

## §14. Пространство с билинейной формой

**14.1. Билинейные формы.** Отображение  $\beta : V \times V \rightarrow \mathbb{k}$  называется *билинейной формой* на векторном пространстве  $V$ , если оно линейно по каждому из двух своих аргументов при фиксированном другом, т. е. удовлетворяет равенству

$$\beta(x_1 u_1 + x_2 u_2, y_1 w_1 + y_2 w_2) = \sum_{i,j=1}^2 x_i y_j \beta(u_i, w_j) \quad (14-1)$$

при всех  $u_1, u_2, w_1, w_2 \in V$  и  $x_1, x_2, y_1, y_2 \in \mathbb{k}$ .

УПРАЖНЕНИЕ 14.1. Убедитесь, что билинейные формы образуют векторное подпространство в пространстве всех функций  $V \times V \rightarrow \mathbb{k}$ .

Если форма  $\beta$  на пространстве  $V$  зафиксирована, то её значение  $\beta(u, w) \in \mathbb{k}$  на паре векторов  $u, w \in V$  иногда бывает удобно записывать в виде *скалярного произведения*  $u \cdot w$ , принимающего значения в поле  $\mathbb{k}$  и, вообще говоря, некоммутативного. В таких обозначениях формула (14-1) утверждает, что это произведение дистрибутивно по отношению к линейным комбинациям векторов, т. е. подчиняется стандартным правилам раскрытия скобок:

$$(x_1 u_1 + x_2 u_2) \cdot (y_1 w_1 + y_2 w_2) = \sum_{i,j=1}^2 x_i y_j u_i \cdot w_j.$$

**14.1.1. Матрицы Грама.** Как и в евклидовом пространстве<sup>1</sup>, в каждом пространстве с билинейной формой с любыми двумя наборами векторов  $\mathbf{u} = (u_1, \dots, u_n)$ ,  $\mathbf{w} = (w_1, \dots, w_m)$ , где все  $u_i, w_j \in V$ , связана матрица их попарных скалярных произведений  $B_{\mathbf{u}\mathbf{w}} \stackrel{\text{def}}{=} \mathbf{u}^t \cdot \mathbf{w} \in \text{Mat}_{n \times m}(\mathbb{k})$  с элементами  $b_{ij} = v_i \cdot w_j = \beta(u_i, w_j)$ . Она называется *матрицей Грама* наборов  $\mathbf{u}$ ,  $\mathbf{w}$  и формы  $\beta$ . Когда наборы совпадают:  $\mathbf{u} = \mathbf{w}$ , мы пишем просто  $B_{\mathbf{u}}$  вместо  $B_{\mathbf{u}\mathbf{u}}$ . В этом случае  $\det B_{\mathbf{u}} \in \mathbb{k}$  называется *определителем Грама* формы  $\beta$  и набора векторов  $\mathbf{u}$ .

Если наборы векторов  $\mathbf{u}$  и  $\mathbf{w}$  линейно выражаются через наборы  $\mathbf{e}$  и  $\mathbf{f}$  по формулам  $\mathbf{u} = \mathbf{e} C_{\mathbf{e}\mathbf{u}}$  и  $\mathbf{w} = \mathbf{f} C_{\mathbf{f}\mathbf{w}}$ , то  $B_{\mathbf{u}\mathbf{w}} = \mathbf{u}^t \mathbf{w} = (\mathbf{e} C_{\mathbf{e}\mathbf{u}})^t (\mathbf{f} C_{\mathbf{f}\mathbf{w}}) = C_{\mathbf{e}\mathbf{u}}^t \mathbf{e}^t \mathbf{f} C_{\mathbf{f}\mathbf{w}} = C_{\mathbf{e}\mathbf{u}}^t B_{\mathbf{e}\mathbf{f}} C_{\mathbf{f}\mathbf{w}}$ . В частности, если  $\mathbf{u} = \mathbf{w} C_{\mathbf{w}\mathbf{u}}$ , то

$$B_{\mathbf{u}} = C_{\mathbf{w}\mathbf{u}}^t B_{\mathbf{w}} C_{\mathbf{w}\mathbf{u}}. \quad (14-2)$$

Если векторы  $\mathbf{e} = (e_1, \dots, e_n)$  образуют базис в  $V$ , а векторы  $\mathbf{u} = \mathbf{e} x$  и  $\mathbf{w} = \mathbf{e} y$  заданы столбцами  $x, y \in \mathbb{k}^n$  своих координат в этом базисе, то

$$\beta(u, w) = \mathbf{u}^t \cdot \mathbf{w} = x^t \mathbf{e}^t \cdot \mathbf{e} y = x^t B_{\mathbf{e}} y. \quad (14-3)$$

Так как любая квадратная матрица  $B_{\mathbf{e}} \in \text{Mat}_n(\mathbb{k})$  задаёт по этой формуле билинейную форму на пространстве  $V$ , сопоставление билинейной форме её матрицы Грама в произвольно зафиксированном базисе устанавливает биекцию между пространством билинейных форм на  $n$ -мерном векторном пространстве  $V$  и пространством матриц размера  $n \times n$ .

УПРАЖНЕНИЕ 14.2. Убедитесь, что эта биекция линейна.

<sup>1</sup>Ср. с п° 11.2 на стр. 134.

**14.1.2. Корреляции.** Задание билинейной формы  $\beta : V \times V \rightarrow \mathbb{k}$  эквивалентно заданию линейного отображения *правой корреляции*  $\beta^\wedge : V \rightarrow V^*$ , сопоставляющего каждому вектору  $v \in V$  линейный функционал  $\beta^\wedge v : V \rightarrow \mathbb{k}$ , который задаётся правым скалярным умножением на вектор  $v$  и является ограничением билинейного отображения  $\beta : V \times V \rightarrow \mathbb{k}$  на подмножество  $V \times \{v\} \subset V \times V$ :

$$\beta^\wedge v : V \rightarrow \mathbb{k}, \quad u \mapsto u \cdot v = \beta(u, v). \quad (14-4)$$

УПРАЖНЕНИЕ 14.3. Убедитесь, что для каждого  $v \in V$  функционал (14-4) линеен и линейно зависит от  $v$ .

