det(C_{vw}^{-1} (tE - F_v) C_{vw}) = \\ &= \det C_{vw}^{-1} \cdot \det(tE - F_v) \cdot \det C_{vw} = \det(tE - F_v). \end{aligned}$$

Это же вычисление показывает, что подобные операторы имеют равные характеристические многочлены.

УПРАЖНЕНИЕ 10.4. Для любого многочлена $f \in \mathbb{k}[t]$ со старшим коэффициентом 1 покажите, что характеристический многочлен оператора умножения на класс $[t]$ в фактор кольце $\mathbb{k}[t]/(f)$ равен f .

ПРИМЕР 10.1 (ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКИЙ МНОГОЧЛЕН РАЗЛОЖИМОГО ОПЕРАТОРА)

Пусть пространство с оператором (F, V) является прямой суммой пространств с операторами (G, U) и (H, W) . Тогда $\chi_F(t) = \chi_G(t) \cdot \chi_H(t)$, поскольку в любом базисе, согласованном с разложением $V = U \oplus W$, матрица оператора $tE - F$ имеет блочный вид $\begin{pmatrix} tE - G & 0 \\ 0 & tE - H \end{pmatrix}$ и заявленный результат вытекает из [упр. 9.4](#) на стр. 114.

10.1.2. Аннулирующие многочлены. Линейный оператор $F : V \rightarrow V$, действующий в векторном пространстве V над произвольным полем \mathbb{k} , можно подставить вместо переменной t в любой многочлен $f(t) = a_0 + a_1 t + \dots + a_m t^m \in \mathbb{k}[t]$. Результатом такой подстановки является линейный оператор $f(F) \stackrel{\text{def}}{=} a_0 \text{Id}_V + a_1 F + \dots + a_m F^m \in \text{End}(V)$. Подстановка фиксированного оператора $F \in \text{End} V$ во всевозможные многочлены задаёт гомоморфизм \mathbb{k} -алгебр

$$\text{ev}_F : \mathbb{k}[t] \rightarrow \text{End}(V), \quad f \mapsto f(F),$$

который называется *гомоморфизмом вычисления* многочленов на операторе F . Многочлены, лежащие в ядре этого гомоморфизма, т. е. такие $f \in \mathbb{k}[t]$, что $f(F) = 0$, называются *аннулирующими* оператор F . Если $\dim V < \infty$, алгебра $\text{End} V$ конечномерна как векторное пространство

¹В сумме допускаются повторяющиеся слагаемые.

²См. например лекции <http://gorod.bogomolov-lab.ru/ps/stud/algebra-1/1314/lec-10.pdf> и <http://gorod.bogomolov-lab.ru/ps/stud/algebra-1/1314/lec-11.pdf> курса <http://gorod.bogomolov-lab.ru/ps/stud/algebra-1/1314/list.html>.

³См. формулу (5-15) на стр. 65.

над \mathbb{k} , а алгебра $\mathbb{k}[t]$ бесконечномерна. Поэтому $\ker \operatorname{ev}_F \neq 0$, т. е. любой оператор на конечномерном пространстве аннулируется некоторым ненулевым многочленом. В силу тождества Гамильтона–Кэли¹ примером такого многочлена является характеристический многочлен $\chi_F(t)$. Поскольку все идеалы² кольца $\mathbb{k}[t]$ главные³, идеал $\ker \operatorname{ev}_F = (\mu_F)$ состоит из всех многочленов, делящихся на некоторый многочлен μ_F , который однозначно задаётся как ненулевой многочлен минимальной степени со старшим коэффициентом 1, такой что $\mu_F(F) = 0$ в $\operatorname{End}(V)$.

УПРАЖНЕНИЕ 10.5 (ПО АЛГЕБРЕ). Убедитесь в этом.

Многочлен $\mu_F(t)$ называется *минимальным многочленом* оператора F .

ПРИМЕР 10.2 (ОТЫСКИВАНИЕ МИНИМАЛЬНОГО МНОГОЧЛЕНА)

Для каждого вектора $v \in V$ и линейного оператора $F : V \rightarrow V$ существует такой приведённый многочлен наименьшей степени от оператора F , который аннулирует вектор v . Чтобы написать его явно, надо найти наименьшее такое $k \in \mathbb{N}$, что вектор $F^k v$ линейно выражается через векторы $v, Fv, \dots, F^{k-1}v$. Если это выражение имеет вид $F^k v = \mu_1 F^{k-1} v + \dots + \mu_{k-1} Fv + \mu_k v$, то искомым многочлен $\mu_{v,F}(t) = t^k - \mu_1 t^{k-1} + \dots + \mu_{k-1} t + \mu_k$.

УПРАЖНЕНИЕ 10.6. Убедитесь, что любой аннулирующий оператор F многочлен делится на все многочлены $\mu_{v,F}$, где $v \in V$.

Таким образом, минимальный многочлен μ_F оператора F представляет собою наименьшее общее кратное многочленов $\mu_{v,F}$ по всем $v \in V$. Очевидно, что для отыскания этого наименьшего общего кратного достаточно ограничиться только векторами v из некоторого базиса e_1, \dots, e_n пространства V .

УПРАЖНЕНИЕ 10.7. Убедитесь в этом.

Вычислим, к примеру, минимальный многочлен оператора $F : \mathbb{Q}^4 \rightarrow \mathbb{Q}^4$, заданного в стандартном базисе e_1, \dots, e_4 матрицей

$$A = \begin{pmatrix} -2 & -3 & 3 & 3 \\ 4 & 6 & -4 & -4 \\ 1 & 2 & 0 & -1 \\ 3 & 3 & -3 & -2 \end{pmatrix}$$

Векторы⁴

$$e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad Fe_1 = \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad F^2 e_1 = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 3 \\ -3 \end{pmatrix}$$

линейно независимы. Чтобы выяснить, выражается ли через них вектор⁵

$$F^3 e_1 = \begin{pmatrix} -8 \\ 16 \\ 7 \\ 9 \end{pmatrix},$$

¹ См. п° 8.2.2 на стр. 103.

² См. начало лекции <http://gorod.bogomolov-lab.ru/ps/stud/algebra-1/1314/lec-05.pdf>.

³ См. Предложение 5.1 на стр. 74 той же лекции.

⁴ Векторы Fe_1 и $F^2 e_1$ суть первые столбцы матриц A и A^2 .

⁵ Это первый столбец матрицы A^3 .

