

Правильные многогранники (по Шлефли)

Терминология и обозначения. Группой многогранника $M \subset \mathbb{R}^n$ называется группа всех биективных отображений $M \simeq M$, которые являются ограничениями на M ортогональных преобразований $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$. Всякая последовательность длины n , состоящая из вершины, примыкающего к ней ребра, примыкающей к нему двумерной грани, ... , примыкающей к ней $(n - 1)$ -мерной грани, называется *флагом* в M . Многогранник называется *правильным*, если его группа транзитивно действует на его флагах. Для правильного многогранника $P \subset \mathbb{R}^n$ обозначим через $\ell(P)$ длину его ребра, через $r(P)$ — радиус описанного шара, через $\rho(P) = \ell^2 / 4r^2$ — квадрат отношения длины ребра к диаметру описанного шара.

ГЛ9¹/₂♦1 (звезда). Покажите, что все вершины правильного многогранника P , соединённые ребром с заданной вершиной $p \in P$, лежат в одной гиперплоскости, образуя в ней правильный многогранник $\text{St}(P)$ на единицу меньшей размерности, чем P (он называется *звездой* многогранника P).

ГЛ9¹/₂♦2 (символ). Определим по индукции *символ Шлефли* правильного многогранника $P \subset \mathbb{R}^n$ как последовательность $\nu(P) = (\nu_1(P), \nu_2(P), \dots, \nu_{n-1}(P))$ из $n - 1$ натуральных чисел, хвост которой $(\nu_2(P), \dots, \nu_{n-1}(P)) = \nu(\text{St}(P))$ является символом звезды $\text{St}(P)$, а первое число $\nu_1(P)$ равно количеству рёбер у двумерной грани многогранника P . Найдите символы: **а)** додекаэдра и икосаэдра в \mathbb{R}^3 **б*)** октаплекса¹ в \mathbb{R}^4 **в)** правильного n -мерного симплекса **г)** n -мерного куба **д)** n -мерного кокуба.

ГЛ9¹/₂♦3*. Убедитесь, что выпуклая оболочка вершин стандартного четырёхмерного куба $I_4 = \{(x_1, \dots, x_4) \in \mathbb{R}^4 \mid \forall i |x_i| \leq 1\}$, точек пересечения его описанной сферы с прямыми, соединяющими центры его противоположных трёхмерных граней, и всех точек, которые получаются чётными перестановками координат из точек $(\pm\chi, \pm 1, \pm\chi^{-1}, 0)$, где золотое сечение $\chi = (1 + \sqrt{5})/2$, является правильным многогранником с символом $(3, 3, 5)$.

ГЛ9¹/₂♦4. Выразите $\ell(\text{St}(P))$ через $\ell(P)$ и $\nu_1(P)$, и покажите, что $\rho(P) = 1 - \cos^2(\pi/\nu_1(P))/\rho(\text{St}(P))$ зависит только от символа $\nu(P)$ многогранника P .

ГЛ9¹/₂♦5 (двойственность). Покажите, что для правильного многогранника $P \subset \mathbb{R}^n$ с центром в нуле многогранник $P^* = \{\xi \in \mathbb{R}^{n*} \mid \forall v \in P \xi(v) \geq -1\}$ тоже правильный с центром в нуле, и для каждого k имеется оборачивающая включения биекция между k -мерными гранями многогранника P и $(n - k - 1)$ -мерными гранями многогранника P^* .

ГЛ9¹/₂♦6. Покажите, что символ $\nu(P^*)$ это прочтённый справа налево символ $\nu(P)$.

ГЛ9¹/₂♦7 (классификация правильных многогранников по Шлефли). Покажите, что

а) символы всех правильных многогранников $P \subset \mathbb{R}^n$ содержится в списке:

- (ν) , где $\nu \geq 3$ — любое натуральное, при $n = 2$
- $(3, 3), (3, 4), (4, 3), (3, 5), (5, 3)$ при $n = 3$
- $(3, 3, 3), (3, 3, 4), (4, 3, 3), (3, 4, 3), (3, 3, 5), (5, 3, 3)$ при $n = 4$
- $(3, \dots, 3), (3, \dots, 3, 4), (4, 3, \dots, 3)$ при $n \geq 5$

б*) для каждого элемента списка имеется единственный с точностью до подобия правильный многогранник с таким символом.

ГЛ9¹/₂♦8. Постройте изоморфизм **а)** группы правильного n -мерного симплекса с симметрической группой S_{n+1} **б)** собственной группы трёхмерного куба с группой перестановок S_4 .

ГЛ9¹/₂♦9. Подсчитайте количество движений в группе n -мерного куба.

ГЛ9¹/₂♦10*. Сколько движений в группах 4-мерных правильных многогранников с символами $(3, 4, 3), (3, 3, 5)$ и $(5, 3, 3)$? Попытайтесь явно перечислить все эти движения.

¹См. задачу ГЛ7 ♦ 5* из листка № 7.