Форма  $\beta : V \times V \rightarrow \mathbb{k}$  однозначно восстанавливается по правой корреляции  $\beta^\wedge : V \rightarrow V^*$  как

$$\beta(u, w) = \beta^\wedge w(u).$$

Если зафиксировать в  $V$  и  $V^*$  двойственные базисы  $\mathbf{e} = (e_1, \dots, e_n)$  и  $\mathbf{e}^* = (e_1^*, \dots, e_n^*)$ , то в этих базисах матрица  $B_{\mathbf{e}^* \mathbf{e}}^\wedge$  линейного отображения  $\beta^\wedge : V \rightarrow V^*$  имеет в клетке  $(i, j)$  значение  $i$ -той координаты функционала  $\beta^\wedge e_j : u \mapsto \beta(u, e_j)$  в базисе  $\mathbf{e}^*$ , которая равна<sup>1</sup> значению этого функционала на базисном векторе  $e_i$ , т. е. скалярному произведению  $\beta(e_i, e_j)$ . Таким образом, матрица правой корреляции  $B_{\mathbf{e}^* \mathbf{e}}^\wedge = B_{\mathbf{e}}^\wedge$  совпадёт с матрицей Грама формы  $\beta$  в базисе  $\mathbf{e}$ . Мы заключаем, что сопоставление билинейной форме  $\beta$  её правой корреляции  $\beta^\wedge$  устанавливает линейный изоморфизм пространства билинейных форм на  $V$  с пространством линейных отображений  $V \rightarrow V^*$ .

Симметричным образом, задание билинейной формы  $\beta : V \times V \rightarrow \mathbb{k}$  эквивалентно заданию *левой корреляции*  ${}^\wedge\beta : V \rightarrow V^*$ , которая переводит каждый вектор  $v \in V$  в линейный функционал  ${}^\wedge\beta v : V \rightarrow \mathbb{k}$ , получающийся ограничением отображения  $\beta : V \times V \rightarrow \mathbb{k}$  на подмножество  $\{v\} \times V \subset V \times V$  и задаваемый левым скалярным умножением на вектор  $v$ :

$${}^\wedge\beta v : V \rightarrow \mathbb{k}, \quad u \mapsto \beta(v, u) = v \cdot u. \quad (14-5)$$

Иначе можно сказать, что левая корреляция билинейной формы  $\beta$  является правой корреляцией для *транспонированной* формы  $\beta^t(u, w) \stackrel{\text{def}}{=} \beta(w, u)$ , матрица Грама которой транспонирована к матрице Грама формы  $\beta$ . Поэтому матрица левой корреляции билинейной формы  $\beta$  в двойственных базисах  $\mathbf{e}$  и  $\mathbf{e}^*$  пространств  $V$  и  $V^*$  равна транспонированной матрице Грама  $B_{\mathbf{e}}^t$  формы  $\beta$  в базисе  $\mathbf{e}$ .

**14.1.3. Ядра, ранг и коранг.** Векторные пространства

$$\begin{aligned} V^\perp &= \ker \beta^\wedge = \{u \in V \mid \forall v \in V \beta(v, u) = 0\} \\ {}^\perp V &= \ker {}^\wedge\beta = \{u \in V \mid \forall v \in V \beta(u, v) = 0\} \end{aligned} \quad (14-6)$$

называются соответственно *правым* и *левым* ядром билинейной формы  $\beta$ . Если форма  $\beta$  не является симметричной или кососимметричной<sup>2</sup>, то подпространства  $V^\perp$  и  ${}^\perp V$ , вообще говоря, различны. Тем не менее, их размерности всегда одинаковы и равны

$$\dim V^\perp = \dim {}^\perp V = \dim V - \text{rk } B_{\mathbf{e}}, \quad (14-7)$$

<sup>1</sup>См. н° 7.1.1 на стр. 85.

<sup>2</sup>Т. е. не удовлетворяет соотношениям  $\beta^t = \pm\beta$ . Мы подробнее поговорим о таких формах в н° 14.4 на стр. 179 ниже.

где  $B_e$  — матрица Грама формы  $\beta$  в произвольном базисе  $e$  пространства  $V$ , поскольку ранги<sup>1</sup>  $\text{rk } B_e = \text{rk } B_e^t$  равны размерностям образов  $\text{im } \beta^\wedge$  и  $\text{im } {}^\wedge\beta$  операторов правой и левой корреляций, а  $\dim \ker \beta^\wedge = \dim V - \dim \text{im } \beta^\wedge$  и  $\dim \ker {}^\wedge\beta = \dim V - \dim \text{im } {}^\wedge\beta$ . В частности, мы видим, что ранг матрицы Грама  $B_e$ , равный размерности образа каждой из корреляций, не зависит от выбора базиса. Он называется *рангом* билинейной формы  $\beta$  и обозначается  $\text{rk } \beta$ , а разность  $\dim V - \text{rk } \beta$  из формулы (14-7) называется *корангом* формы  $\beta$  и обозначается  $\text{corrk } \beta$ .

**14.1.4. Изометрии.** Линейное отображение  $f : U \rightarrow W$  между векторными пространствами  $U$  и  $W$ , на которых заданы билинейные формы  $\beta$  и  $\gamma$ , называется *изометрическим* или *гомоморфизмом пространств с билинейными формами*, если для любых векторов  $u_1, u_2 \in U$  выполняется равенство  $\beta(u_1, u_2) = \gamma(f(u_1), f(u_2))$ . Билинейные формы  $\beta$  и  $\gamma$  называются *изоморфными*, если между пространствами  $U$  и  $W$  имеется изометрический линейный изоморфизм.

Если произвольно зафиксировать в  $U$  и  $W$  базисы  $u = (u_1, \dots, u_n)$  и  $w = (w_1, \dots, w_m)$ , то отображение  $f$  с матрицей  $F_{wu}$  в этих базисах является изометрическим если и только если матрица Грама набора векторов  $f(u) = (f(u_1), \dots, f(u_n)) = w F_{wu}$  равна матрице Грама базиса  $u$ . По форм. (14-2) на стр. 170 это равносильно матричному равенству

$$F_{wu}^t B_w F_{wu} = B_u. \quad (14-8)$$

**14.2. Невырожденные формы.** Билинейная форма  $\beta$  называется *невырожденной*<sup>2</sup>, если она удовлетворяет условиям следующего ниже [предл. 14.1](#). Формы, не удовлетворяющие этим условиям, называются *вырожденными* или *особыми*.

Предложение 14.1 (критерии невырожденности)

Следующие свойства билинейной формы  $\beta$  на конечномерном векторном пространстве  $V$  равносильны друг другу:

- 1) в  $V$  существует базис с ненулевым определителем Грама
- 2) любой базис в  $V$  имеет ненулевой определитель Грама
- 3) левая корреляция  $\beta^\wedge : V \rightarrow V^*$  является изоморфизмом
- 4) правая корреляция  ${}^\wedge\beta : V \rightarrow V^*$  является изоморфизмом
- 5) для любого ненулевого вектора  $v \in V$  существует такой вектор  $u \in V$ , что  $\beta(v, u) \neq 0$
- 6) для любого ненулевого вектора  $v \in V$  существует такой вектор  $u \in V$ , что  $\beta(u, v) \neq 0$
- 7) для любой линейной функции  $\varphi : V \rightarrow \mathbb{K}$  существует такой вектор  $v \in V$ , что

$$\varphi(u) = \beta(v, u) \quad \text{для всех } u \in V$$

- 8) для любой линейной функции  $\varphi : V \rightarrow \mathbb{K}$  существует такой вектор  $v \in V$ , что

$$\varphi(u) = \beta(u, v) \quad \text{для всех } u \in V,$$

<sup>1</sup>Напомним, что транспонированные матрицы имеют одинаковый ранг, см. [теор. 5.1](#) на стр. 67 и [прим. 7.5](#) на стр. 88.

