

Введение в теневой анализ¹

Соглашения. Всюду ниже поле \mathbb{k} имеет характеристику нуль, и $D : \mathbb{k}[x] \rightarrow \mathbb{k}[x]$, $f \mapsto f'$, обозначает оператор дифференцирования². Сопоставим каждому степенному ряду $\varphi(t) = \sum_{k \geq 0} \frac{\varphi_k}{k!} t^k \in \mathbb{k}[[t]]$ ко-вектор $\varphi \in \mathbb{k}[x]^*$, который сворачивается с базисными мономы по правилу³ $\langle \varphi, x^k \rangle = \varphi_k$, а также линейный оператор $\varphi(D) : \mathbb{k}[x] \rightarrow \mathbb{k}[x]$, $f \mapsto \sum_{k \geq 0} \frac{\varphi_k}{k!} D^k f = \varphi_0 f + \varphi_1 f' + \varphi_2 f'' / 2 + \varphi_3 f''' / 6 + \dots$

ГЛ4½♦1. Как действуют на $\mathbb{k}[x]$ линейные операторы $e^{\alpha D} = \sum_{k \geq 0} \frac{\alpha^k}{k!} D^k$, где $\alpha \in \mathbb{k}$?

ГЛ4½♦2. Убедитесь, что сопоставление степенным рядам ковекторов задаёт линейный изоморфизм векторных пространств $\mathbb{k}[[t]] \simeq \mathbb{k}[x]^*$. Для каждого $\alpha \in \mathbb{k}$ укажите ряд, соответствующий функционалу вычисления $ev_\alpha : \mathbb{k}[x] \rightarrow \mathbb{k}$, $f \mapsto f(\alpha)$. Опишите линейные операторы $\mathbb{k}[[t]] \rightarrow \mathbb{k}[[t]]$, двойственные к следующим линейным операторам $\mathbb{k}[x] \rightarrow \mathbb{k}[x]$:

- а) умножение на $x : f(x) \mapsto x \cdot f(x)$ б) дифференцирование $D : f(x) \mapsto f'(x)$
- в) сдвиг $T_\alpha : f(x) \mapsto f(x + \alpha)$, $\alpha \in \mathbb{k}$ г) $\Delta : f(x) \mapsto f(x + 1) - f(x)$ и $\nabla : f(x) \mapsto f(x) - f(x - 1)$.

ГЛ4½♦3. Убедитесь, что отображение $\mathbb{k}[[t]] \rightarrow \text{End}(\mathbb{k}[x])$, $\varphi \mapsto \varphi(D)$, является инъективным гомоморфизмом \mathbb{k} -алгебр⁴, и докажите, что его образ состоит из всех линейных операторов $F : \mathbb{k}[x] \rightarrow \mathbb{k}[x]$, которые удовлетворяют следующим эквивалентным условиям:

- а) $\forall \alpha \in \mathbb{k} FT_\alpha = T_\alpha F$ б) $FT_1 = T_1 F$ в) $FT_{-1} = T_{-1} F$ г) $F\Delta = \Delta F$ д) $F\nabla = \nabla F$ е) $FD = DF$.

ГЛ4½♦4. Докажите равенства $\langle \varphi \psi, x^n \rangle = \langle \varphi, \psi(D)x^n \rangle = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \langle \varphi, x^{n-k} \rangle \langle \psi, x^k \rangle$.

ГЛ4½♦5 (многочлены Аппеля). Многочленами Аппеля ряда $\varphi(t) = \sum_{k \geq 0} \frac{\varphi_k}{k!} t^k \in \mathbb{k}[[t]]$ называются образы $f_k(x) = \varphi(D)x^k$ базисных мономов x^k под действием оператора $\varphi(D)$. Покажите, что:

- а) $\varphi_n = f_n(0)$ б) $f'_n(x) = n f_{n-1}(x)$ в) $f_n(x + y) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} f_{n-k}(x) y^k$
- г) $f_n(x) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \varphi_{n-k} x^k = (\varphi^\downarrow + x)^n$, где нисходящая стрелка у φ^\downarrow предписывает раскрывать бином $(\varphi + x)^n$, формально заменяя все φ^k на φ_k .

ГЛ4½♦6 (приложение: суммы степеней). Ряд $td(t) = t / (1 - e^{-t}) = \sum_{k \geq 0} \frac{b_k}{k!} t^k \in \mathbb{k}[[t]]$ называется рядом Тодда, его коэффициенты b_k — числами Бернулли, а его многочлены Аппеля $B_k(x) \stackrel{\text{def}}{=} td(D)x^k$ — многочленами Бернулли. Докажите, что следующие условия на последовательность многочленов $s_n(x) \in \mathbb{k}[x]$, $n \in \mathbb{N}$, эквивалентны:

- а) $s_{n+1}(m) = 0^n + 1^n + \dots + m^n$ при всех целых $m, n \geq 0$ б) $s_{n+1}(0) = 0$ и $\nabla s_{n+1}(x) = x^n$
- в) $s_{n+1}(0) = 0$ и $Ds_{n+1}(x) = td(D)x^n$ г) $(n+1)s_{n+1}(x) = B_{n+1}(x) - b_{n+1} = (b^\downarrow + x)^{n+1} - b_{n+1}$.

ГЛ4½♦7. Покажите, что $(n+1)b_n = \sum_{k=1}^n (-1)^{k+1} \binom{n+1}{k+1} b_{n-k}$ при всех $n \geq 2$, $b_0 = 1$, $b_1 = 1/2$,

$b_2 = 1/6$, $b_{2k+1} = 0$ при всех $k \in \mathbb{N}$. Вычислите все b_n с $n \leq 10$ и найдите⁵ $s_{11}(1000)$.

ГЛ4½♦8. Положим $c_k(x) = x(x+1)\dots(x+k-1)/k!$ и $c_0(x) = 1$. Докажите, что: а) $\nabla c_k = c_{k-1}$
 б) $f(x) = \sum_{k \geq 0} \nabla^k f(0) \cdot c_k(x) = \sum_{k \geq 0} \nabla^k f(\alpha) \cdot c_k(x - \alpha)$ для всех $f \in \mathbb{k}[x]$ и $\alpha \in \mathbb{k}$
 в) $c_n(x + y) = \sum_{k=0}^n c_{n-k}(x) \cdot c_k(y)$, т. е. ряды $C_x(t) = \sum_{k \geq 0} c_k(x) \cdot t^k$ перемножаются по правилу $C_x(t) \cdot C_y(t) = C_{x+y}(t)$.

¹По-латыни: *umbral calculus*.

²Напомним, что производная $f'(x)$ есть результат подстановки $y = z = x$ в многочлен $\frac{f(y)-f(z)}{y-z} \in \mathbb{k}[y, z]$.

³Обратите внимание, что это правило отличается множителями $k!$ от того, что использовалось в примере 7.2 на стр. 83 лекции http://gorod.bogomolov-lab.ru/ps/stud/geom_ru/2021/lec_07.pdf.

⁴Т. е. линейно над \mathbb{k} и переводит сложение и умножение рядов соответственно в сложение и композицию линейных операторов.

⁵В те далёкие времена, когда не знали иных калькуляторов кроме счётов, Яков Бернулли (1654–1705) считал сумму десятых степеней первой тысячи натуральных чисел меньше, чем за половину четверти часа.

№	дата	кто принял	подпись
1			
2а			
б			
в			
г			
3			
4			
5а			
б			
в			
г			
6			
7			
8а			
б			
в			