Лекция 11 ноября (первая половина)

Для пропустивших коллоквиум (по уважительной причине) сдача будет в пнд. 22 ноября (~15:00).

До пятницы 19 ноября напишите мне, что будете сдавать коллоквиум.

Контрольная N2 : с 15 по 19 ноября на семинарах

в заочной группе в SMART LMS edu.hse.ru

Метод Гаусса

Элементарные преобразования:

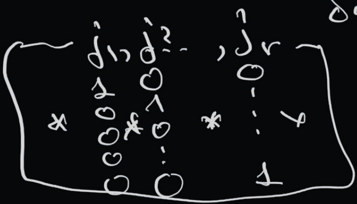
(1) u, w $\qquad u' = u$, $w' = w + \lambda u$ — прибавление к строке другой, умноженной на λ

(2) u, $w \longrightarrow u' = w$, $w' = u$ — смена строк местами

(3) $u \longrightarrow u' = \lambda u$, $\lambda \neq 0$ — умножение строки на число

$A \rightsquigarrow A_{red}$ приведённой ступенчатой

базисные столбцы



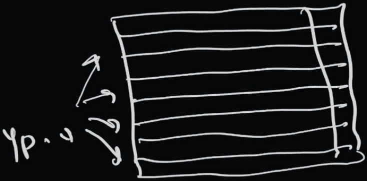
в них стоит подматрица E размера r×r

в k-той строке левее j_k-го столбца стоят нули.

мы научились находить базис в линейной оболочке строк и обращать квадратную матрицу (или понимать, что она НЕ обратима)

- Решение систем линейных уравнений

$$\boxed{Ax = b}$$



$$C = \boxed{A \mid b}$$

Элементарные преобразования строк:

(1) К уравнению прибавить другое, умноженное на число.

(2) Меняем 2 ур-я местами

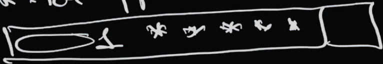
(3) Умножить обе части ур-я на $\lambda \neq 0$.

$C \longrightarrow C_{red}$

$J = \{j_1, \dots, j_r\}$

переменные разделились!

k-ое уравнение, $k \leq r$



$$x_{kj} + \sum_{\nu \neq j_1 \dots j_r} c_{k\nu} x_\nu = c_{k\,n+1}$$

набор номеров базисных столбцов

связанные переменные

$$\begin{cases} x_{j_1} = c_{1\,n+1} - \sum\limits_{\nu \notin J} c_{1\nu} x_\nu \\ x_{j_2} = c_{2\,n+1} - \sum\limits_{\nu \notin J} c_{2\nu} x_\nu \\ \vdots \\ x_{j_r} = c_{r\,n+1} - \sum\limits_{\nu \notin J} c_{r\nu} x_\nu \end{cases}$$

свободные переменные

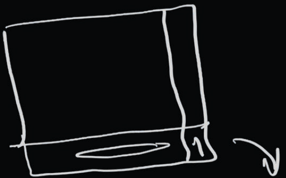
$$\{1, \dots, n\} = \{j_1, \dots, j_r\} \sqcup \{i_1, \dots, i_{n-r}\}$$

$I \sqcup J \qquad I \cap J = \emptyset$

номера базисных столбцов
=
номера связанных переменных

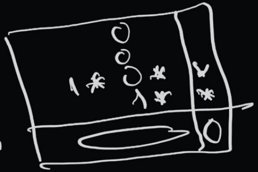
дополнительные номера
=
номера свободных переменных

$j_r = n+1$



Система несовместна

$0 = 1$



$j_r \le n$

регулярный случай

свободным переменным можно придавать любые значения $(x_{i_1}, \dots, x_{i_{n-r}}) \in \mathbb{k}^{n-r}$

а связанные переменные по ним однозначно находятся по формулам

$$(*)\quad \begin{cases} x_{j_1} = c_{1\,n+1} - \sum\limits_{i \in I} c_{1i} x_i \\ x_{j_2} = c_{2\,n+1} - \sum\limits_{i \in I} c_{2i} x_i \\ \dots \dots \end{cases}$$

параметрическое представление пр-ва решений?

$Ax = b$

$b \in \operatorname{im} F_A$

$x \longrightarrow Ax$

система совместна $\Leftrightarrow$

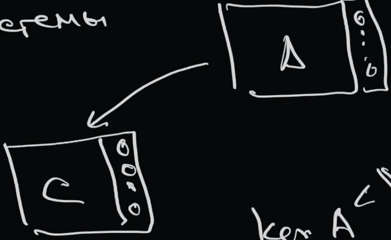
$\exists p : Ap = b$

и все решения — это аффинное пр-во $p + \operatorname{Ker} A$.