<sup>2</sup>А также *неособой* или *регулярной*.

причём при выполнении этих условий вектор  $v$  в последних двух пунктах определяется формой  $\varphi$  однозначно.

**Доказательство.** Поскольку  $\dim V = \dim V^*$ , биективность, инъективность и сюръективность линейного отображения  $V \rightarrow V^*$  равносильны друг другу и тому, что это отображение задаётся невырожденной матрицей в каких-нибудь базисах. Поэтому условия (3), (5), (7) и условия (4), (6), (8), утверждающие, соответственно, биективность, обращение в нуль ядра и сюръективность для операторов  $\hat{\beta}$  и  $\beta^\wedge$ , равносильны между собой и условию (1), означающему, что транспонированные друг другу матрицы этих операторов обратимы. Условие (1) равносильно условию (2) в силу форм. (14-2) на стр. 170, из которой вытекает, что определители Грама двух базисов  $e$  и  $f$  связаны друг с другом по формуле  $\det B_e = \det B_f \cdot \det^2 C_{fe}$ , где  $C_{fe}$  — матрица перехода<sup>1</sup> от базиса  $e$  к базису  $f$ .  $\square$

**Пример 14.1 (евклидова форма)**

Симметричная билинейная форма на координатном пространстве  $\mathbb{k}^n$  с единичной матрицей Грама  $E$  в стандартном базисе называется *евклидовой*. Эта форма невырождена и над полем  $\mathbb{k} = \mathbb{R}$  задаёт евклидову структуру на пространстве  $\mathbb{R}^n$ . Однако над отличными от  $\mathbb{R}$  полями свойства этой формы могут существенно отличаться от интуитивно привычных свойств евклидовой структуры. Например, над полем  $\mathbb{C}$  ненулевой вектор  $e_1 - ie_2 \in \mathbb{C}^2$  имеет нулевой скалярный квадрат.

**Упражнение 14.4.** Приведите пример  $n$ -мерного подпространства в  $\mathbb{C}^{2n}$ , на которое евклидова форма ограничивается в тождественно нулевую форму.

Базисы, в которых матрица Грама евклидовой формы равна  $E$  называются *ортонормальными*. Ниже<sup>2</sup> мы увидим, что над алгебраически замкнутым полем  $\mathbb{k}$  характеристики  $\text{char } \mathbb{k} \neq 2$  любая невырожденная симметричная билинейная форма изометрически изоморфна евклидовой.

**Пример 14.2 (гиперболическая форма)**

Симметричная билинейная форма  $h$  на чётномерном координатном пространстве  $\mathbb{k}^{2n}$ , матрица Грама которой в стандартном базисе равна

$$H = \begin{pmatrix} 0 & E \\ E & 0 \end{pmatrix}, \quad (14-9)$$

где  $E$  — единичная матрица размера  $n \times n$ , называется *гиперболической*. Она невырождена и над алгебраически замкнутым полем изометрически изоморфна евклидовой форме: ортонормальный базис гиперболической формы состоит из векторов

$$\varepsilon_{2v-1} = (e_v - e_{n+v})/\sqrt{-2} \quad \text{и} \quad \varepsilon_{2v} = (e_v + e_{n+v})/\sqrt{2}, \quad 1 \leq v \leq n.$$

Над полями  $\mathbb{R}$  и  $\mathbb{Q}$  гиперболическая форма не изоморфна евклидовой, поскольку евклидовы скалярные квадраты всех ненулевых векторов положительны, тогда как ограничение гиперболической формы на линейную оболочку первых  $n$  базисных векторов тождественно нулевое. Базис, в котором матрица Грама гиперболической формы имеет вид (14-9), называется *гиперболическим базисом*.

<sup>1</sup>См. п. 5.3 на стр. 63.

<sup>2</sup>См. сл. 14.1 на стр. 181.

ПРИМЕР 14.3 (СИМПЛЕКТИЧЕСКАЯ ФОРМА)

Кососимметричная форма на чётномерном координатном пространстве  $\mathbb{k}^{2n}$ , матрица Грама которой в стандартном базисе равна

$$J = \begin{pmatrix} 0 & E \\ -E & 0 \end{pmatrix}, \quad (14-10)$$

где  $E$  — единичная матрица размера  $n \times n$ , называется *симплектической*. Матрица  $J$  вида (14-10) называется *симплектической единицей*. Она имеет  $J^2 = -E$  и  $\det J = 1$ . Таким образом, симплектическая форма невырождена. Базис, в котором матрица Грама кососимметричной формы равна  $J$ , называется *симплектическим базисом*. Ниже<sup>1</sup> мы покажем, что всякая невырожденная кососимметричная билинейная форма над *любым* полем изометрически изоморфна симплектической. Это означает, в частности, что размерность пространства с невырожденной кососимметричной формой обязательно чётна.

УПРАЖНЕНИЕ 14.5. Убедитесь в том, что все кососимметричные квадратные матрицы нечётного размера над полем  $\mathbb{k}$  характеристики  $\text{char } \mathbb{k} \neq 2$  вырождены.

**14.2.1. Левый и правый двойственный базис.** Если билинейная форма  $\beta$  на пространстве  $V$  невырождена, то у любого базиса  $\mathbf{e} = (e_1, \dots, e_n)$  в  $V$  есть *правый* и *левый* двойственные базисы  $\mathbf{e}^\vee = (e_1^\vee, \dots, e_n^\vee)$  и  ${}^\vee\mathbf{e} = ({}^\vee e_1, \dots, {}^\vee e_n)$ , состоящие из прообразов векторов двойственно-го к  $\mathbf{e}$  базиса  $\mathbf{e}^* = (e_1^*, e_2^*, \dots, e_n^*)$  в  $V^*$  относительно изоморфизмов правой и левой корреляций соответственно. Они однозначно характеризуются соотношениями ортогональности

