

Билинейные формы

Обозначения. Мы рассматриваем конечномерное векторное пространство V над произвольным полем \mathbb{k} , оснащённое билинейной формой $\beta : V \times V \rightarrow \mathbb{k}$. Значение $\beta(u, w) \in \mathbb{k}$ на векторах $u, w \in V$ иногда удобно записывать в виде произведения¹ $u \cdot w$. Для двух наборов векторов $\mathbf{u} = (u_1, \dots, u_n)$ и $\mathbf{w} = (w_1, \dots, w_m)$, где $u_i, w_j \in V$, матрица $B_{\mathbf{u}\mathbf{w}} = \mathbf{u}^t \cdot \mathbf{w} \in \text{Mat}_{n \times m}(\mathbb{k})$ с элементами $b_{ij} = v_i \cdot w_j = \beta(u_i, w_j)$ называется *матрицей Грама* этих наборов и формы β . Если наборы совпадают: $\mathbf{u} = \mathbf{w}$, мы пишем просто $B_{\mathbf{u}}$ вместо $B_{\mathbf{u}\mathbf{u}}$. В этом случае $\det B_{\mathbf{u}} \in \mathbb{k}$ называется *определителем Грама* формы β и набора векторов \mathbf{u} . Форма называется *невыврожденной*, если $\det B_{\mathbf{e}} \neq 0$ для какого-нибудь базиса \mathbf{e} в V .

ГС13♦1. Пусть наборы векторов $\mathbf{u} = (u_1, \dots, u_n)$ и $\mathbf{w} = (w_1, \dots, w_m)$ линейно выражаются через наборы векторов $\mathbf{r} = (r_1, \dots, r_k)$ и $\mathbf{s} = (s_1, s_2, \dots, s_\ell)$ по формулам $\mathbf{u} = \mathbf{r} C_{ru}$ и $\mathbf{w} = \mathbf{s} C_{sw}$, где $C_{ru} \in \text{Mat}_{k \times n}(\mathbb{k})$, $C_{sw} \in \text{Mat}_{\ell \times m}(\mathbb{k})$. Выразите матрицу Грама $B_{\mathbf{u}\mathbf{w}}$ через матрицу Грама $B_{\mathbf{r}\mathbf{s}}$ и матрицы C_{ru} , C_{sw} .

ГС13♦2. Покажите, что определитель Грама линейно зависимого набора векторов нулевой.

ГС13♦3. Зафиксируем в пространствах V и V^* двойственные базисы $\mathbf{e} = (e_1, \dots, e_n)$ и $\mathbf{e}^* = (e_1^*, \dots, e_n^*)$. Сопоставим билинейной форме $\beta : V \times V \rightarrow \mathbb{k}$ линейные операторы *левой* и *правой корреляции* $\wedge\beta, \beta^\wedge : V \rightarrow V^*$, переводящие вектор $v \in V$ в линейные функции

$$\wedge\beta(v) : V \rightarrow \mathbb{k}, \quad u \mapsto \beta(v, u), \quad \text{и} \quad \beta^\wedge(v) : V \rightarrow \mathbb{k}, \quad u \mapsto \beta(u, v).$$

Выразите матрицы этих операторов в базисах \mathbf{e} , \mathbf{e}^* через матрицу Грама $B_{\mathbf{e}}$.

ГС13♦4. Для любой билинейной формы $\beta : V \times V \rightarrow \mathbb{k}$ покажите, что а) $\dim \ker \wedge\beta = \dim \ker \beta^\wedge$ б) матрицы Грама всех базисов пространства V имеют одинаковый ранг.

ГС13♦5. Приведите пример формы, у которой $\ker \wedge\beta \neq \ker \beta^\wedge$.

ГС13♦6. Покажите, что у любого базиса $\mathbf{e} = (e_1, \dots, e_n)$ в пространстве V с невырожденной билинейной формой β имеются левый и правый *двойственные базисы* ${}^\vee\mathbf{e} = ({}^\vee e_1, \dots, {}^\vee e_n)$ и $\mathbf{e}^\vee = (e_1^\vee, \dots, e_n^\vee)$, однозначно определяемые тем, что $\beta({}^\vee e_i, e_j) = \beta(e_i, e_j^\vee) = \delta_{ij}$, и выразите матрицы $C_{e^\vee e}$ и $C_{e e^\vee}$, по столбцам которых стоят координаты векторов ${}^\vee e_j$ и e_j^\vee в базисе \mathbf{e} , через матрицу Грама $B_{\mathbf{e}}$. Убедитесь, что любой вектор $v \in V$ выражается через базис \mathbf{e} по формулам $v = \sum_i \beta({}^\vee e_i, v) e_i = \sum_j \beta(v, e_j^\vee) e_j$.

ГС13♦7. Вырождено ли ограничение билинейной формы β на \mathbb{Q}^4 с матрицей Грама

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & -5 \\ -1 & 3 & -8 & 8 \\ 2 & -5 & 8 & -10 \end{pmatrix}$$

на пространство U решений системы $\begin{cases} 2x_1 + x_3 = 0 \\ x_1 + x_3 = 0 \end{cases}$? Если нет, то найдите проекцию вектора $v = (6, -11, -9, 9)$ на U вдоль $U^\perp = \{w \in \mathbb{Q}^4 \mid \forall u \in U \beta(u, w) = 0\}$.

ГС13♦8. Покажите, что при $\text{char } \mathbb{k} \neq 2$ каждая билинейная форма однозначно представляется в виде суммы симметричной и кососимметричной билинейных форм. Приведите пример невырожденной билинейной формы, у которой оба слагаемых в этой сумме вырождены. Найдите размерности векторных пространств симметричных и кососимметричных билинейных форм на n -мерном пространстве V .

ГС13♦9. Пусть для любых двух векторов $u, w \in V$ равенства $\beta(u, w) = 0$ и $\beta(w, u) = 0$ равносильны друг другу. Покажите, что форма β симметрична или кососимметрична.

ГС13♦10. Рассмотрим на пространстве $V = \mathbb{Q}[x]_{\leq n}$ многочленов степени $\leq n$ с рациональными коэффициентами функцию $\beta(f, g)$, значение которой на многочленах $f, g \in V$ равно

¹Принимающего значения в поле \mathbb{k} (т. е. *скалярного*) и, вообще говоря, некоммутативного.

свободному члену многочлена² $f(d/dx)g$. Является ли она билинейной формой? Если да, то напишите её матрицу Грама в стандартном базисе из мономов и выясните, вырождена ли она? Симметрична ли?

ГС13♦11. Существует ли на нечётномерном пространстве невырожденная кососимметричная форма? Покажите, что ранг любой кососимметричной формы чётен.

ГС13♦12 (кососимметричность в характеристике 2). Покажите, что над полем \mathbb{k} любой характеристики равенство $\beta(v, v) = 0$ для всех $v \in V$ влечёт равенство $\beta(u, w) = -\beta(w, u)$ для всех $u, w \in V$, а обратная импликация имеет место только при $\text{char } \mathbb{k} \neq 2$.

²В первый многочлен вместо x подставили оператор дифференцирования $\frac{d}{dx}$ и применили полученный дифференциальный оператор ко второму многочлену.