необходимо решить неоднородную систему с расширенной матрицей

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 4 & -8 \\ 0 & 4 & 0 & 16 \\ 0 & 1 & 3 & 7 \\ 0 & 3 & -3 & 9 \end{pmatrix}$$

Методом Гаусса преобразуем эту матрицу к приведённому ступенчатому виду

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -4 \\ 0 & 1 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

и получаем решение $(-4, 4, 1)$, т. е. $F^3 e_1 = -4e_1 + 4Fe_1 + F^2 e_1$. Таким образом, минимальный многочлен от оператора F , аннулирующий вектор e_1 , равен $F^3 - F^2 - 4F + 4E$. Вычисляя

$$A^2 = \begin{pmatrix} 4 & 3 & -3 & -3 \\ 0 & 4 & 0 & 0 \\ 3 & 6 & -2 & -3 \\ -3 & -3 & 3 & 4 \end{pmatrix} \quad \text{и} \quad A^3 = \begin{pmatrix} -8 & -9 & 9 & 9 \\ 16 & 24 & -16 & -16 \\ 7 & 14 & -6 & -7 \\ 9 & 9 & -9 & -8 \end{pmatrix},$$

убеждаемся, что $A^3 - A^2 - 4A + 4E = 0$. Тем самым, $\mu_F = t^3 - t^2 - 4t + 4$.

ТЕОРЕМА 10.1 (ТЕОРЕМА О РАЗЛОЖЕНИИ)

Пусть линейный оператор $F : V \rightarrow V$ на произвольном¹ векторном пространстве V над любым полем \mathbb{k} аннулируется многочленом $q \in \mathbb{k}[t]$, который раскладывается в $\mathbb{k}[t]$ в произведение $q = q_1 \cdot q_2 \cdot \dots \cdot q_r$ попарно взаимно простых многочленов $q_i \in \mathbb{k}[t]$. Положим $Q_j = q/q_j$. Тогда $\ker q_j(F) = \text{im } Q_j(F)$ для каждого j , все эти подпространства F -инвариантны, и пространство V является прямой суммой тех из них, что отличны от нуля.

Доказательство. Так как $q(F) = q_i(F) \circ Q_j(F) = 0$, имеем включение $\text{im } Q_j(F) \subset \ker q_i(F)$. Поэтому достаточно показать, что V линейно порождается образами операторов $Q_i(F)$, а сумма ядер $\ker q_i(F)$ прямая², т. е. $\ker q_i(F) \cap \sum_{j \neq i} \ker q_j(F) = 0$ для всех i . Первое вытекает из того, что $\text{nod}(Q_1, \dots, Q_r) = 1$, а значит, существуют такие $h_1, \dots, h_r \in \mathbb{k}[t]$, что $1 = \sum Q_j(t)h_j(t)$. Подставляя в это равенство $t = F$ и применяя обе части к произвольному вектору $v \in V$, получаем разложение $v = Ev = \sum Q_j(F)h_j(F)v \in \sum \text{im } Q_j(F)$. Второе вытекает из взаимной простоты q_i и Q_i , в силу которой существуют такие $g, h \in \mathbb{k}[t]$, что $1 = g(t) \cdot q_i(t) + h(t) \cdot Q_i(t)$. Подставим сюда $t = F$ и применим обе части полученного равенства $E = g(F)q_i(F) + h(F) \circ Q_i(F)$ к произвольному вектору $v \in \ker q_i(F) \cap \sum_{j \neq i} \ker q_j$. Так как $\ker q_j(F) \subset \ker Q_i(F)$ при всех $j \neq i$, получим $v = Ev = g(F)q_i(F)v + h(F)Q_i(F)v = 0$, что и требовалось. \square

ПРИМЕР 10.3 (ПРОЕКТОРЫ)

Линейный оператор $\pi : V \rightarrow V$ называется *идемпотентом* или *проектором*, если он аннулируется многочленом $t^2 - t = t(t - 1)$, т. е. удовлетворяет соотношению $\pi^2 = \pi$. По теор. 10.1 образ любого идемпотента $\pi : V \rightarrow V$ совпадает с подпространством его неподвижных векторов: $\text{im } \pi = \ker(\pi - \text{Id}_V) = \{v \mid \pi(v) = v\}$, и всё пространство распадается в прямую сумму

¹Возможно даже бесконечномерном.

²См. опр. 4.1 и предл. 4.1 на стр. 52.

$V = \ker \pi \oplus \operatorname{im} \pi$. Тем самым, оператор π проектирует V на $\operatorname{im} \pi$ вдоль $\ker \pi$. Отметим, что оператор $\operatorname{Id}_V - \pi$ тоже является идемпотентом и проектирует V на $\ker \pi$ вдоль $\operatorname{im} \pi$. Таким образом, задание прямого разложения $V = U \oplus W$ равносильно заданию пары идемпотентных эндоморфизмов $\pi_1 = \pi_1^2$ и $\pi_2 = \pi_2^2$ пространства V , связанных соотношениями $\pi_1 + \pi_2 = 1$ и $\pi_1 \pi_2 = \pi_2 \pi_1 = 0$.

УПРАЖНЕНИЕ 10.8. Выведите из этих соотношений, что $\ker \pi_1 = \operatorname{im} \pi_2$ и $\operatorname{im} \pi_1 = \ker \pi_2$.

ПРИМЕР 10.4 (инволюции)

Линейный оператор $\sigma : V \rightarrow V$ называется *инволюцией*, если он аннулируется многочленом $t^2 - 1$, т. е. удовлетворяет соотношению $\sigma^2 = \operatorname{Id}_V$. Тожественная инволюция $\sigma = \operatorname{Id}_V$ называется *тривиальной*. Если $\operatorname{char} \mathbb{k} \neq 2$, то $t^2 - 1 = (t + 1)(t - 1) = 0$ является произведением различных линейных множителей. Поэтому над таким полем $V = V_+ \oplus V_-$, где

$$\begin{aligned} V_+ &= \ker(\sigma - E) = \operatorname{im}(\sigma + \operatorname{Id}_V) = \{v \in V \mid \sigma v = v\} \\ V_- &= \ker(\sigma + E) = \operatorname{im}(\sigma - \operatorname{Id}_V) = \{v \in V \mid \sigma v = -v\}. \end{aligned}$$

Произвольный вектор $v = v_+ + v_-$ пространства V имеет в этом разложении компоненты

$$v_+ = \frac{v + \sigma v}{2} \in V_+ \quad \text{и} \quad v_- = \frac{v - \sigma v}{2} \in V_-.$$

10.2. Собственные подпространства. Ненулевой вектор $v \in V$ называется *собственным вектором* линейного оператора $F : V \rightarrow V$ если $F(v) = \lambda v$ для некоторого числа $\lambda \in \mathbb{k}$. Это число называется *собственным значением* или *собственным числом* оператора F на собственном векторе v . Собственные векторы с заданным собственным числом λ образуют вместе с нулевым вектором F -инвариантное подпространство

$$V_\lambda \stackrel{\text{def}}{=} \{v \in V \mid F(v) = \lambda v\} = \ker(\lambda \operatorname{Id}_V - F), \quad (10-1)$$

которое называется *собственным подпространством* оператора F . Поскольку $\ker(\lambda \operatorname{Id}_V - F) \neq 0$ если и только если $\det(\lambda \operatorname{Id}_V - F) = \chi_F(\lambda) = 0$, подпространство (10-1) отлично от нуля тогда и только тогда, когда число λ является корнем характеристического многочлена оператора F . Таким образом, множество собственных чисел оператора F есть множество корней многочлена χ_F в поле \mathbb{k} . Оно называется *спектром* оператора F в поле \mathbb{k} и обозначается $\operatorname{Spec}(F)$ или $\operatorname{Spec}_{\mathbb{k}}(F)$, если важно явно указать поле. Так как $\deg \chi_F = \dim V$, количество различных собственных чисел не превышает размерности пространства:

$$|\operatorname{Spec}(F)| \leq \dim V.$$

Над алгебраически замкнутым полем \mathbb{k} спектр всегда не пуст.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 10.1

Над алгебраически замкнутым полем \mathbb{k} каждый линейный оператор обладает хотя бы одним ненулевым собственным подпространством. \square

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 10.2

$\operatorname{Spec} F$ содержится в множестве корней любого многочлена, аннулирующего F .