$$\beta(e_i, e_j^\vee) = \beta({}^\vee e_i, e_j) = \delta_{ij}, \quad (14-11)$$

которые на матричном языке означают, что взаимные матрицы Грама двойственных относительно формы  $\beta$  базисов единичные:  $B_{\mathbf{e}\mathbf{e}^\vee} = B_{{}^\vee\mathbf{e}\mathbf{e}} = E$ . Согласно формулам из н° 14.1.1 матрицы переходов  $C_{\mathbf{e},\mathbf{e}^\vee}$  и  $C_{\mathbf{e},{}^\vee\mathbf{e}}$ , в  $j$ -тых столбцах которых стоят координаты векторов  $e_j^\vee$  и  ${}^\vee e_j$  в базисе  $\mathbf{e}$ , удовлетворяют соотношениям  $B_{\mathbf{e}} C_{\mathbf{e},\mathbf{e}^\vee} = B_{\mathbf{e},\mathbf{e}^\vee} = E$  и  $C_{\mathbf{e},{}^\vee\mathbf{e}} B_{\mathbf{e}} = B_{{}^\vee\mathbf{e},\mathbf{e}} = E$ , откуда

$$C_{\mathbf{e},\mathbf{e}^\vee} = B_{\mathbf{e}}^{-1} \quad \text{и} \quad C_{\mathbf{e},{}^\vee\mathbf{e}} = (B_{\mathbf{e}}^t)^{-1}.$$

Знание двойственного к базису  $\mathbf{e}$  относительно билинейной формы  $\beta$  базиса позволяет находить коэффициенты разложения любого вектора  $v \in V$  по каждому из двойственных базисов как взятые с надлежащей стороны скалярные произведения вектора  $v$  с соответствующими элементами двойственного базиса:

$$v = \sum_i \beta({}^\vee e_i, v) e_i = \sum_i \beta(v, e_i^\vee) e_i = \sum_i \beta(v, e_i) {}^\vee e_i = \sum_i \beta(e_i, v) e_i^\vee. \quad (14-12)$$

УПРАЖНЕНИЕ 14.6. Убедитесь в этом.

**14.2.2. Изотропные подпространства.** Подпространство  $U \subset V$  называется *изотропным* для билинейной формы  $\beta$ , если эта форма ограничивается на него в тождественно нулевую форму, т. е. когда  $\beta(u, w) = 0$  для всех  $u, w \in U$ . Например, каждое одномерное подпространство является изотропным для любой кососимметричной формы, а линейные оболочки первых  $n$  и последних  $n$  базисных векторов пространства  $\mathbb{k}^{2n}$  изотропны для гиперболической формы из прим. 14.2 и симплектической формы из прим. 14.3.

<sup>1</sup>См. теор. 14.3 на стр. 181.

## Предложение 14.2

Размерность изотропного подпространства невырожденной билинейной формы на пространстве  $V$  не превосходит  $\dim V/2$ .

Доказательство. Изотропность подпространства  $U \subset V$  означает, что корреляция  $\beta^\wedge : V \simeq V^*$  отображает  $U$  внутрь  $\text{Ann } U \subset V^*$ . Так как корреляция невырожденной формы инъективна,  $\dim U \leq \dim \text{Ann } U = \dim V - \dim U$ , откуда  $2 \dim U \leq \dim V$ .  $\square$

Замечание 14.1. Примеры гиперболической и симплектической форм показывают, что оценка из предл. 14.2 в общем случае неумлучшаема.

**14.2.3. Группа изометрий.** Как мы видели в н° 14.1.4 на стр. 172, линейный эндоморфизм  $f : V \rightarrow V$  является изометрическим для билинейной формы  $\beta$  на пространстве  $V$  если и только если его матрица  $F_e$  в произвольном базисе  $e$  пространства  $V$  связана с матрицей Грама  $B_e$  этого базиса соотношением<sup>1</sup>  $F_e^t B_e F_e = B_e$ . Если форма  $\beta$  невырождена, то беря определители обеих частей, заключаем, что  $\det^2 F_e = 1$ , откуда  $\det F_e = \pm 1$ . Поэтому любая изометрия конечномерного пространства с невырожденной билинейной формой обратима и с точностью до знака сохраняет объём. Так как композиция изометрий и обратное к изометрии отображение тоже являются изометриями, изометрические преобразования пространства  $V$  образуют группу. Она обозначается  $O_\beta(V)$  и называется *группой изометрий*<sup>2</sup> невырожденной билинейной формы  $\beta$ . Изометрии определителя 1 называются *специальными* или *собственными* и образуют в группе всех изометрий подгруппу, обозначаемую  $SO_\beta(V)$ .

Из форм. (14-8) на стр. 172 вытекает, что обратная к изометрии  $f$  изометрия имеет матрицу

$$F_e^{-1} = B_e^{-1} F_e^t B_e. \quad (14-13)$$

## Пример 14.4 (изометрии вещественной гиперболической плоскости)

Оператор  $f : H_2 \rightarrow H_2$ , имеющий в стандартном гиперболическом базисе  $e_1, e_2 \in H_2$  матрицу

$$F = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix},$$

является изометрическим тогда и только тогда, когда

$$\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},$$

что равносильно уравнениям  $ac = bd = 0$  и  $ad + bc = 1$ , имеющим два семейства решений:

$$F_\lambda = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda^{-1} \end{pmatrix} \quad \text{и} \quad \tilde{F}_\lambda = \begin{pmatrix} 0 & \lambda \\ \lambda^{-1} & 0 \end{pmatrix}, \quad \text{где } \lambda \in \mathbb{k}^* = \mathbb{k} \setminus \{0\}. \quad (14-14)$$

Над полем  $\mathbb{R}$  оператор  $F_\lambda$  является собственным, и при  $\lambda > 0$  называется *гиперболическим поворотом*, т. к. каждый вектор  $v = (x, y)$ , обе координаты которого ненулевые, движется при действии на него операторов  $F_\lambda$  с  $\lambda \in (0, \infty)$  по гиперболе  $xy = \text{const}$ . Если положить  $\lambda = e^t$  и

<sup>1</sup>См. формулу (14-8) на стр. 172.

<sup>2</sup>А также *ортогональной группой* или *группой автоморфизмов*.

перейти к ортогональному базису из векторов  $p = (e_1 + e_2)/\sqrt{2}$ ,  $q = (e_1 - e_2)/\sqrt{2}$ , то оператор  $F_\lambda$  запишется в нём матрицей, похожей на матрицу евклидова поворота

$$\begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} e^t & 0 \\ 0 & e^{-t} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \operatorname{ch} t & \operatorname{sh} t \\ \operatorname{sh} t & \operatorname{ch} t \end{pmatrix},$$

где  $\operatorname{ch} t \stackrel{\text{def}}{=} (e^t + e^{-t})/2$  и  $\operatorname{sh} t \stackrel{\text{def}}{=} (e^t - e^{-t})/2$  называются *гиперболическими косинусом* и *синусом* вещественного числа  $t$ . Оператор  $F_\lambda$  с  $\lambda < 0$  является композицией гиперболического поворота и центральной симметрии. Несобственный оператор  $\tilde{F}_\lambda$  является композицией гиперболического поворота с отражением относительно той оси гиперболы, которая пересекается с её ветвями.

