

**ГОДОВОЙ КУРС «ЛИНЕЙНАЯ АЛГЕБРА И ГЕОМЕТРИЯ»
ПРОГРАММА ВТОРОГО ПОЛУГОДИЯ (ВЕСЕННЕГО СЕМЕСТРА)**

интенсивность занятий: 1,5 пары лекций + 1,5 пары упражнений в неделю
темы, набранные *курсивом* могут стать необязательными или упраздниться вовсе.

ТРЕТЬЯ ЧЕТВЕРТЬ (11 НЕДЕЛЬ)

11–15 января. Евклидовы пространства: ортогонализация, евклидов объём и ориентация, матрицы Грама и как они преобразуются при замене координат, определитель Грама равен квадрату евклидова объёма, вычисление углов и расстояний между подпространствами. Ортогональные дополнения и ортогональное проектирование, евклидово двойственные базисы, метод наименьших квадратов, общий перпендикуляр к набору векторов, векторные произведения.

18–22 января. Ортогональные преобразования и движения, описание движений трёхмерного пространства. Отражения в гиперплоскостях, композиция отражений является поворотом, разложение ортогонального оператора в композицию отражений и в ортогональную сумму поворотов в двумерных плоскостях. *Простота группы $SO_3(\mathbb{R})$.*

25–29 января. SVD-разложение операторов между евклидовыми пространствами и полярное разложение невырожденного линейного оператора. *Полный ортогональный инвариант пары подпространств в евклидовом пространстве.*

1 ФЕВРАЛЯ – 5 ФЕВРАЛЯ. Элементы выпуклой геометрии: выпуклость внутренности и замыкания, грани и крайние точки, замкнутая выпуклая фигура является пересечением своих опорных полупространств. *Перечисление граней выпуклых многогранников, теоремы Фаркаша – Минковского – Вейля.*

Контрольная № 4: вещественные аффинные и евклидовы пространства.

8–12 февраля. Билинейные формы: корреляции¹, матрицы Грама, ранг. Невырожденные билинейные формы: биекция между формами и операторами, *канонический оператор Серра*, ортогоналы и ортогональные проекции, размерность изотропного подпространства невырожденной формы на V не превышает $\dim V / 2$. Симметричные и кососимметричные формы, невырожденность ограничения на дополнительное подпространство к ядру и на фактор по ядру, разложение произвольной формы в сумму симметричной и кососимметричной.

15–19 февраля. Квадратичные формы: поляризация, определитель Грама, невырожденность, приведение к сумме квадратов и его специализации над полями \mathbb{R} , \mathbb{C} и \mathbb{F}_p . Канонический вид самосопряжённого оператора на пространстве с невырожденной квадратичной формой. Отражения, группа изометрий порождается отражениями в гиперплоскостях.

22–26 февраля. Гиперболические формы, всякий базис в изотропном пространстве половинной размерности дополняется до гиперболического базиса, изометрии двумерного гиперболического пространства. Лемма Витта, разложение векторного пространства с невырожденной квадратичной формой в ортогональную сумму гиперболического и анизотропного. Независимость сигнатуры вещественной формы от выбора базиса и отыскание сигнатуры по последовательности главных угловых миноров. *Описание анизотропных форм над полями \mathbb{F}_p .*

1–5 марта. Кососимметричные формы. Нормальная форма Дарбу, всякий базис лагранжева подпространства невырожденной формы дополняется до симплектического базиса. *Грассмановы квадратичные формы, пфаффиан кососимметричной матрицы.*

Контрольная № 5: билинейные и квадратичные формы.

¹ Линейные отображения $V \rightarrow V^*$ («опускание индекса»), задаваемые билинейной формой.

8–12 МАРТА. Проективные пространства, проективизация, примеры: $\mathbb{P}(\mathbb{R}^2) \simeq S^1$, $\mathbb{P}(\mathbb{C}^2) \simeq S^2$, $\mathbb{P}(\mathbb{R}^3) \simeq$ лента Мёбиуса с заклеенной диском границей, $\mathbb{P}(\mathbb{R}^4) \simeq \text{SO}_3(\mathbb{R})$, $\mathbb{P}(\mathbb{k}^{n+1}) = \mathbb{k}^n \sqcup \dots \sqcup \mathbb{k}^0$. Каждая точка $v \in \mathbb{P}(V)$ покрывается аффинным пространством, ассоциированным с векторным пространством $V / \mathbb{k} \cdot v$, локальные аффинные координаты, стандартные аффинные карты. Однородные координаты и задание фигур однородными уравнениями, пространства фигур, пример: $\mathbb{P}_d = \mathbb{P}(S^d U)$ как множество неупорядоченных наборов из d точек на $\mathbb{P}_1 = \mathbb{P}(U)$, *нормальные рациональные кривые*.

