

Многомерие

- ГЛЗ♦1.** Сколько k -мерных векторных подпространств в n -мерном векторном пространстве над полем из q элементов? Найдите для фиксированных n и k предел этого количества при $q \rightarrow 1$.
- ГЛЗ♦2.** Сколько k -мерных аффинных подпространств имеется в n -мерном аффинном пространстве над конечным полем из q элементов?
- ГЛЗ♦3.** Верно ли, что в каждом векторном пространстве для любых трёх векторных подпространств U, V, W выполняются соотношения:
- а) $(U + V) \cap (V + W) \cap (W + U) = (U + W) \cap V + (U + V) \cap W$
 - б) $(U + V) \cap (V + W) \cap (W + U) \subseteq (U \cap V) + (V \cap W) + (W \cap U)$
 - в*) $(U + V) \cap (V + W) \cap (W + U) \supseteq (U \cap V) + (V \cap W) + (W \cap U)$
 - г) для конечномерных U, V, W разность размерностей левой и правой частей в предыдущих двух включениях чётна?
- ГЛЗ♦4.** Пусть k -мерные подпространства $W_1, W_2, \dots, W_m \subset V$ таковы, что $\dim W_i \cap W_j = k - 1$ для всех $i \neq j$. Покажите, что существует либо $(k - 1)$ -мерное подпространство $U \subset V$, содержащееся во всех W_i , либо $(k + 1)$ -мерное подпространство $W \subset V$, содержащее все W_i .
- ГЛЗ♦5.** Может ли а) векторное б) аффинное пространство над бесконечным полем оказаться объединением конечного числа подпространств меньшей размерности?
- ГЛЗ♦6.** В четырёхмерном аффинном пространстве над бесконечным полем задано конечное множество двумерных аффинных плоскостей. Всегда ли найдётся двумерная плоскость
- а) не пересекающая ни одну из них
 - б) пересекающая каждую из них ровно в одной точке?
- ГЛЗ♦7.** Можно ли через точку, лежащую внутри¹ четырёхмерного куба $\{x \in \mathbb{R}^4 \mid \forall i |x_i| \leq 1\}$, провести двумерную плоскость так, чтобы она не пересекла ни одного ребра² этого куба?
- ГЛЗ♦8.** При каких $c \in \mathbb{R}$ четырёхмерный куб из предыдущей задачи пересекается с гиперплоскостью $\sum x_i = c$? Нарисуйте все трёхмерные многогранники, которые высекаются из куба такими гиперплоскостями. Если задача вызывает затруднения, потренируйтесь сначала на аналогичных сечениях трёхмерного куба³ в \mathbb{R}^3 .
- ГЛЗ♦9.** Векторы $v_0, v_1, \dots, v_n \in \mathbb{R}^n$ имеют нулевую сумму, но некоторые n из них образуют в \mathbb{R}^n базис. Верно ли, что
- а) каждый вектор $w \in \mathbb{R}^n$ имеет единственное представление $w = \sum x_i e_i$, где $x_i \in \mathbb{R}$ и $\sum x_i = 0$
 - б) любые n векторов v_i образуют базис в \mathbb{R}^n
 - в) для любого вектора $w \in \mathbb{R}^n$ найдётся базис, составленный из векторов v_i , в котором все координаты вектора w неотрицательны?
- ГЛЗ♦10.** Может ли поле из четырёх элементов быть подполем поля из а) восьми б*) шестнадцати элементов?

¹Т. е. имеющую координаты, по модулю строго меньшие единицы.

²Т. е. прямой, проходящей чрез какие-нибудь две соседние вершины (две точки, у которых все координаты равны ± 1 , причём эти наборы координат отличаются друг от друга ровно в одной позиции).

³Алгебраически и те и другие сечения можно описывать в барицентрических координатах относительно треугольника (соотв. тетраэдра) с вершинами в точках пересечения плоскости с тремя (соотв. четырьмя) рёбрами куба, выходящими из вершины $(-1, -1, -1)$ (соотв. $(-1, -1, -1, -1)$) или же относительно центрально симметричного ему треугольника (соотв. тетраэдра), высекаемого рёбрами, входящими в противоположную вершину.

Персональный табель _____.
(напишите свои имя, отчество и фамилию)

Листок № 3 (5.10.2020)

№	дата	кто принял	подпись
1			
2			
3а			
б			
в			
г			
4			
5			
6а			
б			
7			
8			
9а			
б			
в			
10а			
б			