**14.2.4. Биекция между формами и операторами.** На пространстве  $V$  с билинейной формой  $\beta : V \times V \rightarrow \mathbb{k}$  каждому линейному оператору  $f : V \rightarrow V$  можно сопоставить билинейную форму  $\beta_f(u, w) \stackrel{\text{def}}{=} \beta(u, fw)$  с матрицей Грама  $e^t \cdot f(e) = e^t \cdot e F_e = B_e F_e$  в произвольно выбранном базисе  $e$  пространства  $V$ . Поскольку на языке матриц отображение  $f \mapsto \beta_f$  заключается в левом умножении матрицы оператора на матрицу Грама:  $F_e \mapsto B_e F_e$ , оно линейно и обратимо, если форма  $\beta$  невырождена. Обратное отображение задаётся умножением матрицы оператора слева на обратную к матрице Грама матрицу. Поэтому каждая билинейная форма

$$\alpha : V \times V \rightarrow \mathbb{k}$$

на конечномерном векторном пространстве  $V$  с фиксированной невырожденной билинейной формой  $\beta$  имеет вид  $\alpha(u, w) = \beta(u, f_\alpha w)$  для некоторого линейного оператора  $f_\alpha : V \rightarrow V$ , однозначно определяемого формой  $\alpha$ . Матрица  $F_e$  оператора  $f_\alpha$  выражается через матрицы Грама  $B_e$  и  $A_e$  форм  $\beta$  и  $\alpha$  по формуле  $F_e = B_e^{-1} A_e$ .

ПРИМЕР 14.5 (КАНОНИЧЕСКИЙ ОПЕРАТОР)

Задаваемая невырожденной билинейной формой  $\beta$  биекция между формами и операторами сопоставляет транспонированной к  $\beta$  форме  $\beta^t(u, w) \stackrel{\text{def}}{=} \beta(w, u)$  оператор  $\kappa : V \rightarrow V$ , который называется *каноническим оператором* невырожденной билинейной формы  $\beta$  и однозначно характеризуется свойством

$$\forall u, w \in V \quad \beta(w, u) = \beta(u, \kappa w). \quad (14-15)$$

Матрица  $K_e$  канонического оператора в произвольном базисе  $e$  пространства  $V$  выражается через матрицу Грама  $B_e$  формы  $\beta$  по формуле  $K_e = B_e^{-1} B_e^t$ .

УПРАЖНЕНИЕ 14.7. Убедитесь, что при замене матрицы Грама по правилу  $B \mapsto C^t B C$ , где  $C \in \operatorname{GL}_n(\mathbb{k})$ , матрица  $K = B^{-1} B^t$  меняется по правилу  $K \mapsto C^{-1} K C$ , т. е. канонические операторы изоморфных билинейных форм подобны.

Так как  $\beta(u, w) = \beta(w, \kappa u) = \beta(\kappa u, \kappa w)$  для всех  $u, w \in V$ , канонический оператор является изометрическим.

ТЕОРЕМА 14.1

Над алгебраически замкнутым полем характеристики, отличной от двух, две невырожденные билинейные формы изометрически изоморфны если и только если их канонические операторы подобны.

Доказательство. Импликация «только если» вытекает из [упр. 14.7](#) и имеет место над любым полем. Докажем обратную импликацию. Пусть невырожденные билинейные формы  $\alpha$  и  $\beta$  имеют подобные канонические операторы  $\kappa_\alpha$  и  $\kappa_\beta = g^{-1} \kappa_\alpha g$ . Тогда форма  $\alpha'(u, w) = \alpha(gu, gw)$



изометрически изоморфна форме  $\alpha$  и имеет канонический оператор  $g^{-1}\kappa_\alpha g = \kappa_\beta$ , поскольку  $\alpha'(u, w) = \alpha(gu, gw) = \alpha(gw, \kappa_\alpha gu) = \alpha'(w, g^{-1}\kappa_\alpha gu)$  для всех  $u, w$ . Таким образом, заменяя форму  $\alpha$  на форму  $\alpha'$ , мы без ограничения общности можем считать, что формы  $\alpha$  и  $\beta$  имеют один и тот же канонический оператор  $\kappa$ . Линейный оператор  $f$ , однозначно определяемый равенством  $\beta(u, w) = \alpha(u, fw)$  для всех  $u, w$ , обратим в силу невырожденности форм  $\alpha, \beta$  и самосопряжён относительно  $\alpha$  в том смысле<sup>1</sup>, что для всех  $u, w$  выполняется равенство

$$\alpha(fu, w) = \alpha(\kappa^{-1}w, fu) = \beta(\kappa^{-1}w, u) = \beta(u, w) = \alpha(u, fw).$$

Любой многочлен от оператора  $f$  тоже самосопряжён относительно формы  $\alpha$ . В силу идущей ниже лем. 14.1, над алгебраически замкнутым полем характеристики нуль существует такой многочлен  $P(t)$ , что оператор  $h = P(f)$  удовлетворяет равенству  $h^2 = f$ . Такой оператор  $h$  биективен и самосопряжён относительно  $\alpha$ . Поэтому форма

$$\beta(u, w) = \alpha(u, fw) = \alpha(u, h^2w) = \alpha(hu, hw)$$

изометрически изоморфна форме  $\alpha$ . □

#### ЛЕММА 14.1

Над алгебраически замкнутым полем характеристики, отличной от двух, из любого биективного линейного оператора  $f$  на конечномерном векторном пространстве  $V$  можно извлечь квадратный корень, являющийся многочленом от оператора  $f$ .

Доказательство. Из курсов алгебры и комбинаторики известно, что при всех целых  $k \geq 0$  биномиальный коэффициент  $\binom{2k}{k}$  нацело делится<sup>2</sup> на  $(k+1)$ . Поэтому над любым полем  $\mathbb{k}$  характеристики  $\text{char } \mathbb{k} \neq 2$  корректно определён биномиальный степенной ряд

$$\begin{aligned} \sqrt{1+x} &= \sum_{k \geq 0} \binom{1/2}{k} x^k = \sum_{k \geq 0} \frac{(-1)^{k-1}}{2^k k!} \cdot 3 \cdot 5 \cdot \dots \cdot (2k-3) \cdot x^k = \\ &= 1 + \frac{1}{2} \sum_{k \geq 1} \frac{(-1)^{k-1}}{4^{k-1}} \binom{2k-2}{k-1} \frac{x^k}{k}. \end{aligned} \quad (14.16)$$

УПРАЖНЕНИЕ 14.8. Убедитесь в том, что квадрат многочлена, равного сумме первых  $n+1$  членов этого ряда, сравним в  $\mathbb{k}[x]$  с  $1+x$  по модулю  $x^{n+1}$ .

