Евклидова геометрия

ГЛ7◇1. Три вектора в евклидовом пространстве $\mathbb{R}^3$ таковы, что все скалярные произведения между ними неотрицательны. Всегда ли найдётся такой ортонормальный базис в $\mathbb{R}^3$, что все три эти вектора окажутся в одном координатном октанте?

ГЛ7◇2. Какое максимальное число векторов можно выпустить из начала координат n-мерного евклидова пространства так, чтобы все попарные углы между ними были тупыми?

ГЛ7◇3. Сколько трёхмерных плоскостей симметрии у четырёхмерного куба?

ГЛ7◇4. В стандартном n-мерном симплексе $\Delta_n = \{x \in \mathbb{R}^{n+1} \mid \sum x_i = 1,\ x_i \geqslant 0\}$ найдите

а) угол между ребром и противолежащей ему $(n-2)$-мерной гранью[1]

б) расстояние между противоположными[2] гранями размерностей m и $(n-m-1)$.

ГЛ7◇5* (октаплекс). Нарисуем в $\mathbb{R}^4$ стандартный куб I^4 и гомотетичный стандартному кокуб, все вершины которого лежат на описанной вокруг I^4 сфере. Выпуклая оболочка вершин куба и кокуба называется *октаплексом*. Подсчитайте у него

а) количество граней в каждой из размерностей

б) длины рёбер и радиус вписанного шара

и выясните,

в) как выглядят трёхмерные гиперграни и каковы их объёмы

г) как выглядят двумерные грани и каковы их площади.

ГЛ7◇6. Чему равна композиция отражений $\sigma_{e_1}\sigma_{e_2}\ \dots\ \sigma_{e_n}$ евклидова координатного пространства $\mathbb{R}^n$ в стандартных координатных гиперплоскостях $e_i^{\perp}$ при $n = 2, 3, 4, \dots$?

ГЛ7◇7 (движения евклидова пространства $\mathbb{R}^3$). Пусть τ_v, σ_π и $\varrho_{v,\varphi}$ обозначают, соответственно, сдвиг на вектор v, отражение в плоскости π и поворот вокруг прямой с направляющим вектором v на угол φ против ЧС, если глядеть вдоль v. Выясните, когда имеют место написанные ниже равенства, и во всех случаях, когда они верны, выразите параметры движения в правой части через параметры движений из левой:

а) $\sigma_{\pi_1} \circ \sigma_{\pi_2} = \varrho_{v,\varphi}$ **б)** $\sigma_{\pi_1} \circ \sigma_{\pi_2} = \tau_v$ **в)** $\sigma_\pi \circ \varrho_{u,\varphi} \circ \sigma_\pi = \varrho_{v,\psi}$

г) $\varrho_{u,\varphi} \circ \varrho_{w,\psi} = \tau_v \circ \varrho_{v,\vartheta}$ **д)** $\varrho_{u,\varphi} \circ \sigma_\pi \circ \varrho_{u,-\varphi} = \sigma_{\pi_2}$ **е)** $\varrho_{u,\varphi} \circ \sigma_{\pi_1} = \sigma_{\pi_2}$

ж) $\tau_{u_2} \circ \sigma_{\pi_2} \circ \tau_{u_1} \circ \sigma_{\pi_1} = \tau_v \circ \varrho_{v,\varphi}$, где каждый вектор сдвига u_i параллелен соответствующей плоскости отражения π_i.

ГЛ7◇8. Обозначим через ϱ_{AB} поворот трёхмерного евклидова пространства $\mathbb{R}^3$ на угол π вокруг прямой AB, а через σ_{ABC} — отражение в плоскости ABC. Пусть точки A, B, C, D являются вершинами правильного тетраэдра. Опишите движение[3]

а) $\varrho_{AD} \circ \varrho_{AC} \circ \varrho_{AB}$ **б)** $\sigma_{ADB} \circ \sigma_{ACD} \circ \sigma_{ABC}$.

[1] Т. е. аффинной оболочкой $n-1$ вершин, не являющихся концами этого ребра.

[2] Т. е. не пересекающимися или, что то же самое, натянутыми на дополнительные множества вершин.

[3] Если это отражение, то в какой плоскости, если поворот — вокруг какой оси и на какой угол.