Доказательство. Ограничение оператора F на собственное подпространство V_λ является гомотетией с коэффициентом λ . Поэтому для любого многочлена $g \in \mathbb{k}[t]$ оператор $g(F)$ действует на V_λ как гомотетия с коэффициентом $g(\lambda)$. Если $g(\lambda) \neq 0$, то $g(F)|_{V_\lambda} \neq 0$. \square

Предложение 10.3

Любой набор собственных векторов с попарно различными собственными числами линейно независим.

Доказательство. Пусть собственные векторы e_1, \dots, e_m имеют попарно разные собственные числа $\lambda_1, \dots, \lambda_m$ и линейно зависимы. Рассмотрим зависимость, содержащую минимально возможное число векторов, и перенумеруем их так, чтобы это были e_1, \dots, e_k . Тогда $k \geq 2$ и

$$e_k = x_1 e_1 + x_2 e_2 + \dots + x_{k-1} e_{k-1},$$

где все $x_i \in \mathbb{k}$ отличны от нуля. При этом $\lambda_k e_k = F(e_k) = \sum x_i F(e_i) = \sum x_i \lambda_i e_i$. Вычитая из этого равенства предыдущее, умноженное на λ_k , получаем более короткую линейную зависимость $0 = x_1(\lambda_1 - \lambda_k) \cdot e_1 + x_2(\lambda_2 - \lambda_k) \cdot e_2 + \dots + x_{k-1}(\lambda_{k-1} - \lambda_k) \cdot e_{k-1}$ с ненулевыми коэффициентами. Противоречие. \square

Следствие 10.1

Сумма собственных подпространств с разными собственными числами является прямой. \square

Следствие 10.2

$$\sum_{\lambda \in \text{Spec } F} \dim V_\lambda \leq \dim V.$$

Упражнение 10.9. Приведите пример оператора, для которого это неравенство строгое.

10.2.1. Диагонализуемые операторы. Оператор $F : V \rightarrow V$ называется *диагонализуемым*, если в V имеется базис, в котором F записывается диагональной матрицей. Такой базис состоит из собственных векторов оператора F , и элементы диагональной матрицы являются собственными значениями оператора F , причём каждое число $\lambda \in \text{Spec } F$ встречается на диагонали ровно столько раз, какова кратность корня $t = \lambda$ в характеристическом многочлене $\chi_F(t)$ и какова размерность собственного подпространства V_λ . Таким образом, с точностью до перестановки диагональных элементов диагональная матрица диагонализуемого оператора F не зависит от выбора базиса, в котором оператор F имеет диагональную матрицу.

Предложение 10.4

Следующие свойства оператора $F : V \rightarrow V$ эквивалентны:

- 1) F диагонализуем
- 2) пространство V линейно порождается собственными векторами оператора F
- 3) характеристический многочлен $\chi_F(t)$ полностью раскладывается на линейные множители в $\mathbb{k}[t]$, и кратность каждого корня λ многочлена χ_F равна размерности собственного подпространства V_λ
- 4) оператор F аннулируется многочленом, который полностью раскладывается в $\mathbb{k}[t]$ на попарно различные линейные множители.

Доказательство. Эквивалентность свойств (1) и (2), а также импликация (1) \Rightarrow (3) очевидны. Из (3) вытекает, что $\sum_{\lambda \in \text{Spec } F} \dim V_\lambda = \deg \chi_F = \dim V$. Поэтому $V = \bigoplus_{\lambda \in \text{Spec } F} V_\lambda$ в силу сл. 10.1. Так как каждое собственное подпространство V_λ аннулируется оператором $(F - \lambda \text{Id}_V)$, всё пространство V аннулируется композицией $\prod_{\lambda \in \text{Spec } F} (F - \lambda \text{Id}_V)$, т. е. оператор F аннулируется многочленом $\prod_{\lambda \in \text{Spec } F} (t - \lambda)$. Это даёт импликацию (3) \Rightarrow (4). Импликация (4) \Rightarrow (1) следует из теоремы разложения¹: если оператор F аннулируется произведением $\prod_{\mu} (t - \mu)$, в котором μ пробегает без повторений некоторое конечное подмножество в \mathbb{k} , то V является прямой суммой тех подпространств $\ker(F - \mu \text{Id})$, которые отличны от нуля, т. е. собственных подпространств оператора F . \square

Следствие 10.3

Если оператор $F : V \rightarrow V$ диагоналізуем, то его ограничение на любое инвариантное подпространство тоже диагоналізуемо на этом подпространстве.

Доказательство. Это вытекает из свойства (4) предл. 10.4. \square

10.2.2. Перестановочные операторы. Если линейные операторы $F, G : V \rightarrow V$ на векторном пространстве V над произвольным полем \mathbb{k} коммутируют друг с другом, то ядро и образ любого многочлена от оператора F переводятся оператором G в себя, поскольку

$$\begin{aligned} f(F)v = 0 &\Rightarrow f(F)Gv = Gf(F)v = 0 \\ v = f(F)w &\Rightarrow Gv = Gf(F)w = f(F)Gw. \end{aligned}$$

В частности, все собственные подпространства $V_\lambda = \ker(F - \lambda E)$ инвариантны относительно любого перестановочного с F оператора G .

Предложение 10.5

В конечномерном векторном пространстве V над алгебраически замкнутым полем \mathbb{k} любое множество коммутирующих друг с другом операторов обладает общим для всех операторов собственным вектором. Над произвольным полем \mathbb{k} любое множество коммутирующих друг с другом диагоналізуемых операторов на V можно одновременно диагонализировать в одном общем для всех операторов базисе.

Доказательство. Индукция по $\dim V$. Если все операторы скалярны (что так при $\dim V = 1$), то доказывать нечего — подойдут, соответственно, любой ненулевой вектор и любой базис. Если среди операторов есть хоть один нескаларный оператор F , то над замкнутым полем у него есть собственное подпространство строго меньшей размерности, чем V , а в диагоналізуемом случае V является прямой суммой таких собственных подпространств. Каждое собственное подпространство оператора F инвариантно для всех операторов, причём если операторы диагоналізуемы на всём пространстве, то их ограничения на собственные подпространства оператора F останутся диагоналізуемыми по сл. 10.3. Применяя к собственным подпространствам оператора F предположение индукции, получаем требуемое. \square

Пример 10.5 (конечные группы операторов)

Если m линейных операторов на конечномерном пространстве V над алгебраически замкнутым полем \mathbb{k} характеристики $\text{char } \mathbb{k} > m$ образуют группу G , то каждый из этих операторов аннулируется многочленом $t^m - 1$, который раскладывается в произведение m попарно различных

¹См. теор. 10.1 на стр. 119.