Над алгебраически замкнутым полем  $\mathbb{k}$  характеристический многочлен  $\chi_f(t)$  оператора  $f$  разлагается на взаимно простые множители  $(t-\lambda)^{m_\lambda}$ , где  $\lambda \in \text{Spec}(f)$ , и пространство  $V$  распадается в прямую сумму  $f$ -инвариантных корневых подпространств<sup>3</sup>  $K_\lambda = \ker(f - \lambda \text{Id})^{m_\lambda}$ . Так как  $f$  биективен, в этом разложении все  $\lambda$  отличны от нуля, и для каждого  $\lambda$  корректно определён многочлен  $p_\lambda(t) \in \mathbb{k}[t]$ , равный сумме первых  $m_\lambda$  членов формального разложения Тэйлора

<sup>1</sup>Ср. с н° 12.3 на стр. 148.

<sup>2</sup>Частное  $c_k = \frac{1}{k+1} \binom{2k}{k}$  называется  $k$ -тым числом Каталана и имеет несколько чисто комбинаторных описаний, см. пример 4.7 на стр. 61 лекции:

[http://gorod.bogomolov-lab.ru/ps/stud/algebra-1/2021/lec\\_04.pdf](http://gorod.bogomolov-lab.ru/ps/stud/algebra-1/2021/lec_04.pdf).

<sup>3</sup>См. н° 10.4 на стр. 125.



функции  $\sqrt{t}$  в точке  $\lambda$ , которое получается из биномиальной формулы (14-16) заменой переменных:

$$\begin{aligned}\sqrt{t} &= \sqrt{\lambda + (t - \lambda)} = \sqrt{\lambda} \cdot (1 + \lambda^{-1/2}(t - \lambda))^{1/2} = \\ &= \lambda^{1/2} + \frac{1}{2}(t - \lambda) - \frac{\lambda^{-1/2}}{8}(t - \lambda)^2 + \frac{\lambda^{-1}}{16}(t - \lambda)^3 - \dots\end{aligned}$$

Согласно упр. 14.8,  $p_\lambda^2(t) \equiv t \pmod{(t - \lambda)^{m_\lambda}}$ . По китайской теореме об остатках существует многочлен  $p(t)$ , сравнимый с  $p_\lambda(t)$  по модулю  $(t - \lambda)^{m_\lambda}$  сразу для всех  $\lambda \in \text{Spec}(f)$ . Его квадрат

$$p^2(t) \equiv t \pmod{(t - \lambda)^{m_\lambda}} \quad \forall \lambda \in \text{Spec}(f).$$

Поэтому квадрат оператора  $p(f)$  действует на каждом корневом подпространстве  $K_\lambda$  точно также, как  $f$ . Тем самым,  $p^2(f) = f$ .  $\square$

**14.3. Ортогоналы и ортогональные проекции.** С каждым подпространством  $U$  векторного пространства  $V$  с билинейной формой  $\beta : V \times V \rightarrow \mathbb{k}$  связаны левый и правый ортогоналы

$$\begin{aligned}{}^\perp U &= \{v \in V \mid \forall u \in U \beta(v, u) = 0\}, \\ U^\perp &= \{v \in V \mid \forall u \in U \beta(u, v) = 0\}.\end{aligned}\tag{14-17}$$

Вообще говоря, это два разных подпространства в  $V$ .

**Предложение 14.3**

Если билинейная форма  $\beta$  на конечномерном пространстве  $V$  невырождена, то для всех подпространств  $U \subset V$  выполняются равенства

$$\dim {}^\perp U = \dim V - \dim U = \dim U^\perp \quad \text{и} \quad ({}^\perp U)^\perp = U = {}^\perp(U^\perp).$$

**Доказательство.** Первые два равенства верны, так как ортогоналы (14-17) суть прообразы подпространства  $\text{Ann } U \subset V^*$  при изоморфизмах  ${}^\wedge\beta, {}^\vee\beta : V \simeq V^*$ , и  $\dim \text{Ann } U = \dim V - \dim U$ . Вторые два равенства вытекают из первых, поскольку оба подпространства  $({}^\perp U)^\perp$  и  ${}^\perp(U^\perp)$  содержат  $U$  и имеют размерность  $\dim U$ .  $\square$

**Предложение 14.4**

Пусть билинейная форма  $\beta$  на произвольном<sup>1</sup> векторном пространстве  $V$  ограничивается на конечномерное подпространство  $U \subset V$  в невырожденную на этом подпространстве билинейную форму  $\beta|_U : U \times U \rightarrow \mathbb{k}$ . Тогда  $V = U \oplus U^\perp$ , и проекция  $v_U \in U$  каждого вектора  $v \in V$  на подпространство  $U$  вдоль  $U^\perp$  однозначно определяется тем, что  $\beta(u, v) = \beta(u, v_U)$  для всех  $u \in U$ . Вектор  $v_U$  выражается через произвольный базис  $u_1, \dots, u_n$  пространства  $U$  по формуле

$$v_U = \sum_{i=1}^n \beta({}^\vee u_i, v) u_i = \sum_{i=1}^n \beta(u_i, v) u_i^\vee,\tag{14-18}$$

где  ${}^\vee u_1, \dots, {}^\vee u_n$  и  $u_1^\vee, \dots, u_n^\vee$  суть левый и правый двойственные к  $u_1, \dots, u_n$  относительно формы  $\beta$  базисы<sup>2</sup> в  $U$ .

<sup>1</sup>Возможно даже бесконечномерном.

<sup>2</sup>См. п.° 14.2.1 на стр. 174.