подставляем в (*) $x_i = 0$ получаем

$x_{j_k} = c_{k\,n+1}$ $\quad p = (\underset{\substack{\uparrow\\ j_1}}{c_{1\,n+1}}\; 0 \dots \underset{\substack{\uparrow\\ j_r}}{c_{r\,n+1}}\; 0)$

$\underline{\ker A} = \{x \mid Ax = 0\}$ — пр-во решений однородной системы



Ядро допускает то же самое параметрическое описание:

$$\begin{cases} x_{j_1} = -\sum\limits_{i\in I} c_{1i}x_i \\ x_{j_2} = -\sum\limits_{i\in I} c_{2i}x_i \\ \dots \\ x_{j_r} = -\sum\limits_{i\in I} c_{ri}x_i \end{cases}$$

$$\begin{tikzcd} \ker A < \mathbb{K}^n \arrow[d, "\text{стирание координат } J"', "\simeq"] \\ E_I \end{tikzcd}$$

$$(x_1, \dots, x_n) \to (x_{i_1}, \dots, x_{i_{n-r}})$$

координатная плоскость, натянутая на базисные векторы $e_{i_1}, \dots, e_{i_{n-r}}$

Общее решение имеет вид

$\underline{p + \ker A}$

базис в $\ker A$ можно явно указав, придав свободным переменным значения $\left.\begin{matrix}(1,0,0,\dots 0)\\(0,1,0\dots 0)\\ \dots\end{matrix}\right\} n-r$

стандартный базис в E_I. → $(0, 0, \dots, 0, 1)$ }

Базис в Ker A будет состоять из левых частей векторов вида $(** 0 \dots * 0 1 \dots * \dots 0)$

в позициях I

$$A \longrightarrow A_{red} = SA$$

A_{red} – это матрица того же самого оператора $F_A : \mathbb{k}^n \to \mathbb{k}^m$ в том же самом стандартном базисе пр-ва $\mathbb{k}^n$, но в другом базисе пр-ва $\mathbb{k}^m$

$$x \longrightarrow Ax$$

$$\leftarrow A = \boxed{F_{ge}}$$

$$A_{red} = SA$$

$$\underset{e_1, \dots, e_n}{\mathbb{k}^n} \longrightarrow \underset{g_1, \dots, g_m}{\mathbb{k}^m}$$

$$\underline{(Fe_1 \dots Fe_n) = (g_1 \dots g_m)A}$$

$$(Fe_1 \dots Fe_n) = \underbrace{(g_1 \dots g_m) S^{-1}}_{h} S A \qquad (Fe_1 \dots Fe_n) = (g_1 \dots g_m) F_{ge}$$

SA — это матрица оператора F_A в базисах e у k^n и $h = g \cdot S^{-1}$ у k^m.

$$(Fe_1, \dots, Fe_n) = (\underset{\overset{\shortparallel}{gS^{-1}}}{h_1 \dots h_m}) \cdot \underset{\overset{\shortparallel}{SA}}{A_{red}}$$

обратимы

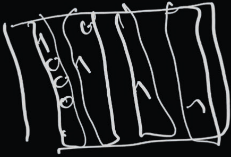
Образ $\operatorname{im} F_A$ порождается столбцами матрицы A (в базисе g)

$\shortparallel$

столбцами матрицы A_{red} (в базисе h)

$r = \operatorname{rk} A = \dim \operatorname{im} F_A$

$n - r = \dim \ker F_A$.



$\{x \mid Ax = 0\} = \ker F_A =$ решения однородной системы $Ax = 0$

Базисные столбцы составляют базис в линейной оболочке столбцов матрицы A_{red}

$$\Updownarrow$$

$$F_A(e_{j_1}) \dots F_A(e_{j_r}) \leftarrow$$

Это базис в $\operatorname{im} F_A$

образы стандартных базисных векторов пр-ва k^n с номерами из J

номера базисных столбцов

Дан оператор $F : U \to W$ своей матрицей в базисах $u_1, \dots, u_n$ из U и $w_1, \dots, w_m$ из W. Найти базисы в $\ker F$ и в $\operatorname{im} F$.

$$\ker F = \{ v = u \cdot x \mid F_{wu} x = 0 \}$$

$$(Fu_1 \dots Fu_n) = (w_1 \dots w_m) F_{wu}$$

$$ux \longrightarrow F(u) \cdot x = (w_1 \dots w_m) F_{wu} x$$

$$x \longmapsto F_{wu} x$$

Надо решить систему однородных уравнений $F_{\omega u} x = 0$. Найти базис $x^{(1)} \dots x^{(n-r)}$ в пр-ве решений.

Тогда векторы $u \cdot x^{(1)}, \dots, u \cdot x^{(n-r)}$ составят базис в ядре.

Базис образа состоит из векторов

$$F(u_{j_1}) \quad F(u_{j_2}) \dots F(u_{j_r})$$

$j_1, \dots, j_r$ – это номера базисных столбцов матрицы $(F_{\omega u})_{red}$.

координаты этих векторов в базисе ω являются столбцы матрицы $F_{\omega u}$.