линейных множителей¹. Поэтому каждый оператор в группе G диагоналізуем. Все операторы из группы G одновременно диагонализуются в одном общем базисе если и только если группа G абелева.

10.3. Нильпотентные операторы. Оператор $F : V \rightarrow V$ называется *нильпотентным*, если он аннулируется многочленом вида t^m , т. е. если $F^m = 0$ для некоторого $m \in \mathbb{N}$. Поскольку минимальный многочлен оператора F является делителем t^m и имеет степень не больше степени характеристического многочлена, которая равна $\dim V$, в определении нильпотентного оператора можно без ограничения общности считать, что $m \leq \dim V$.

Упражнение 10.10. Покажите, что над алгебраически замкнутым полем \mathbb{k} оператор F нильпотентен тогда и только тогда, когда $\text{Sp}_{\text{рес}} F = \{0\}$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 10.1 (ЖОРДАНОВ БАЗИС НИЛЬПОТЕНТНОГО ОПЕРАТОРА)

Базис пространства V с нильпотентным оператором $F : V \rightarrow V$ называется *циклическим* (или *жордановым*), если его векторы можно расставить в клетки некоторой диаграммы Юнга ν так, чтобы F аннулировал все векторы самого левого столбца и переводил каждый из оставшихся векторов в соседний слева:

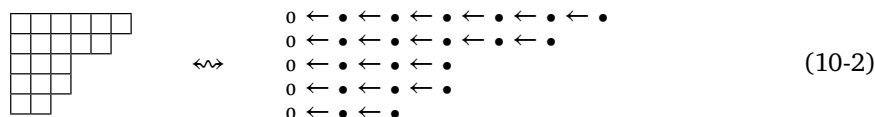


Диаграмма (10-2) называется *цикловым типом* жорданова базиса. Цепочки базисных векторов, расположенные в её строках, называются *жордановыми цепочками*. Таким образом, матрица нильпотентного оператора в жордановом базисе состоит из расположенных вдоль главной диагонали квадратных блоков вида

$$J_m(0) \stackrel{\text{def}}{=} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \text{где } m \in \mathbb{N} \text{ — размер блока,} \quad (10-3)$$

которые биективно соответствуют строкам диаграммы (10-2) и имеют размеры, равные длинам соответствующих строк. Все остальные элементы матрицы нулевые.

ТЕОРЕМА 10.2

Каждый нильпотентный оператор F на конечномерном векторном пространстве $V \neq 0$ обладает жордановым базисом. Все жордановы базисы оператора F имеют одинаковый цикловой тип², причём j -й слева столбец диаграммы (10-2) состоит из $\dim \ker F^j - \dim \ker F^{j-1}$ клеток.

Доказательство. Индукция по $\dim V$. Если $F = 0$ (что так при $\dim V = 1$), то любой базис в V является жордановым, и диаграмма Юнга (10-2) представляет собою один столбец высоты $\dim V$.

¹Поскольку производная mt^{m-1} многочлена $t^m - 1$ отлична от нуля и взаимно проста с этим многочленом, она не имеет с ним общих корней. Следовательно, у многочлена нет кратных корней.

²Он называется *цикловым типом* оператора F и обозначается $\nu(F)$.

Если $\dim V > 1$ и $F \neq 0$, то подпространство $\ker F \subset V$ отлично и от нуля, и от V . Поэтому фактор $W = V/\ker F$ является ненулевым векторным пространством размерности строго меньшей, чем V . Оператор F корректно факторизуется до нильпотентного оператора

$$F_W : W \rightarrow W, \quad [v] \mapsto [Fv].$$

УПРАЖНЕНИЕ 10.11. Убедитесь в этом.

По предположению индукции, в пространстве V существуют векторы w_1, \dots, w_m , классы которых $[w_1], \dots, [w_m]$ по модулю $\ker F$ образуют жорданов базис оператора F_W . Образы этих векторов $F(w_1), \dots, F(w_m)$ линейно независимы в V , поскольку равенство

$$0 = \lambda_1 F(w_1) + \dots + \lambda_m F(w_m) = F(\lambda_1 w_1 + \dots + \lambda_m w_m)$$

означает, что $\lambda_1 w_1 + \dots + \lambda_m w_m \in \ker F$, т. е. $\lambda_1 [w_1] + \dots + \lambda_m [w_m] = [0]$ в $W = V/\ker F$, что возможно лишь если все $\lambda_i = 0$. Пусть классы $[w_1], \dots, [w_s]$ составляют первый столбец диаграммы (10-2) для оператора F_W . Дополняя линейно независимые векторы $F(w_1), \dots, F(w_s) \in \ker F$ до базиса в $\ker F$ какими-нибудь векторами $u_1, \dots, u_r \in \ker F$, получаем жорданов базис оператора $F : V \rightarrow V$, состоящий из векторов $u_1, \dots, u_r, F(w_1), \dots, F(w_s), w_1, \dots, w_m$.

УПРАЖНЕНИЕ 10.12. Убедитесь, что эти векторы действительно образуют базис пространства V .

Последнее утверждение теоремы вытекает из того, что жордановы базисные векторы, стоящие в первых j столбцах диаграммы (10-2) для оператора F , составляют базис в $\ker F^j$. \square

10.4. Корневое разложение и функции от операторов. Для заданных числа $\lambda \in \mathbb{K}$ и линейного оператора $F : V \rightarrow V$ множество

$$K_\lambda \stackrel{\text{def}}{=} \{v \in V \mid \exists m \in \mathbb{N} : (\lambda \text{Id} - F)^m v = 0\} = \bigcup_{m \geq 1} \ker(\lambda \text{Id} - F)^m \quad (10-4)$$

называется *корневым подпространством* оператора F .

УПРАЖНЕНИЕ 10.13. Убедитесь, что $K_\lambda \subset V$ действительно является векторным подпространством и отлично от нуля если и только если $\lambda \in \text{Spec } F$.

