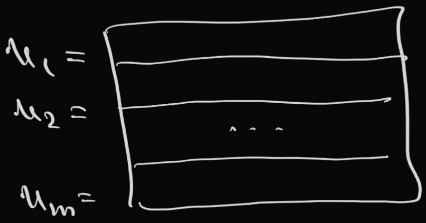
Лекция 11 ноября (вторая половина)

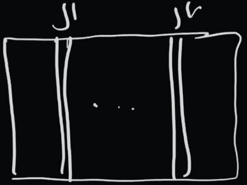
Дано подпр-во $U < \mathbb{K}^n$ как линейная оболочка строк матрицы $A \in \mathrm{Mat}_{m\times n}(\mathbb{K})$



Как указать базис в $\mathbb{K}^n/U$?

↓ приводим по Гауссу

$\dim(U) = r$ $A_{red.}$

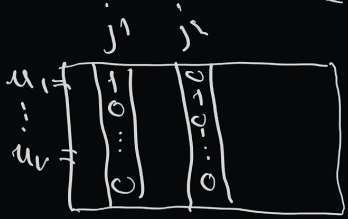


$\dim(\mathbb{K}^n/U) = n-r$

$\mathrm{rk}\, A = r$

Базис в $\mathbb{K}^n/U$ состоит из классов $[e_{i_1}], [e_{i_2}], \ldots, [e_{i_{n-r}}]$

Базисные векторы с дополнительными номерами к $j_1, \dots, j_r$



в столбцах $j_1, \dots, j_r$ стоит единичная подматрица.

$$\pi_J : \mathbb{k}^n \longrightarrow E_J = \operatorname{span}(e_{j_1}, \dots, e_{j_n})$$

$$\pi_J\big|_U : U \xrightarrow{\sim} E_J$$ это изоморфизм

$$\{1, \dots, n\} = \underset{r}{J} \sqcup \underset{n-r}{I}$$

$$\pi_J : (x_1, \dots, x_n) \longmapsto (x_{j_1}, \dots, x_{j_r})$$

стираем координаты $i_1, \dots, i_{n-r}$

$$\pi_J(u_1) = e_{j_1}$$

$$\pi_J(u_k) = e_{j_k}$$

$$\ker \pi_J = E_I \qquad \pi_J\big|_U : \underset{r}{U} \xrightarrow{\sim} \underset{r}{E_J}$$

$$\ker\left(\pi_J\big|_U\right) = U \cap E_I = 0$$

$$p_U : \mathbb{k}^n \twoheadrightarrow \mathbb{k}^n / U \leftarrow \ker p_U = U$$

$$P_U\big|_{E_I} : E_I \xrightarrow{\sim} \Bbbk^n/U \leftarrow$$ это изоморфизм

$$\dim E_I = \dim(\Bbbk^n/U) = n-r$$

$$\ker\left(P_U\big|_{E_i}\right) = U \cap E_I = 0$$

одинаковые!

A_{red} не зависит от способа приведения, и даже от $\underline{\underline{A}}$ не зависит, а только от линейной оболочки строк матрицы A.

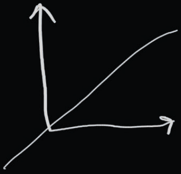
Теорема: В любом векторном подпространстве $U < \Bbbk^n$ $\exists!$ базис $u_1, \dots, u_r$ строки координат которого образуют приведённую ступенчатую матрицу.

U_r

Любое r-мерное подпр-во $U \subset \mathbb{K}^n$ трансверсально хоть какой-нибудь $(n-r)$-мерной координатной плоскости

$$E_I = \operatorname{span}(e_{i_1}, \dots, e_{i_{n-r}})$$

Из леммы о замене:



в стандартном базисе $e_1, \dots, e_n$ можно заменить какие-то r векторов $e_{j_1}, \dots, e_{j_r}$ на базисные векторы $u_1, \dots, u_r$ пр-ва U.

$$0 = U \cap E_I \Leftrightarrow u_1 \dots u_r\, e_{i_1}, \dots, e_{i_{n-r}}$$

базис в $\mathbb{K}^n$

$$\boxed{\begin{matrix} I \cup J = \{1, \dots, n\} \\ I \cap J = \varnothing \end{matrix}}$$

$$\Updownarrow$$

равносильно эквивалентным условиям:

- для $\pi_J : \Bbbk^n \twoheadrightarrow E_J$ вдоль E_I

огр-е $\pi_J\big|_U : \underset{r}{U} \xrightarrow{\sim} \underset{r}{E_J}$ – это изоморфизм

- $p_U : \Bbbk^n \twoheadrightarrow \Bbbk^n/U$ ограничивается

на E_I: $p_U\big|_{E_I} : \underset{n-r}{E_I} \xrightarrow{\sim} \underset{n-r}{\Bbbk^n/U}$ это изоморфизм

$$\boxed{\ker\left(p_U\big|_{E_I}\right) = \ker\left(\pi_J\big|_U\right) = E_I \cap U}$$

Если эти условия выполнены, то в U $\exists!$ базис $u_1, \dots, u_r$, который проектируется в стандартные базисные векторы $e_{j_1}, \dots, e_{j_r}$ при проекции

$$\pi_J\big|_U : U \longrightarrow E_J = \operatorname{span}(e_{j_1}, \dots, e_{j_r})$$

$$u_i = e_{j_i} + w_i\,, \quad w_i \in E_I$$

такой базис единствен коль скоро выбрано разбиение

$\{1, \dots, n\} = I \sqcup J : E_I \cap U = 0$

$$\begin{array}{c|cccc} & j_1 & j_2 & & j_r \\ u_1 = & 1 & 0 & 0 & 0 \\ & 0 & 1 & 0 & 0 \\ \vdots & & & & \\ u_r = & & & & \end{array}$$

содержит единичную подматрицу в столбцах $j_1, \dots, j_r$.

U трансверсально многим E_I.

Теорема $\Leftrightarrow$ метод Гаусса строит такой базис с лексикографически минимальным набором $j_1, \dots, j_r$ у всех возможных.
