Билинейные и квадратичные формы

ГЛ10⋄1. Какими могут быть ранг и сигнатура ограничения невырожденной вещественной квадратичной формы сигнатуры (p, m) на векторное подпространство коразмерности 1?

ГЛ10⋄2. Для каждого простого натурального $p > 2$ перечислите все анизотропные квадратичные формы над полем $\mathbb{F}_p = \mathbb{Z}/(p)$.

ГЛ10⋄3. Убедитесь, что функция $A \mapsto \det A$ является квадратичной формой на пространстве $\mathrm{Mat}_2(\Bbbk)$, и опишите такое линейное преобразование $Y \mapsto Y^?$ пространства $\mathrm{Mat}_2(\Bbbk)$, что поляризация формы det имеет вид $2\,\widetilde{\det}(X, Y) = \mathrm{tr}(X \cdot Y^?)$. Является ли форма det гиперболической?

ГЛ10⋄4. Зафиксируем в пространстве W квадратичных форм от переменных (x_0, x_1) базис x_0^2, $2x_0x_1$, x_1^2 и свяжем с каждой 2×2 матрицей A линейный оператор $S^2A : W \to W$, переводящий $f(x_0, x_1)$ в $f(y_0, y_1)$, где $(y_0, y_1) = (x_0, x_1)\,A$. Напишите его матрицу в выбранном базисе и выразите её след и определитель через[1] $\mathrm{tr}\,A$ и $\det A$.

ГЛ10⋄5. Для $X \in \mathrm{Mat}_n(\mathbb{R})$ пусть $\det(tE - X) = t^n - \sigma_1(X)\,t^{n-1} + \sigma_2(X)\,t^{n-2} - \cdots$. Убедитесь, что $\sigma_2(X)$ является квадратичной формой на пространстве $\mathrm{Mat}_n(\mathbb{R})$, и вычислите её ранг и сигнатуру. Если общий случай вызывает затруднения, решите задачу для $n = 2, 3, 4$.

ГЛ10⋄6. Найдите сигнатуру квадратичной формы $\mathrm{tr}\left(A^2\right)$ на пространстве $\mathrm{Mat}_n(\mathbb{R})$. Если общий случай вызывает затруднения, решите задачу для $n = 2, 3, 4$.

ГЛ10⋄7. Рассмотрим поле $\mathbb{F}_{27} = \mathbb{F}_3[x]/(x^3 - x + 1)$ как трёхмерное векторное пространство над полем $\mathbb{F}_3$. Напишите матрицу Грама симметричной билинейной формы[2] $\mathrm{tr}(ab)$ в базисе $[1]$, $[x]$, $[x^2]$ и опишите все изотропные векторы этой формы.

ГЛ10⋄8. Покажите, что симплектическая группа транзитивно действует на симплектических и на изотропных подпространствах любой фиксированной размерности.

ГЛ10⋄9*. Приведите пример пространства V с вырожденной ненулевой билинейной формой β и дополнительного к ядру левой корреляции ${}^\wedge\beta : V \to V^*$, $v \mapsto \beta(v, *)$, подпространства $U \subset V$, таких что ограничение формы β на U остаётся вырожденным.

ГЛ10⋄10*. Пусть билинейная форма β на пространстве V ограничивается в невырожденную форму на конечномерном подпространстве $U \subset V$. Постройте изометрический линейный изоморфизм[3] между ${}^\perp U$ и $U^\perp$.

ГЛ10⋄11*. Докажите, что у канонического линейного оператора[4] $\varkappa$ любой невырожденной билинейной формы β на n-мерном пространстве над алгебраически замкнутым полем

а) характерстический многочлен $\chi_\varkappa(t) = \det(t\mathrm{Id} - \varkappa)$ возвратный, т. е. $\chi_\varkappa(t^{-1}) = t^{-n}\chi_\varkappa(t)$

б) для каждого $\lambda \neq \pm 1$ имеется сохраняющая размеры клеток биекция между жордановыми клетками с собственным числом λ и жордановыми клетками с собственным числом λ^{-1}

в) количества жордановых клеток чётного размера с собствнным числом $+1$ и нечётного размера с собствнным числом -1 оба чётны.

ГЛ10⋄12*. Докажите, что над алгебраически замкнутым полем полем характеристики нуль каждый невырожденный линейный оператор, удовлетворяющий условиям предыдущей задачи, является каноническим оператором для единственной с точностью до изометрического изоморфизма невырожденной билинейной формы.

---

[1] И, если останутся силы, вернитесь к задаче ГЛ5 ⋄ 12*.

[2] След умножения на $ab : K \to K$, $x \mapsto ab\,x$.

[3] Т. е. такой изоморфизм $f : {}^\perp U \xrightarrow{\sim} U^\perp$, что $\beta\big(f(v), f(w)\big) = \beta(v, w)$ для всех $v, w \in {}^\perp U$.

[4] Напомню, что этот оператор однозначно определяется тем, что $\beta(u, w) = \beta(w, \varkappa u)$ для всех u, w.