Для каждого $\lambda \in \text{Spec } F$ имеется включение $V_\lambda \subseteq K_\lambda$, которое может быть как строгим, так и равенством. Из тождества Гамильтона – Кэли¹ и теоремы разложения² вытекает

СЛЕДСТВИЕ 10.4 (ТЕОРЕМА О КОРНЕВОМ РАЗЛОЖЕНИИ)

Пусть характеристический многочлен $\chi_F(t)$ линейного оператора $F : V \rightarrow V$ на конечномерном векторном пространстве V над полем \mathbb{K} полностью разлагается в $\mathbb{K}[t]$ на линейные множители: $\chi_F(t) = \prod_{\lambda \in \text{Spec } F} (t - \lambda)^{m_\lambda}$. Тогда $V = \bigoplus_{\lambda \in \text{Spec } F} K_\lambda$, причём $K_\lambda = \ker(\lambda \text{Id} - F)^{m_\lambda}$ для всех $\lambda \in \text{Spec } F$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Разложение $\chi_F(t) = \prod_{\lambda \in \text{Spec } F} (t - \lambda)^{m_\lambda}$ удовлетворяет условиям теор. 10.1 на стр. 119 для $q_i = (t - \lambda)^{m_\lambda}$, откуда $V = \bigoplus_{\lambda \in \text{Spec } F} \ker(\lambda \text{Id} - F)^{m_\lambda}$. \square

¹См. п° 8.2.2 на стр. 103.

²См. теор. 10.1 на стр. 119.

10.4.1. Функции от операторов. Пусть линейный оператор F действует на конечномерном векторном пространстве V над полем \mathbb{R} или \mathbb{C} , которое мы обозначим через \mathbb{K} . Всюду далее мы предполагаем, что F аннулируется многочленом $\alpha(t) \in \mathbb{K}[t]$, который полностью разлагается над \mathbb{K} на линейные множители, т. е.

$$\alpha(t) = (t - \lambda_1)^{m_1} (t - \lambda_2)^{m_2} \dots (t - \lambda_s)^{m_s}, \quad (10-5)$$

где $\lambda_i \neq \lambda_j$ при $i \neq j$ и все $m_i \in \mathbb{N}$. Мы полагаем $m = \deg \alpha = m_1 + \dots + m_s$. Алгебра \mathcal{A} , состоящая из функций $U \rightarrow \mathbb{K}$, заданных на каком-нибудь подмножестве $U \subset \mathbb{K}$, содержащем все корни многочлена (10-5), называется *алгебраически вычислимой* на операторе F , если $\mathbb{K}[t] \subset \mathcal{A}$ и для каждого корня λ кратности k многочлена (10-5) все функции $f \in \mathcal{A}$ определены в точке $\lambda \in \mathbb{K}$ вместе с первыми $k - 1$ производными $f^{(v)} = \frac{d^v f}{dt^v}$ и допускают разложение вида

$$f(t) = f(\lambda) + \frac{f'(\lambda)}{1!} (t - \lambda) + \dots + \frac{f^{(k-1)}(\lambda)}{(k-1)!} (t - \lambda)^{k-1} + g_\lambda(t) \cdot (t - \lambda)^k, \quad (10-6)$$

где функция $g_\lambda(t)$ тоже лежит в алгебре \mathcal{A} .

Если характеристический многочлен $\chi_F(t)$ полностью разлагается в $\mathbb{K}[t]$ на линейные множители, можно положить $\alpha(t) = \chi_F(t)$. Алгебра \mathcal{A} всех функций, определённых в ε -окрестности каждого собственного числа $\lambda \in \text{Spec } F$ и представимых в ней суммой абсолютно сходящегося степенного ряда от $(t - \lambda)$, алгебраически вычислима на операторе F . Подалгебра в \mathcal{A} , состоящая из всех аналитических функций¹ $\mathbb{K} \rightarrow \mathbb{K}$, алгебраически вычислима на всех линейных операторах $F \in \text{End}(V)$, характеристические многочлены которых полностью разлагаются на линейные множители в $\mathbb{K}[t]$.

ТЕОРЕМА 10.3

В сделанных выше предположениях каждая алгебраически вычислимая на операторе $F : V \rightarrow V$ алгебра функций \mathcal{A} допускает единственный такой гомоморфизм \mathbb{K} -алгебр $\text{ev}_F : \mathcal{A} \rightarrow \text{End } V$, что $\text{ev}_F(p) = p(F)$ для всех многочленов $p \in \mathbb{K}[t] \subset \mathcal{A}$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 10.2 (ГОМОМОРФИЗМ ВЫЧИСЛЕНИЯ)

Гомоморфизм $\text{ev}_F : \mathcal{A} \rightarrow \text{End } V$ из теор. 10.3 называется *вычислением* функций $f \in \mathcal{A}$ на операторе F . Линейный оператор $\text{ev}_F(f) : V \rightarrow V$, в который переходит функция $f \in \mathcal{A}$ при гомоморфизме вычисления, обозначается $f(F)$ и называется *функцией f от оператора F* .

ЗАМЕЧАНИЕ 10.2. (КАК ОТНОСИТЬСЯ К ФУНКЦИЯМ ОТ ОПЕРАТОРОВ) Из теор. 10.3 вытекает, что для любого оператора $F \in \text{End}(V)$, характеристический многочлен которого полностью разлагается на линейные множители в $\mathbb{K}[t]$, определены такие аналитические функции, как e^F или $\sin F$, а если $F \in \text{GL}(V)$, то и такие аналитические вне нуля функции, как $\ln F$ или \sqrt{F} , причём алгебраические свойства соответствующих операторов $f(F)$ в алгебре $\text{End } V$ будут точно такими же, как у числовых функций e^t , $\sin t$, $\ln t$ и \sqrt{t} . В частности, все эти функции от оператора F коммутируют друг с другом и с F , а также удовлетворяют соотношениям вроде $\ln F^2 = 2 \ln F$ и $\sqrt{F} \sqrt{F} = F$. Таким образом, функции от операторов можно использовать для отыскания операторов с предписанными свойствами, например, для извлечения корней из невырожденных операторов.

¹Т. е. функций, задаваемых сходящимися всюду в \mathbb{K} степенными рядами.

Доказательство **теор. 10.3**. Пусть оператор F аннулируется многочленом $\alpha(t) = \prod_{\lambda} (t-\lambda)^{m_{\lambda}}$, где $\lambda = \lambda_1, \dots, \lambda_r$ пробегает все различные корни этого многочлена, и пусть искомым гомоморфизм $\text{ev}_F : \mathcal{A} \rightarrow \mathbb{K}$ существует. По теореме о разложении¹ пространство V является прямой суммой F -инвариантных подпространств $K_{\lambda} = \ker(F - \lambda \text{Id})^{m_{\lambda}}$, и согласно формуле (10-6) оператор

$$f(F) = f(\lambda) \cdot E + f'(\lambda) \cdot (F - \lambda E) + \dots + \frac{f^{(m_{\lambda}-1)}(\lambda)}{(m_{\lambda}-1)!} (F - \lambda E)^{m_{\lambda}-1} + g_{\lambda}(F)(F - \lambda E)^{m_{\lambda}} \quad (10-7)$$

действует на каждом подпространстве K_{λ} точно так же, как результат подстановки оператора F в многочлен

$$j_{\lambda}^{m_{\lambda}-1} f(t) \stackrel{\text{def}}{=} f(\lambda) + f'(\lambda) \cdot (t - \lambda) + \dots + f^{(m_{\lambda}-1)}(\lambda) \cdot (t - \lambda)^{m_{\lambda}-1} / (m_{\lambda} - 1)!,$$

