1. Матрицы линейных отображений

$$F : V \longrightarrow W$$

$$v = (v_1 \dots v_n) \quad (w_1 \dots w_m) = w$$

матрица отображения F в базисах v и w

определяется тем, что $F(v) = w \cdot F_{wv}$

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in K^n \qquad (Fv_1, \dots, Fv_n) = \\ = (w_1 \dots w_m) \underset{\longleftrightarrow}{\cdot} F_{wv}$$

$$u = \sum v_i \cdot x_i = v \cdot x = (v_1 \dots v_n) \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

$$F(u) = F(v \cdot x) = F(v) \cdot x = w \cdot F_{wv} \cdot x$$

оператор F переводит вектор u со столбцом координат x в базисе v в вектор со столбцом координат $F_{wv} \cdot x$ в базисе w

$$x \longmapsto F_{wv} \cdot x$$

---

2. Матрицы перехода между наборами

векторов:

$u = (u_1, \dots, u_n)$ и $w = (w_1, \dots, w_m)$ в V

если u линейно выражается через w

то $u = w \cdot C_{wu}$ где $\underline{C_{wv}}$ — это

матрица в j-том столбце которой стоят коэфф-ты выражения вектором u_j через w. C_{wu} наз. матрицей перехода от векторов u к векторам w.

$$v = u \cdot x \rightsquigarrow v = u \cdot x = w \cdot C_{wu} \cdot x = w \cdot \left(C_{wu} \cdot x\right)$$

$v = (v_1, \dots, v_k)$

$$v = u \cdot C_{uv}$$

$$u = w \cdot C_{wu} \Rightarrow v = w \cdot \underline{C_{wv}}$$

$$u = w \cdot C_{wu}$$

$$\underline{C_{wv} = C_{wu} \cdot C_{uv}},$$

$v = u \cdot C_{uv} = w \underbrace{C_{wu} C_{uv}}$ годится в качестве C_{wv}

Важное предупреждение

обозначение C_{wu} **некорректно**

наборам векторов w и u может отвечать **много** матриц C_{wu} со свойством $\underline{\underline{u}} = w \cdot \underline{C_{wu}}$,

если векторы $w = (w_1, \dots, w_m)$ линейно зависимы

Если векторы $w = (w_1, \dots, w_m)$ линейно независимы, то у каждого набора векторов $u = (u_1, \dots, u_m)$ из $\mathrm{Span}(w_1, \dots, w_m)$ есть **ровно одно** представление в виде $u = w \cdot C_{wu}$

т.е. наборы u биективно соответствуют матрицам $C_{wu} = \mathrm{Mat}_{n \times m}(k)$.

Важные примеры: Пусть $(e_1, \dots, e_n) = e$ это базис в V. Набор $(v_1, \dots, v_n) = v$ образует базис в V тогда и только тогда, когда $C_{ev} C_{ve} = E$

если v базис: $\underbrace{C_{ve}}\,\underbrace{C_{ev}} = E$.

$$C_{ev} \cdot C_{ve} = C_{ee} = E$$

т.к. e базис

$$C_{ve} \cdot C_{ev} = C_{vv} = E$$

т.к. v базис

Общее определение:

с единицей E

Элемент A в $\Bbbk$-алгебре называется обратным, если $\exists B : \underline{AB = BA} = E$

можно требовать, что $\exists B : AB = E$
$\exists C : CA = E$

$$\underline{\underline{C}} = C \cdot E = C \cdot (AB) = (CA)B = EB = \underline{\underline{B}}$$

в ассоц. алгебре левый и правый обратные совпадают!

Векторное пр-во A над полем $\Bbbk$ наз. $\Bbbk$-алгеброй, если в A задано билинейное умножение

$$A \times A \to A$$

= дистрибутивное + + константы из $\Bbbk$ можно вынести

$$(\lambda_1 A_1 + \lambda_2 A_2)(\mu_1 B_1 + \mu_2 B_2) = \sum_{i,j=1}^{2} \lambda_i \mu_j A_i B_j$$

$A_i, B_j \in A$

$\lambda_i, \mu_j \in \Bbbk$

A наз. ассоциативной, если

$$A(BC) = (AB)C$$

Примеры: • Многочлены $\Bbbk[x]$ коммутативная алгебра

• Матрицы $\mathrm{Mat}_n(\Bbbk)$ (квадратные!)

$\parallel$ не коммутативная

• эндоморфизмы $\mathrm{End}(V)$ = = линейные операторы $V \to V$

Если $e_1,\dots,e_n$ - базис в V, то операторы обычно изображают матрицами $F_e := F_{ee}$

в j-том столбце F_e стоят координаты вектора $F(e_j)$ в базисе $\underline{\underline{e}}$.

$$F(e) = e \cdot F_e$$

$$v = e \cdot x \longrightarrow e \cdot (F_e x)$$

действие F на столбцы координат происходит по правилу

$$x \longrightarrow F_e \cdot x$$

Пусть есть 2 базиса e и v. Как связаны $\boxed{F_e \text{ и } F_v \,?}$

Более общий вопрос: $F: V \to W$

$$\begin{array}{ccc} V & \longrightarrow & W \\ e & & g \\ v & & w \end{array}$$

Как связать ? пары базисов

F_{ge} и F_{wv}

$v = e\cdot C_{ev}$ $\quad$ $w = g\cdot C_{gw}$

$$F(v) = w\cdot F_{wv} \longleftrightarrow w\cdot C_{wg}F_{ge}C_{ev}$$

" $\qquad$ "

$$F(e\cdot C_{ev}) = F(e)\cdot C_{ev} = g\cdot F_{ge}\cdot C_{ev}$$

$$\boxed{F_{wv} = C_{wg}F_{ge}C_{ev}}$$

$\parallel \qquad \parallel$

$C_{gw}^{-1}F_{ge}C_{ev} \qquad C_{wg}F_{ge}C_{ve}^{-1}$

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, "F"] & V \\ e & e \\ \vee & \vee \end{tikzcd}$$

$$F_g = F_{gg} = C_{ge}F_{ee}C_{eg}$$

$$F_g = C_{ge} F_e C_{eg} =$$

$$= C_{ge} F_e C_{ge}^{-1} =$$

$$= C_{eg}^{-1} F_e C_{eg}$$

Как меняются координаты вектора при замене базиса?

$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ $\quad e = (e_1, \dots, e_n)$, $\underline{\underline{v}} = (\underline{v_1}, \dots, v_n)$ — 2 базиса $\in V$

!

$$u = e \cdot x_e = v \cdot \underbrace{C_{ve} \cdot x_e}_{x_v}$$

$$u = \underline{\underline{v}} \cdot x_v$$

$$x_v = C_{ve} \cdot x_e$$

Столбцы координат вектора u в базисах e и v.

$$x_v = \underline{\underline{C_{ev}^{-1}}} \cdot x_e$$

! Важная народно-хозяйственная задача: искать обратные матрицы.