Доказательство. Так как ограничение формы  $\beta$  на  $U$  невырождено, для любого вектора  $v \in V$  существует единственный такой вектор  $v_U \in U$ , что линейная функция  $u \mapsto \beta(u, v)$  на пространстве  $U$  задаётся правым скалярным умножением векторов из  $U$  на этот вектор  $v_U$ , т. е. для всех  $u \in U$  выполняется равенство  $\beta(u, v) = \beta(u, v_U)$ . Поэтому разность  $v - v_U \in U^\perp$ . Таким образом, каждый вектор  $v \in V$  представляется в виде суммы  $v = v_U + (v - v_U)$  с  $v_U \in U$  и  $v - v_U \in U^\perp$ . Поскольку в любом разложения  $v = v'_U + w$  с  $v'_U \in U$  и  $w \in U^\perp$  для всех  $u \in U$  выполняется равенство  $\beta(u, v) = \beta(u, v'_U)$ , имеем равенство  $v'_U = v_U$ , а значит и равенство  $w = v - v'_U = v - v_U$ , что доказывает первые два утверждения предложения. Последнее утверждение вытекает из форм. (14-12) на стр. 174:  $v_U = \sum_i \beta(\vee u_i, v_U) u_i = \sum_i \beta(\vee u_i, v) u_i$ .  $\square$

УПРАЖНЕНИЕ 14.9. Докажите симметричное утверждение:  $V = {}^\perp U \oplus U$  если и только если билинейная форма  $\beta$  ограничивается на конечномерное подпространство  $U \subset V$  в невырожденную на этом подпространстве билинейную форму  $\beta|_U : U \times U \rightarrow \mathbb{k}$ ; при этом проекция  ${}_U v$  каждого вектора  $v \in V$  на  $U$  вдоль  ${}^\perp U$  однозначно определяется тем, что  $\beta(v, u) = \beta({}_U v, u)$  для всех  $u \in U$  и находится по формуле  ${}_U v = \sum \beta(v, u_i^\vee) u_i = \sum \beta(v, u_i) \vee u_i$ .

**14.4. Симметричные и кососимметричные формы.** Билинейная форма  $\beta$  называется *симметричной*, если  $\beta(u, w) = \beta(w, u)$  для всех  $u, w \in V$ , и *кососимметричной* — если  $\beta(v, v) = 0$  для всех  $v \in V$ . В последнем случае для любых  $u, w \in V$  выполняется равенство

$$0 = \beta(u + w, u + w) = \beta(u, w) + \beta(w, u),$$

откуда  $\beta(u, w) = -\beta(w, u)$ .

УПРАЖНЕНИЕ 14.10. Убедитесь, что при  $\text{char } \mathbb{k} \neq 2$  равенство  $\beta(u, w) = -\beta(w, u)$  всех  $u, w \in V$  равносильно равенству  $\beta(v, v) = 0$  для всех  $v \in V$  и что формы  $\beta(u, w)$  и  $\beta^t(u, w) = \beta(w, u)$  пропорциональны ровно в двух случаях: когда  $\beta^t = \pm\beta$ .

Если  $\text{char } \mathbb{k} = 2$ , каждая кососимметричная форма автоматически симметрична, но не наоборот. Если  $\text{char } \mathbb{k} \neq 2$ , пространства симметричных и кососимметричных билинейных форм имеют нулевое пересечение, и каждая билинейная форма  $\beta$  однозначно раскладывается в сумму  $\beta = \beta_+ + \beta_-$  симметричной и кососимметричной форм

$$\beta_+(v, w) = \frac{\beta(v, w) + \beta(w, v)}{2} \quad \text{и} \quad \beta_-(v, w) = \frac{\beta(v, w) - \beta(w, v)}{2}.$$

**14.4.1. Левая и правая корреляции** симметричной билинейной формы совпадают друг с другом, и мы будем в этом случае обозначать оператор  $\beta^\wedge = {}^\wedge\beta$  через  $\widehat{\beta} : V \rightarrow V^*$  и называть просто *корреляцией* симметричной формы  $\beta$ . Напомним, корреляция переводит вектор  $v \in V$ , в линейную функцию

$$\widehat{\beta}v : V \rightarrow \mathbb{k}, \quad u \mapsto \beta(u, v) = \beta(v, u).$$

Для кососимметричной формы левая и правая корреляции различаются знаком:  $\beta^\wedge = -{}^\wedge\beta$ .

**14.4.2. Ядро.** Левое и правое ядро (косо)симметричной формы  $\beta$  совпадают друг с другом и называются просто *ядром* этой формы. Поэтому для (косо)симметричной формы  $\beta$  пространство  $\ker {}^\wedge\beta = \ker \beta^\wedge$  обозначается просто  $\ker \beta \stackrel{\text{def}}{=} \{w \in V \mid \forall v \in V \beta(v, w) = \pm\beta(w, v) = 0\}$ .

Предложение 14.5

Ограничение (косо) симметричной билинейной формы  $\beta$  на любое дополнительное к ядру  $\ker \beta$  подпространство  $U \subset V$  невырождено.

Доказательство. Пусть подпространство  $U \subset V$  таково, что  $V = \ker \beta \oplus U$ , а вектор  $w \in U$  удовлетворяет для всех  $u \in U$  соотношению  $\beta(u, w) = 0$ . Записывая произвольный вектор  $v \in V$  в виде  $v = e + u$ , где  $e \in \ker \beta$  и  $u \in U$ , получаем  $\beta(v, w) = \beta(e, w) + \beta(u, w) = 0$ , откуда  $w \in U \cap \ker \beta = 0$ .  $\square$

Предложение 14.6

Любая (косо) симметричная билинейная форма  $\beta$  на пространстве  $V$  корректно определяет на фактор пространстве  $V/\ker \beta$  невырожденную билинейную форму  $\bar{\beta}$  по формуле

$$\bar{\beta}([u], [w]) \stackrel{\text{def}}{=} \beta(u, w). \quad (14-19)$$

Доказательство. Если  $[u] = [u']$ , а  $[w] = [w']$ , то векторы  $u - u'$  и  $w - w'$  лежат в  $\ker \beta$  и имеют нулевые левые и правые скалярные произведения с любым вектором. Поэтому

$$\bar{\beta}([u'], [w']) = \beta(u', w') = \beta(u + (u' - u), w + (w' - w)) = \beta(u, w) = \bar{\beta}([u], [w]),$$

что доказывает корректность формулы (14-19). Пусть класс  $[u] \in V/\ker \beta$  имеет нулевое скалярное произведение  $\bar{\beta}([u], [w]) = 0$  со всеми классами  $[w] \in V/\ker \beta$ . По определению формы  $\bar{\beta}$  это означает, что  $\beta(u, w) = 0$  для всех  $w \in U$ , откуда  $u \in \ker \beta$  и  $[u] = 0$ .  $\square$

Предостережение 14.1. Для произвольной билинейной формы, которая не является симметричной или кососимметричной, левое и правое ядра  $\ker({}^V\beta)$  и  $\ker(\beta^V)$  могут быть различны, и в этом случае предл. 14.5 и предл. 14.6, вообще говоря, неверны.