16–19 МАРТА. Словарик «Линейная алгебра – проективная геометрия»: проективные подпространства, размерности пересечений и линейных соединений, дополнительные подпространства и проекции. Проективная двойственность: соответствие $\mathbb{P}(U) \leftrightarrow \mathbb{P}(\text{Ann } U)$ задаёт оборачивающую включение биекцию между подпространствами размерности k и $n - k - 1$ в пространствах $\mathbb{P}_n = \mathbb{P}(V)$ и $\mathbb{P}_n^\times = \mathbb{P}(V^*)$ и переводит пересечения в линейные соединения. Проективные квадрики: касательное пространство, всякая квадрика является линейным соединением пространства особых точек и гладкой квадрики в дополнительном подпространстве.

23–26 МАРТА. Проективное преобразование пространства \mathbb{P}_n однозначно задаётся действием на $n + 2$ точки, никакие $n + 1$ из которых не лежат в одной гиперплоскости. Группа $\text{PGL}(V)$. Проективная прямая, дробно линейные преобразования, двойное отношение, гармонические пары точек. Плоскость $\mathbb{P}_2 = \mathbb{P}(S^2 U)$ как множество неупорядоченных пар точек на $\mathbb{P}_1 = \mathbb{P}(U)$, коника Веронезе, инволюции проективной прямой.

ЧЕТВЁРТАЯ ЧЕТВЕРТЬ (9–10 НЕДЕЛЬ)

5–9 АПРЕЛЯ. Плоская проективная геометрия: разложение гомографии¹ в композицию проекций, построения одной линейкой, перспективные треугольники, теоремы Дезарга, четырёхвершинник и эпиморфизм $S_4 \rightarrow S_3$. Рациональная параметризация непустой гладкой коники, задание гомографий кониками, гомографии на конике, теорема Паскаля и трассировка коники линейкой.

12–16 АПРЕЛЯ. Полярное преобразование относительно гладкой квадрики, двойственная квадрика. Пересечение гладкой квадрики с гиперплоскостью, линейные подпространства, лежащие на гладкой квадратике над алгебраически замкнутым полем и над \mathbb{R} . Проективная классификация квадратик над \mathbb{C} и над \mathbb{R} . Примеры: квадрика Сегре в $\mathbb{P}_3 = \mathbb{P}(\text{End } \mathbb{k}^2)$, квадрика Плюккера в $\mathbb{P}_5 = \mathbb{P}(\Lambda^2 \mathbb{k}^4)$ и геометрия прямых в $\mathbb{P}_3 = \mathbb{P}(\mathbb{k}^4)$. Пространство квадратик, примеры: пространство коник и пространство квадратичных поверхностей в \mathbb{P}_3 .

19–23 АПРЕЛЯ. Пучки квадратик, коранг особой квадрики пучка не меньше кратности соответствующего корня характеристического многочлена. Простой пучок² с точностью до проективного преобразования объемлющего пространства однозначно определяется набором корней характеристического многочлена, рассматриваемым с точностью до дробно-линейного преобразования прямой, параметризующей пучок. Пучок прост тогда и только тогда, когда две задающие его квадрики пересекаются трансверсально³. *Одновременная диагонализация регулярной пары квадратичных форм*. Пример: классификация пучков коник. *Касательное пространство к проективной гиперповерхности. Связь геометрии пучка коник с его расположением относительно гиперповерхности особых коник*.

26–30 АПРЕЛЯ. Комплексное проективное описание евклидовых коник: асимптоты, центр, фокусы, директрисы, главные оси и как находить всё это «в уме». Фокальные свойства гладких коник.

Контрольная № 6: проективная геометрия и евклидовы коники.

10–14 МАЯ. Вложение аффинной группы в проективную в качестве нормализатора бесконечной гиперплоскости. Аффинные квадрики: гладкие центральные квадрики, параболоиды, простые конусы и цилиндры; их явное описание над \mathbb{C} и над \mathbb{R} , планарность вещественных квадратик.

¹Т. е. дробно линейного преобразования между проективными прямыми.

²Пучок квадратик на \mathbb{P}_n , содержащий ровно $n + 1$ различных особых квадратик.

³Т. е. коразмерность пересечения касательных пространств в каждой точке пересечения (включая особые точки) равна двум.

17–21 мая. Евклидова геометрия квадрик, полуоси гладких квадрик в евклидовом аффинном пространстве. Метрические свойства кривых и поверхностей второго порядка.

24–28 мая. Геометрия сфер: инверсии, группа Мёбиуса, пространство сфер, пучки сфер.

31 мая – 4 июня. Внутренняя геометрия сферы: сферическая метрика и неравенство треугольника, площадь сферического треугольника. *Элементы эллиптической геометрии: кратчайший геодезический отрезок, медиаторы, группа изометрий порождается отражениями в плоскостях и совпадает с проективизацией ортогональной группы, эллиптические треугольники первого и второго рода, конфигурации попарно равноудалённых точек на эллиптической плоскости и правильные многогранники в \mathbb{R}^3 .*

Контрольная №7: евклидовы квадрики и сферы.

7–11 июня. Примеры групп, порождённых отражениями. Образующие и соотношения для групп платоновых тел в \mathbb{R}^3 и симметрической группы S_n . *Классификация правильных многогранников и групп Кокстера.*