класс которого в фактор кольце $\mathbb{K}[t] / ((t - \lambda)^{m_{\lambda}})$ называется $(m_{\lambda} - 1)$ -струей функции $f \in \mathcal{A}$ в точке $\lambda \in \mathbb{K}$. По китайской теореме об остатках существует единственный такой многочлен $p_{f(F)}(t) \in \mathbb{K}[t]$ степени меньше $\deg \alpha(t)$, что

$$p_{f(F)}(t) \equiv j_{\lambda}^{m_{\lambda}-1} f(t) \pmod{\alpha(t)}$$

для всех корней λ многочлена α . Поскольку операторы $p_{f(F)}(F)$ и $f(F)$ одинаково действуют на каждом подпространстве K_{λ} , мы имеем равенство $f(F) = p_{f(F)}(F)$. Таким образом гомоморфизм вычисления единствен. Остаётся убедиться, что отображение $f \mapsto p_{f(F)}(F)$ действительно является гомоморфизмом \mathbb{K} -алгебр. Проверим сначала, что отображение

$$J : \mathcal{A} \rightarrow \frac{\mathbb{K}[t]}{((t - \lambda_1)^{m_1})} \times \dots \times \frac{\mathbb{K}[t]}{((t - \lambda_r)^{m_r})} \simeq \frac{\mathbb{K}[t]}{(\alpha)} \quad (10-8)$$

$$f \mapsto \left(j_{\lambda_1}^{m_1-1} f, \dots, j_{\lambda_s}^{m_s-1} f \right),$$

сопоставляющее функции $f \in \mathcal{A}$ набор её струй² во всех корнях многочлена α , является гомоморфизмом \mathbb{K} -алгебр, т. е. \mathbb{K} -линейно и удовлетворяет равенству $J(fg) = J(f)J(g)$. Первое очевидно, второе достаточно установить для каждой струи j_{λ}^{m-1} отдельно. Используя правило Лейбница: $(fg)^{(k)} = \sum_{\nu=0}^k \binom{k}{\nu} f^{(\nu)} g^{(k-\nu)}$, получаем следующие равенства по модулю $(t - \lambda)^m$:

$$j_{\lambda}^{m-1}(fg) = \sum_{k=0}^{m-1} \frac{(t - \lambda)^k}{k!} \sum_{\nu+\mu=k} \frac{k!}{\nu! \mu!} f^{(\nu)}(\lambda) g^{(\mu)}(\lambda) =$$

$$= \sum_{k=0}^{m-1} \sum_{\nu+\mu=k} \frac{f^{(\nu)}(\lambda)}{\nu!} (t - \lambda)^{\nu} \cdot \frac{g^{(\mu)}(\lambda)}{\mu!} (t - \lambda)^{\mu} \equiv j_{\lambda}^{m-1}(f) j_{\lambda}^{m-1}(g).$$

Отображение $f \mapsto p_{f(F)}(F)$ является композицией гомоморфизма (10-8) с гомоморфизмом вычисления многочленов $\text{ev}_F : \mathbb{K}[t] \rightarrow \text{End } V$, $p \mapsto p(F)$, который корректно пропускается через фактор $\mathbb{K}[t]/(\alpha)$, так как $\alpha(F) = 0$. \square

¹См. теор. 10.1 на стр. 119.

²Мы рассматриваем этот набор как элемент прямого произведения соответствующих колец вычетов, которое по китайской теореме об остатках изоморфно фактору кольца $\mathbb{K}[t]/(\alpha)$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 10.3 (ИНТЕРПОЛЯЦИОННЫЙ МНОГОЧЛЕН)

Многочлен $p_{f(F)}(t) \in \mathbb{K}[t]$, принимающий на операторе F то же самое значение, что и функция $f \in \mathcal{A}$, называется *интерполяционным многочленом* для вычисления $f(F)$. Он однозначно определяется тем, что в каждом корне λ кратности m аннулирующего оператора f многочлена α многочлен $p_{f(F)}(t)$ и первые его $m - 1$ производные принимают те же значения, что и функция f и её $m - 1$ производные, т. е. многочлен $p_{f(F)}(t)$ решает интерполяционную задачу с кратными узлами из прим. 4.7 на стр. 56. Если $\deg \alpha = n$, отыскание коэффициентов интерполяционного многочлена $p_{f(F)}$ сводится к решению системы из n линейных уравнений на n неизвестных.

ПРИМЕР 10.6 (СТЕПЕННАЯ ФУНКЦИЯ И РЕКУРРЕНТНЫЕ УРАВНЕНИЯ)

Задача отыскания n -го члена a_n числовой последовательности $z: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{K}$, $n \mapsto z_n$, решающей рекуррентное уравнение $z_n = \alpha_1 z_{n-1} + \alpha_2 z_{n-2} + \dots + \alpha_m z_{n-m}$ с начальным условием $(z_0, \dots, z_{n-1}) = (a_0, \dots, a_{n-1}) \in \mathbb{K}^n$, сводится вычислению n -той степени *матрицы сдвига*

$$S = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & \alpha_m \\ 1 & 0 & \ddots & \vdots & \alpha_{m-1} \\ 0 & 1 & \ddots & 0 & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & \alpha_2 \\ 0 & \dots & 0 & 1 & \alpha_1 \end{pmatrix}$$

смещающей каждый фрагмент из m последовательных элементов на один шаг вправо:

$$(z_{k+1}, z_{k+2}, \dots, z_{k+m}) \cdot S = (z_{k+2}, z_{k+3}, \dots, z_{k+m+1}),$$

так что член a_n оказывается равным первой координате вектора

$$(a_n, a_{n+1}, \dots, a_{n+m-1}) = (a_0, a_1, \dots, a_{m-1}) \cdot S^n.$$

Матрица $S^n = p_{S^n}(S)$ является результатом подстановки матрицы S в интерполяционный многочлен $p_{S^n}(t) \in \mathbb{K}[t]$ для вычисления на матрице S *степенной функции* $f(t) = t^n$. Обратите внимание, что $\deg p_{S^n} < m$, и коэффициенты многочлена p_{S^n} находятся решением системы из m линейных уравнений на m неизвестных.