**14.4.3. Ортогоналы и проекции.** Если форма  $\beta$  на пространстве  $V$  (косо) симметрична, то левый и правый ортогоналы к любому подпространству  $U \subset V$  совпадают друг с другом и обозначаются через  $U^\perp$ . Если (косо) симметричная форма  $\beta$  ограничивается на подпространство  $U \subset V$  в невырожденную на этом подпространстве форму, то  $V = U \oplus U^\perp$  по предл. 14.4. В этом случае подпространство  $U^\perp$  называется *ортогональным дополнением* к подпространству  $U$ . Проекция  $v_U$  вектора  $v \in V$  на  $U$  вдоль  $U^\perp$  называется *ортогональной проекцией* на  $U$  относительно формы  $\beta$ . Вектор  $v_U$  однозначно характеризуется тем, что его левое и правое скалярное произведение со всеми векторами из  $U$  такие же, как и у вектора  $v$ .

Если форма  $\beta$  невырождена на всём пространстве  $V$ , то по предл. 14.4

$$\dim U^\perp = \dim V - \dim U \quad \text{и} \quad U^{\perp\perp} = U$$

для всех подпространств  $U \subset V$ . В этом случае ограничение формы  $\beta$  на подпространство  $U \subset V$  невырождено если и только если невырождено её ограничение на  $U^\perp$ .

ТЕОРЕМА 14.2 (ТЕОРЕМА ЛАГРАНЖА)

Каждое конечномерное векторное пространство с симметричной билинейной формой  $\beta$  над любым полем  $\mathbb{k}$  характеристики  $\text{char } \mathbb{k} \neq 2$  обладает базисом с диагональной матрицей Грама<sup>1</sup>.

Доказательство. Если  $\dim V = 1$  или форма  $\beta$  нулевая, то матрица Грама любого базиса диагональна. Если форма  $\beta$  ненулевая, то найдётся вектор  $e \in V$  с  $\beta(e, e) \neq 0$ , ибо в противном случае  $2\beta(u, w) = \beta(u + w, u + w) - \beta(u, u) - \beta(w, w) = 0$  для всех  $u, w \in V$ . Возьмём такой вектор  $e$

<sup>1</sup>Такие базисы называются *ортогональными*.

в качестве первого вектора искомого базиса. Поскольку ограничение формы  $\beta$  на одномерное подпространство  $U = \mathbb{k} \cdot e$  невырождено, пространство  $V$  распадается в прямую ортогональную сумму  $U \oplus U^\perp$ . По индукции, в  $U^\perp$  есть базис с диагональной матрицей Грама. Добавляя к нему  $e$ , получаем искомый базис в  $V$ .  $\square$

#### Следствие 14.1

Над алгебраически замкнутым полем  $\mathbb{k}$  характеристики  $\text{char}(\mathbb{k}) \neq 2$  две симметричных билинейных формы изометрически изоморфны если и только если их матрицы Грама имеют одинаковый ранг.

**Доказательство.** Над алгебраически замкнутым полем каждый ненулевой диагональный элемент матрицы Грама ортогонального базиса можно сделать единичным, заменив соответствующий ему базисный вектор  $e_i$  на  $e_i / \sqrt{\beta(e_i, e_i)}$ .  $\square$

#### Пример 14.6 (ортогональный базис гиперболического пространства)

В гиперболическом пространстве<sup>1</sup>  $\mathbb{k}^{2n}$  с гиперболическим базисом  $e_1, \dots, e_n, e_{n+1}, \dots, e_{2n}$  над произвольным полем  $\mathbb{k}$  характеристики  $\text{char}(\mathbb{k}) \neq 2$  в качестве ортогонального базиса можно взять, например, векторы  $p_i = e_i + e_{n+i}$  и  $q_i = e_i - e_{n+i}$  со скалярными квадратами  $h(p_i, p_i) = 2$  и  $h(q_i, q_i) = -2$ .

#### Теорема 14.3 (теорема Дарбу)

Над произвольным полем  $\mathbb{k}$  любой характеристики для каждой кососимметричной билинейной формы  $\omega$  на конечномерном векторном пространстве  $V$  имеется базис с матрицей Грама, ненулевые элементы которой сосредоточены в расположенных на главной диагонали  $2 \times 2$  блоках вида

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}. \quad (14-20)$$

В частности,  $\text{rk } \omega$  всегда чётен.

**Доказательство.** Если форма тождественно нулевая, то доказывать нечего. Если  $\omega(u, w) \neq 0$  для каких-то  $u, w$ , положим  $e_1 = u, e_2 = w/\omega(u, w)$ . Так как матрица Грама векторов  $e_1, e_2$  имеет вид (14-20), эти векторы не пропорциональны и порождают двумерное подпространство  $U \subset V$ , на которое форма  $\omega$  ограничивается невырождено. Поэтому  $V = U \oplus U^\perp$ . Применяя индукцию по  $\dim V$ , можно считать, что в подпространстве  $U^\perp$  требуемый базис есть. Добавляя к нему  $e_1, e_2$ , получаем искомый базис в  $V$ .  $\square$

#### Следствие 14.2

Над произвольным полем  $\mathbb{k}$  любой характеристики всякая невырожденная кососимметричная форма изометрически изоморфна симплектической форме из [прим. 14.3](#) на стр. 174.

**Доказательство.** Согласно [теор. 14.3](#) все ненулевые элементы матрицы Грама формы в подходящем базисе сосредоточатся в расположенных на главной диагонали  $2 \times 2$  блоках (14-20). Чтобы получить из такого базиса симплектический, надо лишь переставить базисные векторы: сначала написать подряд все векторы с нечётными номерами, а потом — с чётными.  $\square$

<sup>1</sup>См. [прим. 14.2](#) на стр. 173.

### Ответы и указания к некоторым упражнениям

Упр. 14.3. Это переформулировка того, что форма  $\beta : V \times V \rightarrow \mathbb{k}$  билинейна.

Упр. 14.4. Линейная оболочка векторов  $e_\nu + ie_{n+\nu}$  с  $1 \leq \nu \leq n$ .

Упр. 14.5. Если матрица  $B \in \text{Mat}_n(\mathbb{k})$  кососимметрична, то при нечётном  $n$

$$\det B = \det B^t = \det(-B) = (-1)^n \det B = -\det B,$$

откуда  $\det B = 0$  если  $\text{char } \mathbb{k} \neq 2$ .

Упр. 14.6. Пусть  $v = \sum x_i e_i$ . Скалярно умножая  $v$  слева на  $\vee e_i$ , получаем  $\beta(\vee e_i, v) = x_i$ . Скалярно умножая  $v$  справа на  $e_i^\vee$ , получаем  $\beta(v, e_i^\vee) = x_i$ , и т. д.

Упр. 14.8. В  $\mathbb{k}[[x]]$  квадрат ряда  $\sqrt{1+x}$  равен  $1+x$ , а коэффициенты при  $x^k$  для  $0 \leq k \leq n$  у квадрата ряда  $\sqrt{1+x}$  такие же, как и у квадрата многочлена из условия.