

Евклидовы коники (продолжение)

ГС19♦18. Опишите геометрическое место середин всех параллельных заданной прямой хорд данного эллипса.

ГС19♦19. Канонические уравнения параболы, эллипса и гиперболы имеют вид

$$2ax = y^2 \quad (a > 0), \quad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad (a^2 > b^2 \neq 0), \quad \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad (ab \neq 0). \quad (1)$$

Покажите, что для отличной от окружности гладкой непустой вещественной коники существует единственный с точностью до смены знаков у базисных векторов ортонормальный аффинный репер, в котором эта коника задаётся каноническим уравнением.

ГС19♦20. Определите типы коник, напишите их канонические уравнения и укажите ортонормальные реперы, в которых эти коники задаются каноническими уравнениями:

- а) $19x^2 + 50xy + 28x + 33y^2 + 36y + 11 = 0$ б) $x^2 + 4xy + 4y^2 - 2y + 3 = 0$
 в) $7x^2 - 8xy + 8x + 2y^2 - 4y + 3 = 0$ г) $10x^2 + 26xy - 2x + 17y^2 - 4y + 4 = 0$
 д) $-6x^2 - 28xy - 32y^2 - 4y + 5 = 0$ е) $x^2 + 2xy + y^2 + 2y = 3$.

ГС19♦21. Покажите, что ГМТ с фиксированной суммой σ расстояний до двух данных точек f_1, f_2 является эллипсом, напишите его каноническое уравнение и найдите фокусы и директрисы.

ГС19♦22. Покажите, что ГМТ с фиксированной абсолютной величиной разности ρ расстояний до двух данных точек f_1, f_2 является гиперболой, напишите её каноническое уравнение и найдите фокусы и директрисы.

ГС19♦23. Покажите, что ГМТ с фиксированным отношением $\varepsilon > 0$ расстояния до данной точки f к расстоянию до данной прямой $\ell \not\ni f$ является коникой¹, определите её тип в зависимости от ε и напишите её каноническое уравнение.

ГС19♦24. Для каждой из коник (1) опишите ГМТ, из которых её видно под прямым углом.

ГС19♦25. Напишите уравнение прямой, на которой коника $ax^2 + by^2 = 1$ высекает отрезок с центром в точке (u, w) . (${}_zmq + {}_znb = {}_lmq + xnb$:ЛЕВЛО)

ГС19♦26. Гладкая проективная коника C касается сторон треугольника Δabc в точках

$$a_1 \in (bc), \quad b_1 \in (ca), \quad c_1 \in (ab).$$

Покажите, что точки $(a_1b_1) \cap (ab)$, $(b_1c_1) \cap (bc)$, $(c_1a_1) \cap (ca)$ лежат на одной прямой ℓ , и каждая тройка прямых, соединяющих произвольную точку прямой ℓ с вершинами Δabc , пересекает стороны $\Delta a_1b_1c_1$ в вершинах автополярного относительно C треугольника.

ГС19♦27 (коника полюсов). Пусть прямая $\ell \subset \mathbb{P}_2$ не проходит через особые точки вырожденных коник и базисные точки невырожденного и не содержащего двойной прямой пучка коник L на \mathbb{P}_2 . Покажите, что ГМТ полюсов прямой ℓ относительно коник из L является гладкой коникой, проходящей через неподвижные точки инволюции Дезарга $\sigma_L : \ell \simeq \ell$.

ГС19♦28 (коника 11 точек). Пусть в условиях предыдущей задачи пучок L является простым с базисными точками a, b, c, d . Покажите, что коника полюсов прямой ℓ , не проходящей через a, b, c, d и вершины ассоциированного с четырёхвершинником $abcd$ треугольника Δxyz , характеризуется как единственная коника, описанная около Δxyz и проходящая через две неподвижные точки инволюции Дезарга $\sigma_L : \ell \simeq \ell$ и шесть таких точек p_{st} , где $\{s, t\} \subset \{a, b, c, d\}$ и $s \neq t$, что $[\ell \cap (st), p_{st}, s, t] = -1$.

¹Число ε называется эксцентриситетом этой коники.