Например, для уравнения Фибоначчи $a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$ матрица сдвига

$$S = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Интерполяционный многочлен для вычисления степенной функции t^n на этой матрице линеен. Записывая его в виде $p_{S^n}(t) = at + b$ с неопределёнными коэффициентами a и b , получаем

$$S^n = aS + bE = \begin{pmatrix} b & a \\ a & a+b \end{pmatrix}.$$

В частности, n -ое число Фибоначчи, решающее уравнение Фибоначчи с начальным условием $(a_0, a_1) = (0, 1)$, равно первой координате вектора $(a_n, a_{n+1}) = (0, 1) \cdot S^n = (a, a+b)$. Матрица S аннулируется своим характеристическим многочленом

$$\chi_S(t) = t^2 - t \operatorname{tr} S + \det S = t^2 - t - 1 = (t - \lambda_+)(t - \lambda_-)$$

с однократными корнями $\lambda_{\pm} = (1 \pm \sqrt{5})/2$. Функция t^n принимает на них значения λ_{\pm}^n . Коэффициенты a и b находятся из системы

$$\begin{cases} a\lambda_+ + b = \lambda_+^n \\ a\lambda_- + b = \lambda_-^n, \end{cases}$$

и по правилу Крамера первый из них $a = (\lambda_+^n - \lambda_-^n)/(\lambda_+ - \lambda_-)$. Тем самым,

$$a_n = a = \frac{\left((1 + \sqrt{5})/2\right)^n - \left((1 - \sqrt{5})/2\right)^n}{\sqrt{5}}.$$

10.5. Разложение Жордана. Всюду в этом разделе речь идёт об операторах на конечномерном векторном пространстве V над алгебраически замкнутым полем \mathbb{k} .

ТЕОРЕМА 10.4 (РАЗЛОЖЕНИЕ ЖОРДАНА)

Для каждого оператора F на конечномерном векторном пространстве V над алгебраически замкнутым полем \mathbb{k} существует единственная пара таких операторов F_d и F_n , что F_n нильпотентен, F_d диагонализуем, $F_d F_n = F_n F_d$ и $F = F_d + F_n$. Кроме того, операторы F_d и F_n являются многочленами от оператора F с нулевыми свободными членами.

Доказательство. Пусть $\text{Spes } F = \{\lambda_1, \dots, \lambda_r\}$. В силу алгебраической замкнутости поля \mathbb{k} , характеристический многочлен оператора F полностью разлагается на линейные множители: $\chi_F(t) = \prod_i (t - \lambda_i)^{m_i}$, а пространство V является прямой суммой корневых подпространств: $V = \bigoplus_i K_i$, где $K_i = \ker(F - \lambda_i \text{Id})^{m_i}$. Так как многочлены $(t - \lambda_i)^{m_i}$ попарно взаимно просты, по китайской теореме об остатках существуют такие многочлены $f_1, \dots, f_r \in \mathbb{k}[t]$, что

$$f_i(t) \equiv \begin{cases} 1 \pmod{(t - \lambda_i)^{m_i}} \\ 0 \pmod{(t - \lambda_j)^{m_j}} \text{ при } j \neq i. \end{cases}$$

Если $\lambda_i \neq 0$, то многочлен t обратим по модулю $(t - \lambda_i)^{m_i}$. Поэтому найдётся такой многочлен $g_i(t)$, что $t \cdot g_i(t) \equiv \lambda_i \pmod{(t - \lambda_i)^{m_i}}$. Если $\lambda_i = 0$, то положим $g_i(t) = 0$. Тогда при каждом i многочлен $p_s(t) \stackrel{\text{def}}{=} t \sum_{j=1}^r g_j(t) f_j(t) \equiv \lambda_i \pmod{(t - \lambda_i)^{m_i}}$ и не имеет свободного члена. Из этих

сравнений вытекает, что оператор $F_d \stackrel{\text{def}}{=} p_s(F)$ действует на каждом корневом подпространстве $K_i = \ker(F - \lambda_i \text{Id})^{m_i}$ как умножение на λ_i и, стало быть, диагонализуем. Оператор $F_n \stackrel{\text{def}}{=} F - F_d$ действует на K_i как $F - \lambda_i \text{Id}$ и, тем самым, нильпотентен. Будучи многочленами от F , операторы F_d и F_n перестановочны между собою и с F . Это доказывает существование операторов F_d и F_n с требуемыми свойствами, включая последнее утверждение предложения.

Докажем единственность. Пусть есть ещё одно разложение $F = F'_s + F'_n$, в котором F'_d диагонализуем, F'_n нильпотентен и $F'_d F'_n = F'_n F'_d$. Из последнего равенства вытекает, что F'_d и F'_n перестановочны с любым многочленом от $F = F'_s + F'_n$ и, в частности, с построенными выше F_d и F_n . Поэтому каждое собственное подпространство V_λ оператора F_d переводится оператором F'_d в себя¹, причём F'_d диагонализуем² на каждом V_λ . Если бы оператор F'_d имел на V_λ собственный

¹См. п° 10.2.2 на стр. 122.

²См. сл. 10.3 на стр. 122.

вектор с собственным значением $\mu \neq \lambda$, то этот вектор был бы собственным для оператора $F_n - F'_n = F_d - F'_d$ с собственным значением $\lambda - \mu \neq 0$, что невозможно, так как оператор $F_n - F'_n$ нильпотентен.

УПРАЖНЕНИЕ 10.14. Докажите, что разность двух перестановочных нильпотентных операторов нильпотентна.

Следовательно, оператор F'_S действует на каждом собственном подпространстве V_λ оператора F_d как умножение на λ , откуда $F'_d = F_d$. Тогда и $F'_n = F - F'_S = F - F_d = F_n$. \square

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 10.4

Операторы F_d и F_n из теор. 10.4 называются, соответственно, *диагонализуемой* и *нильпотентной* составляющими оператора F .

Замечание 10.3. Поскольку операторы F_d и F_n являются многочленами от F , каждое F -инвариантное подпространство $U \subset V$ является инвариантным для F_d и F_n .

Следствие 10.5 (Жорданова нормальная форма)

Для каждого оператора F на конечномерном векторном пространстве V над алгебраически замкнутым полем \mathbb{k} существует такой базис, в котором матрица оператора F состоит из расположенных на главной диагонали квадратных блоков вида¹

$$J_m(\lambda) \stackrel{\text{def}}{=} \lambda E + J_m(0) = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & & & \\ & \lambda & 1 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & \lambda & 1 \\ & & & & \lambda \end{pmatrix}, \quad (10-9)$$

где $\lambda \in \text{Spes } F$, а $m \in \mathbb{N}$ — размер блока, а все остальные её элементы нулевые. С точностью до перестановки блоков, эта матрица не зависит от выбора базиса с таким свойством, и суммарный размер блоков с заданным $\lambda \in \text{Spes } F$ на диагонали равен кратности корня λ характеристического многочлена оператора F . Два оператора подобны если и только если их матрицы указанного вида отличаются друг от друга перестановкой блоков.

Доказательство. Ограничение оператора $F = F_d + F_n$ на корневое подпространство K_λ имеет вид $\lambda \text{Id} + F_n|_{K_\lambda}$. В п° 10.3 на стр. 123 мы видели, в пространстве K_λ имеется жорданов базис, в котором матрица нильпотентного оператора $F_n|_{K_\lambda} : K_\lambda \rightarrow K_\lambda$ состоит из блоков вида (10-9) с $\lambda = 0$, причём набор блоков не зависит от выбора жорданова базиса. Объединяя жордановы базисы корневых подпространств друг с другом, мы получаем требуемый базис в V . Единственность и последнее утверждение следствия вытекают из того, что в любом базисе, где матрица оператора F имеет указанный вид, операторы F_d и F_n имеют матрицы, получающиеся из матрицы F обнулением всех, соответственно, наддиагональных и диагональных элементов, а линейная оболочка базисных векторов, задействованных во всех клетках (10-9) с заданным $\lambda \in \text{Spes } F$, совпадает с корневым подпространством K_λ , и тем самым, эти векторы образуют жорданов базис ограничения $F_n|_{K_\lambda}$. \square

¹Ср. с форм. (10-3) на стр. 123.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 10.5 (ЖОРДАНОВ БАЗИС)

Базисы пространства V , удовлетворяющие условиям [сл. 10.5](#), называются *жордановыми*, а матрица оператора F , о которой идёт речь в [сл. 10.5](#), называется *жордановой нормальной формой* этого оператора.

ПРИМЕР 10.7

Рассмотрим оператор F умножения на класс $[t]$ в кольце вычетов $\mathbb{k}[t]/((t-\lambda)^m)$. Поскольку $t = \lambda + (t - \lambda)$, нильпотентная составляющая F_n этого оператора представляет собою оператор умножения на класс $[t - \lambda]$, а диагонализуемая составляющая $F_d = \lambda \text{Id}$. Классы

$$[(t - \lambda)^{m-1}], [(t - \lambda)^{m-2}], \dots, [t - \lambda], [1] \in \mathbb{k}[t]/((t - \lambda)^m) \quad (10-10)$$

образуют жорданову цепочку нильпотентного оператора¹ F_n , и в базисе из этих классов оператор $F = \lambda \text{Id} + F_n$ записывается матрицей (10-9) размера $n \times n$. Из [сл. 10.5](#) вытекает, что над алгебраически замкнутым полем \mathbb{k} каждый линейный оператор на конечномерном векторном пространстве подобен оператору умножения на класс $[t]$ в прямой сумме конечного числа факторов колец вида $\mathbb{k}[t]/((t - \lambda)^m)$, где слагаемые могут повторяться, и жорданов базис для такого оператора является объединением классов (10-10), приходящих из каждого слагаемого этой прямой суммы. Это частный случай общей классификации пространств с операторами, упомянутой в [зам. 10.1](#) на стр. 116.

¹См. [опр. 10.1](#) на стр. 123.

Ответы и указания к некоторым упражнениям

Упр. 10.1. Если отождествить $\mathbb{R}[t]/(t^2+1)$ с полем \mathbb{C} , отправив классы $[1]$ и $[t]$ в 1 и i соответственно, умножение на класс $[t]$ превратится в умножение на i , т. е. в поворот на угол $\pi/2$, у которого нет инвариантных прямых.

Упр. 10.2. Пусть $\mathbb{k}[t]/(t^n) = U \oplus W$, где U и W переводятся в себя умножением на $[t]$. Оба этих подпространства не могут целиком содержаться в образе оператора умножения на $[t]$, так как иначе их сумма тоже бы в нём содержалась. Поэтому в одном из них, пусть это будет U , имеется класс $[g]$ многочлена g с ненулевым свободным членом. Тогда классы $[t^{n-1}g], \dots, [tg], [g] \in U$ выражаются через базис $[1], [t], \dots, [t^{n-1}]$ пространства $\mathbb{k}[t]/(t^n)$ при помощи верхнетреугольной матрицы, на диагонали которой всюду стоит ненулевой свободный член многочлена g . Следовательно, эти классы тоже образуют базис в $\mathbb{k}[t]/(t^n)$, и значит, содержащее их подпространство U совпадает со всем пространством $\mathbb{k}[t]/(t^n)$.

Упр. 10.3. Если $V = U \oplus W$, где U и W F -инвариантны, то $V^* = \text{Ann } U \oplus \text{Ann } W$, где оба подпространства $\text{Ann } U, \text{Ann } W$ тоже F^* -инвариантны: если $\xi \in \text{Ann } U$, то для всех $u \in U$

$$\langle F^*\xi, u \rangle = \langle \xi, Fu \rangle = 0,$$

так как $Fu \in U$, и значит, $F^*\xi \in \text{Ann } U$. Обратная импликация получается по двойственности в силу изоморфизма $V^{**} = V$.

Упр. 10.4. Пусть $f = t^n + a_1 t^{n-1} + \dots + a_{n-1} t + a_n$. Напишите матрицу F оператора умножения на t в факторе кольца $\mathbb{k}[x]/(f)$ в базисе из классов мономов $t^{n-1}, t^{n-2}, \dots, t, 1$ и разложите $\det(tE - F)$ по первому столбцу.

Упр. 10.5. Пусть $f(F) = 0$. Разделим f в $\mathbb{k}[t]$ на μ_F с остатком: $f(t) = q(t)\mu_F(t) + r(t)$, где либо $r = 0$, либо $\deg r < \deg \mu_F$. Подставляя в это равенство $t = F$, заключаем, что $r(F) = 0$, откуда либо $\deg r \geq \deg \mu_F$ по определению μ_F , либо $r = 0$. Следовательно, f делится на μ_F . Если v_F — другой многочлен минимальной степени со старшим коэффициентом 1, такой что $v_F(F) = 0$ в $\text{End}(V)$, то по уже доказанному v_F делится на μ_F , и частное имеет степень нуль, т. к. $\deg \mu_F = \deg v_F$. Поскольку старшие коэффициенты у μ_F и v_F одинаковы, константа $\mu_F/v_F = 1$.

Упр. 10.6. Пусть $f(t) = \mu_{v,F}(t)g(t) + r(t)$, где либо $r = 0$, либо $\deg r < \deg \mu_{v,F}$. Если $f(F) = 0$, то $r(F)v = 0$, что невозможно для ненулевого r с $\deg r < \deg \mu_{v,F}$ по определению многочлена $\mu_{v,F}$. Поэтому $r = 0$.

Упр. 10.7. Если оператор $q(F)$ аннулирует все векторы некоторого базиса, то он аннулирует вообще все векторы пространства.

Упр. 10.9. Умножение на класс t в факторе $\mathbb{k}[t]/(t^n)$ с $n \geq 2$.

Упр. 10.10. Над алгебраически замкнутым полем каждый многочлен, у которого нет ненулевых корней, имеет вид t^m . Поэтому $\chi_F(t) = t^m$, и по теореме Гамильтона – Кэли $F^m = 0$.

Упр. 10.12. Модифицируйте доказательство [предл. 4.8](#) на стр. 58.

Упр. 10.13. Для любого линейного оператора $G : V \rightarrow V$ подпространства

$$0 \subseteq \ker F \subseteq \ker F^2 \subseteq \ker F^3 \subseteq \dots$$

образуют вложенную цепочку и отличны от нуля если и только если $\ker G \neq 0$.

Упр. 10.14. Если $a^n = 0, b^m = 0$ и $ab = ba$, то $(a - b)^{m+n-1} = 0$ по формуле Ньютона.